

# Remise en cohérence d'un modèle géologique 3D

Olivier Grosse

May 7, 2002



À mes parents.



## Remerciements

Je tiens à remercier Jean-Laurent Mallet qui a dirigé et suivi ces travaux. Merci à la Compagnie Générale de Géophysique et l'Association Nationale de la Recherche Technique qui ont co-financé cette thèse.

Je tiens aussi à remercier les membres de mon jury, Pascal Lienhardt et Helmut Schæben qui ont accepté d'être mes rapporteurs ainsi que Patrice Guillaume, Bruno Lévy, Jean-Jacques Royer, Michel Schmitt et Charles H. Sword.

Merci aussi à tous mes correcteurs pour leurs remarques et conseils avisés, Christian (le D'Artagnan du LIAD), Guillaume et tout particulièrement Sophie, égérie et seule fille du labo : j'ai apprécié ses gribouillis et dessins sur mon manuscrit. Je n'oublie pas Mme Cugurno, notre secrétaire de choc, sans laquelle le bon fonctionnement du LIAD serait compromis. Merci à tous mes collègues de bureaux et amis, Luciano (free-rider Brésilien), frère Emmanuel (moine contemplatif de Toul), Jean-Charles, Rémy (spécialiste du malt houblonné), César, François (free-rider Nantais), Souchy, Dave, Laurent... Merci aussi aux anciens qui ont rejoint d'autres cieux, Nathalie (reviens, tu nous manques à tous!!!), Isabelle, Magali, Stéphane, Nicolas, Didier (Allo docteur, ici La Noiraude), Stan, Ariane, Pof, Jérôme, Matthieu, Étienne et plein d'autres encore. Merci encore une fois à Bruno pour son aide précieuse sur les G-Cartes.

Merci aussi à Aude (ne fais pas la même bêtise que moi, ne fais pas de thèse), Caramel, Séverine (ma professeuse d'anglais préférée), Cécile (mon anglaise d'adoption préférée), E. B., Carine (prends des vacances) pour leur soutien moral.



## Résumé

La modélisation volumique est un outil précieux pour le géologue pétrolier : elle lui permet d'appréhender la disposition des couches géologiques dans le sous-sol et de gérer au mieux l'exploitation d'un gisement. Un modèle géologique 3D est une partition de l'espace par un ensemble de surfaces en sous-domaines appelés régions. Ces surfaces correspondent aux horizons et aux failles qui ont pu être détectés au moyen de forages et de méthodes géophysiques. Un modèle géologique n'est pas une représentation figée du sous-sol : il est amené à évoluer au cours de son existence pour intégrer de nouvelles données et prendre en compte les différentes interprétations des géologues.

Modifier un modèle géologique 3D, tout en préservant sa cohérence, implique le respect de plusieurs contraintes sur les surfaces qui le composent : ces surfaces doivent être jointives et ne se recouper qu'au niveau de leurs bords. Nous proposons un nouveau type de modèle pour simplifier les opérations de modification. Dans ce modèle, une surface est subdivisée par un ensemble de lignes définies par les relations partagées par cette surface avec son environnement. Ainsi, le recours à des opérations de découpage entre surfaces et de suppression de cicatrices n'est plus nécessaire lorsque le modèle est modifié. Nous étendons le concept de Cartes Généralisées Hiérarchiques pour représenter les trois niveaux de subdivision de résolution croissante nécessaires à la description d'un tel modèle :

- la partition de l'espace par les surfaces en régions ;
- la subdivision de chaque surface par un ensemble de lignes en domaines 2D ;
- la triangulation des surfaces.

Dans certaines circonstances, il n'est pas nécessaire de modifier la topologie du modèle. Nous proposons donc une méthode dérivée des outils de déformation de formes libres, qui consiste à déformer continûment le modèle. Connaissant pour certains points du modèle leur nouvelle position, nous pouvons définir une fonction de déformation pour calculer le déplacement des autres points. Nous utilisons l'interpolateur DSI pour déterminer cette fonction. La souplesse de cette méthode permet de moduler la fonction de déformation pour répondre au mieux aux différents besoins des géologues.



## Abstract

3D modeling is a precious tool for the oil geologist. It helps him for instance to understand the geological structures of the subsoil and to monitor the exploitation of an oil field. A 3D earth model is a partition of the 3D space by a set of surfaces into closed domains called regions. These surfaces correspond to geological features such as the horizons and the faults that have been detected by means of drillings or geophysical methods. A geologic model is not a rigid representation of the subsoil: it is brought to evolve during its existence to take into account new data and the various interpretations of the geologists.

Editing a 3D earth model while keeping its consistency implies to respect several constraints on the surfaces that delimit the model regions: these surfaces should not intersect each other except on their borders and should be contiguous. Here, we propose a new type of model in the aim of simplifying the editing operations. In this model, each surface is subdivided into domains by a set of lines defined by the relations connecting the surfaces with their environment. So, operations such as cutting up the surfaces and deletion of scars are not necessary any more when the model is modified. For that purpose, we extend the concept of Hierarchical Generalized Maps to represent the three levels of subdivision needed for the complete description of such a model:

- the partition of the 3D space by the surfaces into regions;
- the subdivision of every surface by a set of lines into 2D domains;
- the triangulation of surfaces.

It is not always necessary to modify the topology of a model. Thus, we propose a method deriving from the Free Form Deformation tools, which consists in continuously deforming the geological models. Given for some points their new position, we can define a mapping function to compute the displacement of the remaining points of the model. We have chosen the DSI interpolator to estimate this function. The flexibility of this method allows us to adjust the mapping function to fit the various needs of the geologists.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
Cadre de cette thèse . . . . .	1
Contexte de cette thèse . . . . .	1
Inversion tomographique sismique . . . . .	2
La modélisation géologique : l'approche du logiciel GOCAD . . . . .	5
Objectifs de cette thèse . . . . .	7
Organisation du mémoire . . . . .	8
<b>1 Modélisation volumique</b>	<b>11</b>
1.1 Introduction . . . . .	12
1.2 Quelques notions préliminaires . . . . .	14
1.2.1 Topologie et plongement . . . . .	14
1.2.2 Notion de Cellules . . . . .	15
1.2.3 Objets variétés, Objets non-variétés . . . . .	16
1.2.4 Orientabilité . . . . .	17
1.3 Les techniques de modélisation volumique. . . . .	18
1.3.1 Représentation booléenne . . . . .	18
1.3.2 Représentation par frontières . . . . .	19
1.3.3 Représentation cellulaire . . . . .	23
1.3.4 Bilan . . . . .	25
1.4 Construction d'un modèle géologique . . . . .	26
1.4.1 Préparation des surfaces . . . . .	26
1.4.2 Assemblage des surfaces . . . . .	33
1.4.3 Construction des régions . . . . .	34
1.5 Mise à jour d'un modèle géologique . . . . .	35
1.5.1 Mise à jour d'un modèle avec modification de la topologie . . . . .	38
1.5.2 Mise à jour d'un modèle à topologie constante . . . . .	42
1.6 Conclusion . . . . .	44
<b>2 Cartes Généralisées</b>	<b>47</b>
2.1 Introduction . . . . .	48
2.2 Cartes généralisées . . . . .	48
2.2.1 Simplexes et ensembles semi-simpliciaux . . . . .	48

2.2.2	Triangulation barycentrique . . . . .	50
2.2.3	Une définition intuitive des G-Cartes . . . . .	51
2.2.4	Cartes Généralisées : définition . . . . .	53
2.3	Implantation des Cartes Généralisées . . . . .	54
2.3.1	Orbite et cellules . . . . .	54
2.3.2	Orientabilité et Orientation . . . . .	57
2.3.3	Plongement . . . . .	59
2.3.4	Opérations topologiques sur les Cartes Généralisées . . . . .	62
2.4	Cartes Généralisées Hiérarchiques . . . . .	63
2.4.1	Introduction . . . . .	63
2.4.2	Définition . . . . .	64
2.4.3	Modèle cellulaire . . . . .	67
2.5	Conclusion . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Trimmed Triangulated Surfaces</b>	<b>71</b>
3.1	Introduction . . . . .	72
3.1.1	Rappel du problème . . . . .	72
3.1.2	Un bref aperçu sur les trimmed-surfaces . . . . .	72
3.1.3	Trimmed Triangulated Surfaces . . . . .	73
3.2	Intérieur et extérieur d'une courbe polygonale . . . . .	74
3.2.1	Quelques définitions préliminaires . . . . .	74
3.2.2	Définition du problème . . . . .	79
3.2.3	Intérieur et extérieur topologiques d'une ligne . . . . .	80
3.2.4	Construction des polygones . . . . .	89
3.3	Implantation des Trimmed-TSurfs . . . . .	90
3.3.1	Description de la structure . . . . .	90
3.3.2	Analogie avec les modèles 2D . . . . .	92
3.4	Construction d'une Trimmed-TSurf . . . . .	94
3.4.1	Construction des lignes . . . . .	94
3.4.2	Assemblage des lignes . . . . .	96
3.4.3	Description du plongement . . . . .	97
3.4.4	Identification des régions . . . . .	98
3.5	Applications . . . . .	103
3.5.1	Construction de modèles 3D . . . . .	103
3.5.2	Construction de modèles 2D plongés sur une surface gauche . . . . .	106
3.5.3	Manipulation interactive d'un modèle 3D . . . . .	106
3.6	Conclusion . . . . .	107
	Annexe : parcours de l'intérieur d'une ligne polygonale . . . . .	109
<b>4</b>	<b>Déformation continue d'un modèle géologique</b>	<b>111</b>
4.1	Introduction : Problème . . . . .	112
4.2	Déformation spatiale . . . . .	113
4.3	Déformation de Formes Libres . . . . .	115

4.3.1	Principe . . . . .	115
4.3.2	Calcul des coordonnées paramétriques d'un point . . . . .	118
4.3.3	Fonctions paramétriques . . . . .	120
4.3.4	Conclusion . . . . .	126
4.4	Déformation spatiale par manipulation directe . . . . .	127
4.4.1	Principe des déformations contraintes [BB91] . . . . .	128
4.4.2	Déformation de formes libres par manipulation directe . . . . .	130
4.4.3	Déformations radiales . . . . .	131
4.4.4	DOGME [Bec92] . . . . .	134
4.4.5	La méthode choisie . . . . .	134
4.5	Déformation contrainte d'un modèle géologique . . . . .	136
4.5.1	Construction de la grille . . . . .	136
4.5.2	Résolution du système d'équations . . . . .	137
4.5.3	Problème des auto-intersections . . . . .	140
4.5.4	Autres contraintes . . . . .	146
4.6	Conclusion . . . . .	148
	<b>Conclusion</b>	<b>151</b>
	Bilan . . . . .	151
	Perspectives . . . . .	154
	<b>Bibliographie</b>	<b>155</b>



# Introduction

## Cadre de cette thèse

Cette thèse s'est déroulée au sein du projet GOCAD (Geological Object Computer Aided Design), initié en 1989 par le professeur J.L. Mallet de l'École Nationale Supérieure de Géologie de Nancy (ENSG), en réponse à l'inadaptation des modèles géométriques industriels aux problèmes rencontrés en géologie. Ce projet est actuellement financé par une vingtaine d'entreprises des domaines pétrolier, para-pétrolier et minier ainsi que par une soixantaine d'universités.

Cette thèse a été financée par la Compagnie Générale de Géophysique (CGG), elle-même membre du consortium GOCAD depuis le tout début. CGG est une société de services spécialisée principalement dans l'acquisition et le traitement des données sismiques.

## Contexte de cette thèse

Le géologue pétrolier dispose de plusieurs types de données pour se faire une représentation de la disposition des couches géologiques du sous-sol :

- Les puits lui fournissent des informations sur la nature et les propriétés pétrophysiques des terrains rencontrés. Ces données sont précises mais localisées. Il n'est généralement pas possible de multiplier le nombre de puits pour améliorer un modèle géologique, et ce, pour des raisons évidentes de coût : le prix d'un forage revient à plusieurs millions de dollars.
- Les affleurements offrent un accès direct aux terrains de la zone à étudier mais ne sont pas toujours disponibles : c'est le cas par exemple en domaine marin ou même à terre car le réservoir est généralement enfoui.
- Une connaissance globale du contexte géologique de la zone étudiée lui donne une idée sur la nature et la structure des terrains sous-jacents.
- Enfin, les mesures géophysiques lui apportent la majeure partie des informations disponibles pour construire son modèle. La sismique réflexion donne en effet

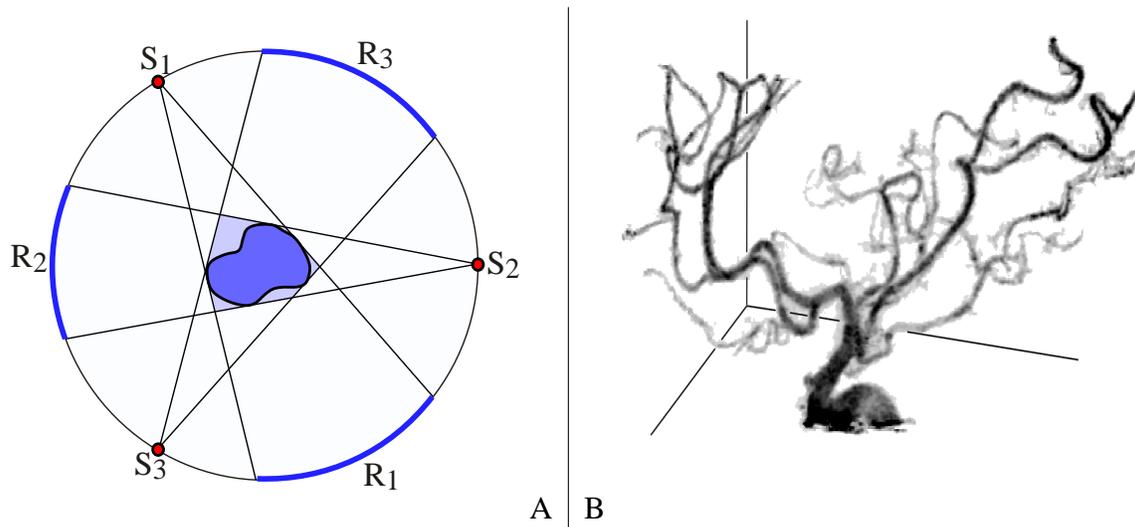


Figure 1: *Tomographie rayon X. A : principe. B : exemple d'une artère cérébrale reconstruite à partir d'une série de radiographies.*

une image bidimensionnelle ou tridimensionnelle des structures géologiques, telle une échographie du sous-sol. Elle nécessite toutefois un traitement numérique poussé des données brutes pour obtenir l'image la plus réaliste et la plus précise possible du sous-sol. L'inversion tomographique sismique est un des outils utilisés pour améliorer la qualité de l'image.

## **Inversion tomographique sismique**

Avant d'introduire le principe de l'inversion tomographique sismique, nous allons tout d'abord exposer brièvement le fonctionnement de la tomographie rayons X, une technique d'imagerie 3D utilisée principalement dans le domaine médical.

Cette technique permet de construire une représentation tridimensionnelle des organes à partir d'une série de coupes radiographiques X prises sous différents angles de vues comme le montre la figure 1A. Les lois de transmission et d'absorption des rayons X au sein des différents tissus humains étant bien connues, il est relativement aisé de reconstruire la géométrie des organes étudiés à partir de ces radiographies. La figure 1B montre un résultat obtenu par une méthode de reconstruction basée sur le solveur DSI [Ker00]. Il s'agit d'une artère du cerveau révélée par un produit opaque aux rayons X.

En géologie, les rayons X sont remplacés par des ondes sismiques. Ces ondes sont émises par des camions vibreurs ou des explosifs en domaine terrestre et par des canons à air en domaine marin. Elles se propagent dans le sous-sol à différentes vitesses suivant la nature des terrains traversés. Quand une zone à fort contraste d'impédance

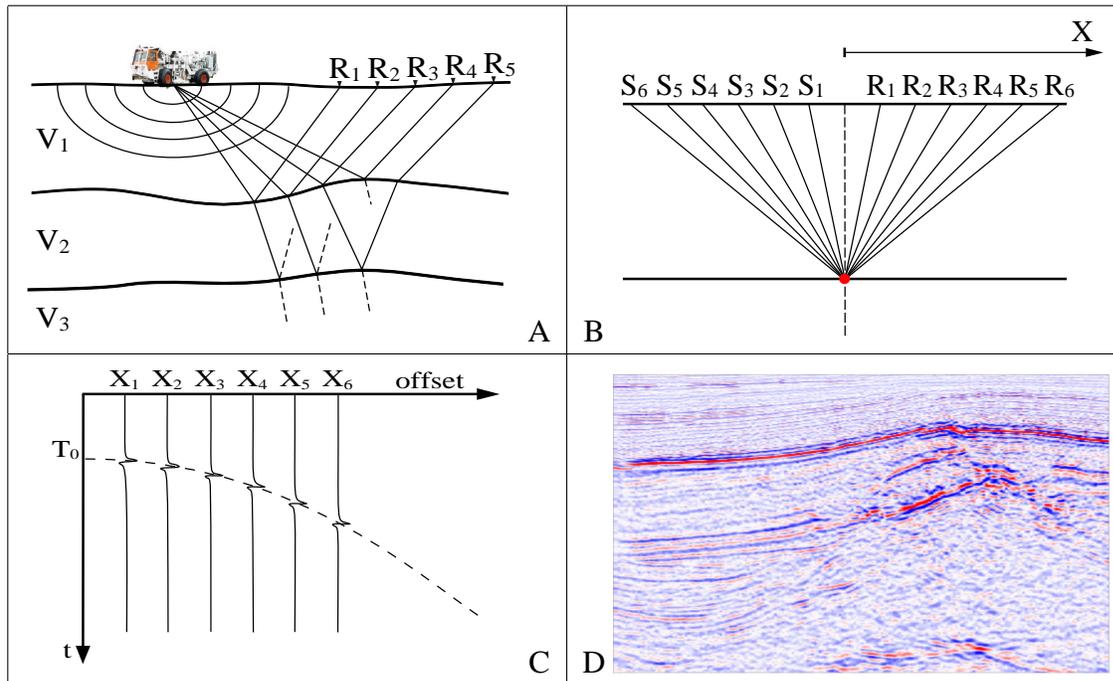


Figure 2: Principe de la sismique réflexion. A : acquisition en domaine terrestre. B : éclairage multiple d'un point miroir. C : mesure du temps de trajet de rayons sismiques illuminant le même point miroir en fonction de la distance séparant l'émetteur du récepteur (offset). Il suit une loi hyperbolique dépendant à la fois de la profondeur et du pendage du réflecteur ainsi que de la vitesse moyenne des ondes dans les terrains sus-jacents. Ces informations seront utilisées lors de l'inversion tomographique. D : section sismique temps.

acoustique<sup>1</sup> est rencontrée, comme par exemple une limite entre deux couches, une partie de leur énergie est réfléchi, l'autre transmise. Le pouvoir réflecteur d'une surface sera d'autant plus grand que ce contraste sera élevé. Les ondes réfléchies sont enregistrées à la surface par un réseau de récepteurs (cf. figure 2A). En déplaçant le dispositif émetteur-récepteurs à pas constant, il est possible d'éclairer un même point géométrique sous des angles différents par une série de couples récepteur-émetteur (cf. figure 2B). Après un premier traitement des enregistrements, une image temps des structures géologiques est extraite (cf. figure 2D). L'axe vertical ne correspond pas à la profondeur des réflecteurs, mais au temps nécessaire à une onde pour effectuer un aller-retour entre la surface topographique et un réflecteur donné.

Pour passer d'une image temps à une image profondeur, il est nécessaire de connaître les vitesses de propagation des ondes sismiques au sein des couches géologiques. Contrairement à la tomographie rayons X, ces vitesses ne sont pas a priori connues. Il faut donc les estimer au mieux à partir des enregistrements en tirant parti de l'éclairage

<sup>1</sup>L'impédance acoustique est égale au produit de la vitesse de propagation des ondes sismiques et de la masse volumique des terrains.

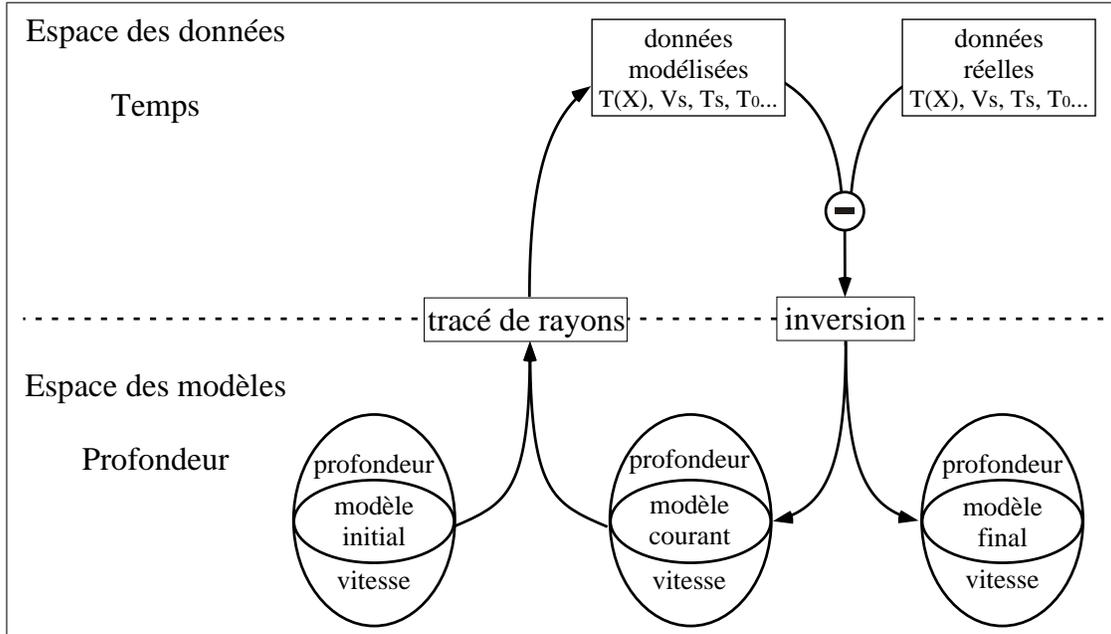


Figure 3: *Tomographie sismique (TomCad).*

multiple des points miroirs : c'est le but de l'inversion tomographique sismique.

Dans la représentation utilisée par CGG, le modèle de vitesse est composé de plusieurs macro-couches. Une macro-couche regroupe des terrains ayant des propriétés pétrophysiques similaires et dans lesquels les ondes sismiques se propagent suivant la même loi de vitesse. Elle est délimitée par deux horizons qui peuvent être recoupés et décalés par une série de failles. Chaque horizon est une surface présentant un fort contraste de vitesse qui ne correspond pas toujours à une limite entre deux couches : une macro-couche n'aura donc pas forcément une réalité géologique.

L'algorithme d'inversion tomographique suit un processus itératif qui débute à partir d'un modèle de vitesse initial. À chaque itération, une sismique synthétique est réalisée par simulation de la propagation des ondes sismiques au sein du modèle courant. Les données ainsi calculées sont ensuite comparées aux enregistrements. Le modèle de vitesse est alors modifié afin de minimiser au mieux les écarts par rapport aux données de terrain. Les corrections effectuées sur le modèle portent à la fois sur la géométrie des interfaces et sur les lois de vitesse attribuées à chaque macro-couche. Le processus s'arrête une fois un critère de convergence atteint (cf. figure 3). Pour plus de renseignements sur le principe des logiciels d'inversion tomographique utilisés par CGG, le lecteur pourra se référer à [Gui93, GMM96] (TomCad) ou encore à [GAB01] (Veltracer).

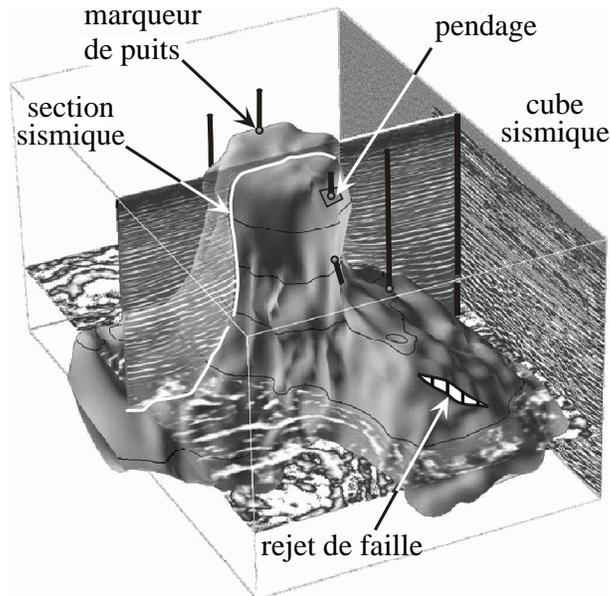


Figure 4: *Modélisation géologique avec le logiciel GOCAD : exemples de données disponibles pour la construction d'un dôme de sel.*

### **La modélisation géologique : l'approche du logiciel GOCAD**

GOCAD est un logiciel de CAO dédié à la modélisation des objets géologiques. Il repose sur une méthode originale appelée "Discrete Smooth Interpolation", notée plus simplement DSI [Mal92]. Cette méthode permet d'interpoler un ensemble de propriétés connues sur les nœuds d'un maillage (une ligne polygonale, une surface triangulée ou encore un volume polyhédrique), moyennant le respect d'un nombre fini de contraintes sur ces propriétés et la minimisation d'un critère de rugosité : le résultat doit être le plus "lisse" possible.

Pour construire un modèle géologique, le géologue utilise tout un ensemble de données de nature et d'origine diverses et pouvant être parfois contradictoires (voir figure 4). Toutes ces données sont exprimées sous forme de contraintes géométriques et topologiques interprétables par le solveur DSI [Ett95, Mal02].

- Les puits fournissent des informations précises sur la position des horizons et des failles. Ces données sont exprimées sous la forme de nœuds de contrôle du modèle : les interfaces du modèle devront passer impérativement par ces points. Il est parfois possible d'estimer l'azimut et le pendage local des horizons et des failles traversés par les puits. Cette donnée pourra être aussi utilisée sous la forme d'une contrainte supplémentaire.
- Les méthodes de pointé automatique permettent d'extraire des nuages de points des cubes sismiques, un nuage de points par réflecteur. L'interprétation des sec-

tions sismiques fournit des informations sous la forme de lignes. Ces données sont relativement peu précises car la résolution de la sismique est limitée : elle est de 20 m dans le meilleur des cas et elle diminue avec la profondeur. À cela s'ajoutent les incertitudes sur le modèle de vitesse qui a servi à la conversion temps/profondeur et les erreurs de pointé lors de l'interprétation : un décalage d'une milliseconde dans une couche où la vitesse de propagation des ondes sismiques est de 3000 m/s conduit à une erreur de 3m. Ces données seront donc respectées au mieux. Un critère de confiance permettra de faire varier l'ajustement des horizons et des failles aux données sismiques. Une surface élastique tirée par un ensemble de ressorts est un bon exemple d'analogie physique de cette contrainte. Chaque point d'ancrage d'un ressort correspond à un point de donnée et la raideur des ressorts au critère de confiance. Plus ce critère sera fort, plus la surface sera attirée par les points.

- Enfin d'autres contraintes pourront être utilisées pour traduire les connaissances géologiques sur la région étudiée et l'interprétation du géologue :
  - Le géologue pourra contraindre une surface à se terminer sur une autre. Cette contrainte permet de maintenir un contact parfait entre le bord d'un horizon et une faille ou encore entre le bord d'une faille secondaire et une faille principale. Une connaissance du contexte tectonique régional sera très utile pour positionner ces contraintes.
  - En raison des incertitudes sur la position des surfaces, deux horizons peuvent s'intersecter ce qui n'est pas cohérent d'un point de vue géologique. Ce problème est corrigé en imposant une distance minimum entre ces deux surfaces.
  - De même, l'épaisseur d'une couche peut être contrôlée si les taux de sédimentation et de compaction sont connus dans la région étudiée.
  - Le rejet d'une faille pourra être fixé.
  - *etc.*

Les horizons et les failles du modèle structural ainsi construit subdivisent le domaine d'étude en volumes appelés régions. Ces régions pourront être ensuite représentées par une grille 3D qui servira de support pour estimer ou simuler par des méthodes géostatistiques les propriétés pétrophysiques caractéristiques des couches. La figure 5 montre un exemple de grille à maille hexaédrique dont la forme épouse celle d'une couche géologique faillée. Les valeurs de perméabilité des terrains, connues au niveau des puits, ont été interpolées sur l'ensemble de la grille. Ces grilles sont aussi utilisées par les logiciels de simulation d'écoulement. Ces outils permettent d'estimer et d'optimiser la quantité de pétrole ou de gaz qui pourra être récupérée et de suivre la vie d'un gisement tout le long de son exploitation.

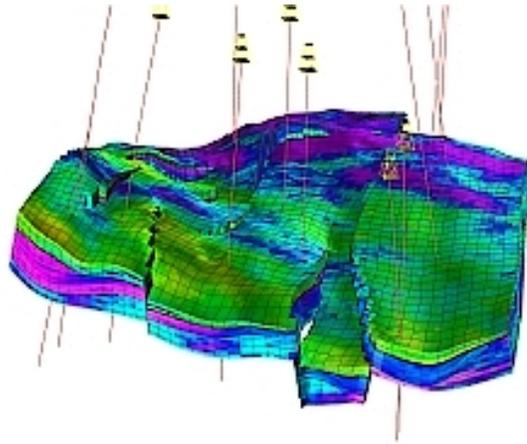


Figure 5: Remplissage d'une couche géologique par une grille à maillage hexaédrique.

GOCAD s'inscrit donc au centre de la chaîne d'opérations qui va du traitement des données sismiques à la production d'un gisement.

## Objectifs de cette thèse

Les modèles géologiques structuraux sont amenés à être modifiés à chaque fois que de nouvelles données sont disponibles et que de nouvelles interprétations sont proposées. Il en est de même pour le modèle de vitesse à chaque itération du processus d'inversion tomographique. Les modifications qui sont apportées à ces modèles doivent obéir à un certain nombre de règles dans le but de préserver leur cohérence. Par exemple, les contacts entre un horizon et une faille ou entre deux failles doivent être maintenus pour éviter toute fuite faisant communiquer deux régions. Les surfaces ne doivent pas s'intersecter sauf au niveau de leurs bords, faute de quoi il n'est pas possible de définir correctement les régions. Une contrainte supplémentaire liée aux besoins de l'inversion tomographique doit être prise en compte. En effet, la déformation du modèle structural doit être réalisée à topologie constante afin de ne pas avoir à le redéfinir à chaque itération. Cela signifie que le nombre et la disposition des macro-couches du modèle doivent rester invariants. Il en est de même pour les surfaces délimitant ces couches.

L'objectif de cette thèse est de proposer deux méthodes pour mettre à jour interactivement ou automatiquement un modèle géologique décrit par un ensemble de surfaces afin de répondre respectivement aux besoins de la modélisation et de l'inversion tomographique.

- La première méthode s'appuie sur une nouvelle base de données qui a été définie dans le but de simplifier les opérations topologiques sur les modèles. Nous nous

concentrerons surtout dans ce mémoire sur la description et l'implantation de cette base de données.

- La deuxième s'inspire des outils de déformation de formes libres<sup>2</sup>, outils couramment utilisés en infographie. C'est une méthode générale qui permet de modifier la géométrie d'un objet moyennant le respect d'un nombre fini de contraintes de déformation, et ce, à topologie constante. La généralité de la méthode autorise la définition et l'utilisation de toute une variété de contraintes pour satisfaire au mieux les besoins des géologues.

## Organisation du mémoire

Ce mémoire sera divisé en quatre chapitres:

- Dans le premier chapitre, nous nous traiterons de la notion de modélisation volumique. Après un aperçu des différentes représentations couramment utilisées pour décrire un objet volumique, nous aborderons les problèmes et les contraintes liés à la construction et à la modification de modèles géologiques décrits par un ensemble de surfaces.
- Le deuxième chapitre sera consacré à la description détaillée des Cartes Généralisées (G-Cartes), notion introduite par Lienhardt [Lie94] et étendue par Lévy [Lev99] sous la forme des Cartes Généralisées Hiérarchiques (H-G-Cartes). Les H-G-Cartes formeront la base de la nouvelle représentation que nous utiliserons dans le chapitre 3 pour décrire les modèles géologiques.
- Dans le troisième chapitre, nous introduirons le concept de Trimmed Triangulated Surface que nous abrègerons par la suite par Trimmed-TSurf. C'est une transcription du principe des "trimmed-surfaces" paramétriques aux surfaces triangulées. Une Trimmed-TSurf est subdivisée en sous-parties virtuelles par un ensemble de courbes fermées appelées Trimming-Lines. Ces lignes sont construites à partir des informations topologiques que la surface partage avec les autres surfaces du modèle comme des lignes de contact et d'intersection. Un modèle géologique décrit à l'aide de Trimmed-TSurfs sera plus facile à maintenir : seuls ces informations topologiques seront à redéfinir après chaque modification du modèle.
- Pour finir, dans le chapitre 4, nous proposerons un outil général pour déformer continûment un modèle géologique tout en préservant ses caractéristiques topologiques. Il s'inspire des techniques de déformation de formes libres. Nous ferons donc d'abord le tour des différentes méthodes utilisées en infographie

---

<sup>2</sup>Free Form Deformation dans la littérature de langue anglaise, abrégé en FFD.

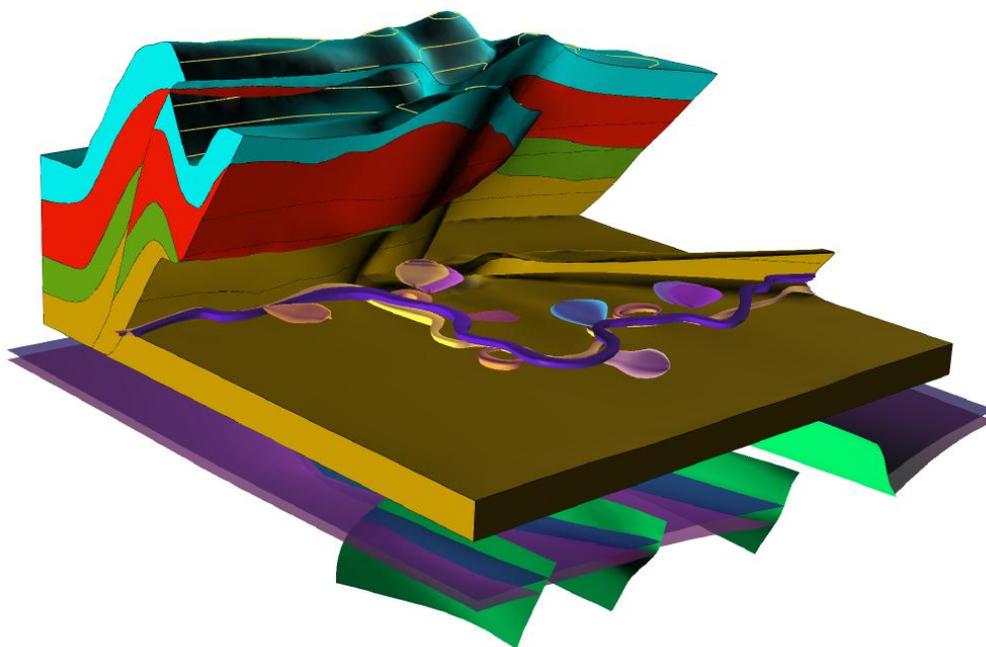
pour identifier celle qui est la mieux adaptée à notre problème. Nous expliquerons ensuite comment contraindre la déformation pour répondre aux besoins du géologue.

Enfin, la conclusion générale présentera le bilan de ces travaux et ouvrira les perspectives de recherche.



# Chapitre 1

## Modélisation volumique



*Modèle SEG Overthrust* (<http://www.seg.org/research/3Dmodel/Overthrust/EtudeOverHtml/home-page.html>)

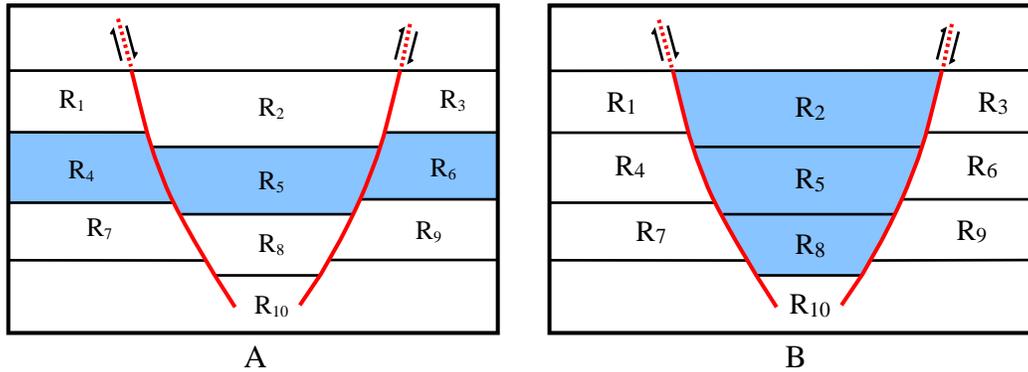


Figure 1.1: Les régions d'un modèle géologique volumique peuvent être regroupées en couches à gauche ou en blocs de failles à droite.

## 1.1 Introduction

Dans le cadre de la modélisation géologique, le sous-sol peut être aussi bien décrit par un ensemble de surfaces correspondant aux limites de couches et aux failles que par les domaines volumiques délimités par ces surfaces. Ces domaines seront appelés par la suite régions. Les régions d'un modèle géologique volumique peuvent être regroupées en deux types de sous-ensembles :

- Une couche géologique (*Layer*) est définie par l'ensemble des régions comprises entre deux horizons donnés. Un horizon pourra être décrit par une surface connexe ou être composé de plusieurs surfaces séparées et décalées par un groupe de failles (cf. figure 1.1A).
- Un bloc de faille (*Fault-Block*) rassemble les régions qui ont pour limites communes un ensemble de failles donné (cf. figure 1.1B).

Dans le contexte de la géologie pétrolière, un modèle surfacique est d'abord construit à partir des données extraites du sous-sol (section et cube sismiques, forages, mesures gravimétriques, relevés de terrains...) et des connaissances du contexte géologique dans la zone étudiée. Un modèle volumique est ensuite assemblé à partir des différentes interfaces du modèle surfacique. Un modèle surfacique est suffisant si les besoins du géologue se limitent par exemple, à la visualisation en 3D des structures géologiques. En revanche, l'utilisation d'un modèle volumique s'avère nécessaire pour certaines applications :

- Une représentation graphique des volumes permet de se faire une idée de la forme et de la disposition des différents corps géologiques (couches, lentilles gréseuses, chenaux...). Plusieurs modes d'affichage pourront être proposés au géologue, en trois dimensions avec la possibilité de visualiser une région sous tous les angles ou encore en deux dimensions au travers de coupes du modèle.

- Le calcul du volume d'une région est utilisé pour connaître par exemple la dimension d'un réservoir pétrolier et estimer la quantité de pétrole qui y est piégée.
- La localisation d'un point dans le modèle est une information utile pour de nombreux algorithmes, comme par exemple le tracé de rayons sismiques. Cet algorithme permet de réaliser une sismique synthétique qui sera comparée avec les données enregistrées sur le terrain et donc de valider ou d'infirmer l'interprétation du géologue. Le calcul de la trajectoire d'un rai sismique nécessite de connaître à tout moment dans quelle région du modèle nous nous trouvons.
- Le modèle volumique sert de support à un modèle des propriétés. À chaque région sont attachées une ou plusieurs propriétés pétrophysiques comme la porosité, la perméabilité, la saturation en huile... Ces propriétés peuvent être décrites par une fonction continue ou être échantillonnées sur une grille.
- Pour répondre aux besoins du point précédent, nous devons être capables de remplir chaque région du modèle par une grille. Ces grilles pourront avoir un maillage structuré à base d'hexaèdres ou non structuré à base de tétraèdres ou de polyèdres quelconques. Leur usage ne sera pas limité à l'estimation de propriétés pétrophysiques. Elles pourront aussi servir comme support de calcul pour les logiciels de simulation d'écoulement.

Pour être exploitable, un modèle volumique doit être correctement défini. Requicha [Req80], Lamboglia [Lam94] et Euler [Eul99] ont défini plusieurs règles pour garantir la validité d'un modèle volumique :

- Les régions ne peuvent se couper qu'au niveau de leurs frontières, les faces qu'au niveau de leur bords et les lignes qu'à leurs extrémités. Enfin, les points d'intersection doivent être topologiquement disjoints (mais géométriquement confondus). C'est la condition de **non-intersection**.
- Les volumes doivent occuper un portion finie dans l'espace, les surfaces avoir une aire finie, les courbes être de longueur finie et les points avoir une position finie dans l'espace. C'est la condition de **finitude**.
- Tout volume doit avoir un intérieur et un extérieur. Les faces d'un volume doivent donc être dédoublées et orientées pour pouvoir faire une distinction entre l'extérieur et l'intérieur. C'est la condition d'**homogénéité**.
- Un modèle doit avoir une forme invariante quelles que soient sa position et son orientation dans l'espace. C'est la condition de **rigidité**. Remarquons que cette condition sera difficilement respectée dans la pratique du fait de la résolution numérique limitée des ordinateurs : une simple translation peut modifier la position relative de certains points et rendre le modèle non valide.

Nous verrons plus loin dans ce chapitre comment construire un modèle géologique volumique cohérent et comment le modifier tout en préservant cette cohérence.

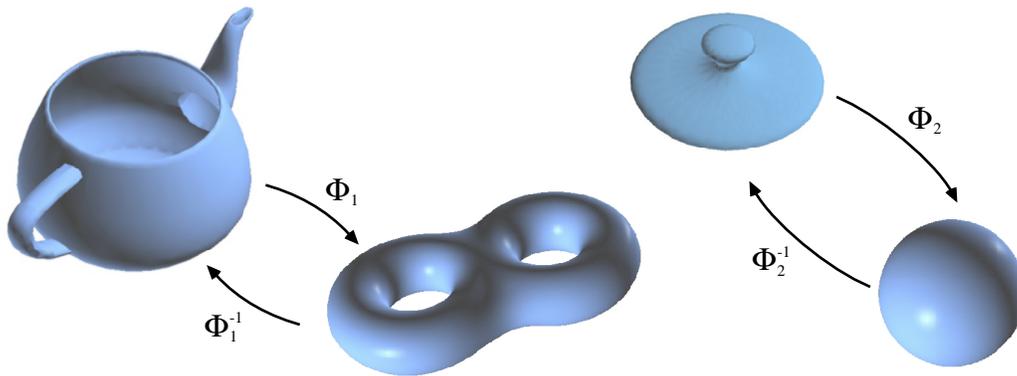


Figure 1.2: Une théière et son couvercle sont respectivement homéomorphes à un tore à deux trous et à une sphère.

## 1.2 Quelques notions préliminaires

Différentes représentations sont utilisées en infographie pour décrire un objet volumique. Avant de les aborder, nous introduisons dans cette section quelques notions utiles relatives à la modélisation.

### 1.2.1 Topologie et plongement

La topologie peut être considérée dans le cadre de notre problème comme la science des objets élastiques. Un des buts de la topologie est l'étude des propriétés caractéristiques d'un objet qui restent invariantes au cours d'une transformation continue. Deux objets  $A$  et  $B$  sont dits topologiquement équivalents ou homéomorphes s'il existe une application  $\Phi$  bijective et continue associant tout point de  $A$  à un point unique de  $B$  et dont l'inverse  $\Phi^{-1}$  est elle-même continue [Ago76]. Par exemple, une théière est homéomorphe à un tore à deux trous (voir figure 1.2). Il est possible de passer de la première à la seconde par simple déformation : les deux trous du tore correspondent à l'anse et au bec de la théière.

Les problèmes rencontrés en modélisation sont en partie traités par une branche de la topologie appelée topologie combinatoire. La topologie combinatoire est consacrée à l'étude de la décomposition d'un objet en primitives et des relations d'adjacence existant entre ces primitives.

La géométrie appelée aussi plongement regroupe toutes les caractéristiques d'un objet liées à sa forme, son orientation et sa position dans l'espace. La notion de plongement peut être étendue à toutes les informations que l'on pourra attacher aux primitives qui composent cet objet.

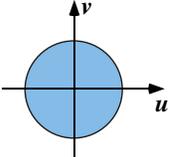
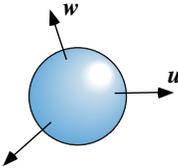
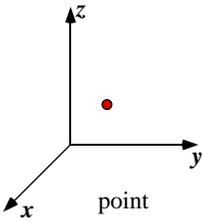
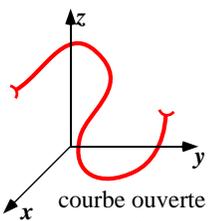
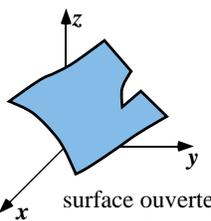
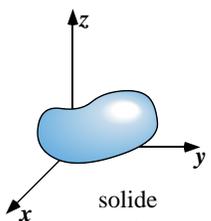
n	0	1	2	3
n-boules ouvertes	 <p>point</p>	 <p>intervalle 1D sans trou sans bord</p>	 <p>disque 2D sans trou sans bord</p>	 <p>boule 3D sans trou sans bord</p>
n-cellules	 <p>point</p>	 <p>courbe ouverte sans trou sans bord</p>	 <p>surface ouverte sans trou sans bord</p>	 <p>solide sans trou sans bord</p>

Figure 1.3: Exemples de cellules plongées dans  $\mathbb{R}^3$ .

### 1.2.2 Notion de Cellules

Un sous-ensemble de points de  $\mathbb{R}^n$  est une  $i$ -cellule avec  $0 \leq i \leq n$  s'il est homéomorphe à une boule ouverte de dimension  $i$ . La figure 1.3 présente des exemples de cellules de dimension 0 à 3 plongées dans  $\mathbb{R}^3$ .

- Une cellule de dimension 0 est un point isolé de  $\mathbb{R}^3$ . Cette cellule sera appelée par la suite *sommet*.
- Une cellule de dimension 1 est une ligne simplement connexe, c'est-à-dire composée d'une seule partie, dont les deux extrémités ont été retirées. Cette cellule sera appelée *arête* ou *bord*.
- Une cellule de dimension 2 est une surface simplement connexe, c'est-à-dire composée d'une seule partie et sans trou et dont le bord, assimilable à une ligne, a été retiré. Cette cellule sera appelée *polygone* ou *facette*.
- Une cellule de dimension 3 est un solide simplement connexe dont le bord, assimilable à une surface, a été retiré. Cette cellule sera appelée *polyèdre* ou *solide*.

La figure 1.4A montre un polygone contenant un trou. Par définition, cet objet n'est pas une cellule. Pour obtenir un tel polygone à partir d'un disque ouvert, il faut créer une déchirure au sein du disque. Cette transformation n'est ni bijective, ni continue : à un point  $x$  du disque situé initialement sur la déchirure correspondent deux points images distincts  $y$  et  $y'$  du bord interne (voir figure 1.4B). Pour représenter un tel polygone par une cellule, il suffit de relier un sommet du bord interne à un sommet du bord externe

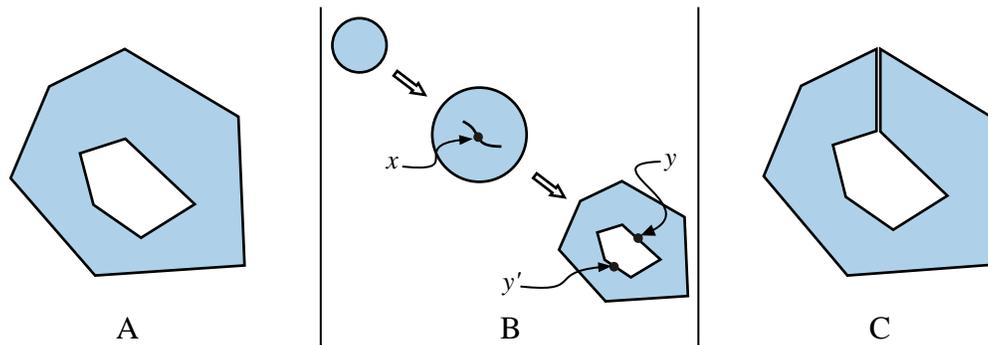


Figure 1.4: Ce polygone avec un trou n'est pas homéomorphe à un disque. Il est cependant représentable par une 2-cellule en joignant le bord interne au bord externe par un segment.

par une arête (cf. figure 1.4C). Nous rencontrerons de telles configurations dans les deux chapitres suivants.

### 1.2.3 Objets variétés, Objets non-variétés

Un objet est dit  $n$ -variété si le voisinage de chacun de ses points est homéomorphe à une boule de dimension  $n$ . Dans le cas contraire, l'objet est dit non-variété. La figure 1.5A montre plusieurs exemples de configurations non-variétés : les zones dessinées en gras correspondent aux points où cette condition n'est pas respectée. Deux surfaces se joignant le long d'une ligne, deux volumes se partageant un sommet sont deux exemples d'objets non-variétés : le voisinage d'un point de cette ligne ou de ce sommet n'est pas homéomorphe respectivement à un disque et à une boule.

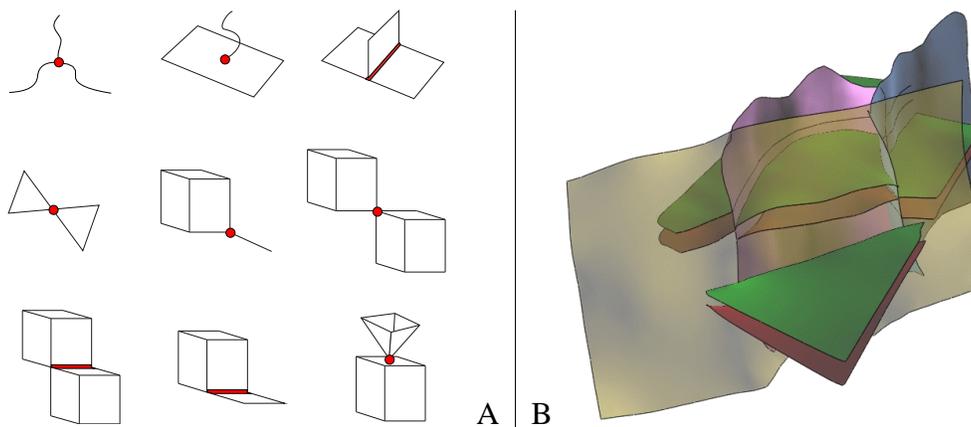


Figure 1.5: Un objet est  $n$ -variété si le voisinage de tout point de cet objet est homéomorphe à une boule de dimension  $n$ . A : collection d'objets non-variétés. Les zones au niveau desquelles ces objets ne sont pas variétés, sont indiquées en gras. B : un modèle géologique faillé est un exemple de configuration non-variété.

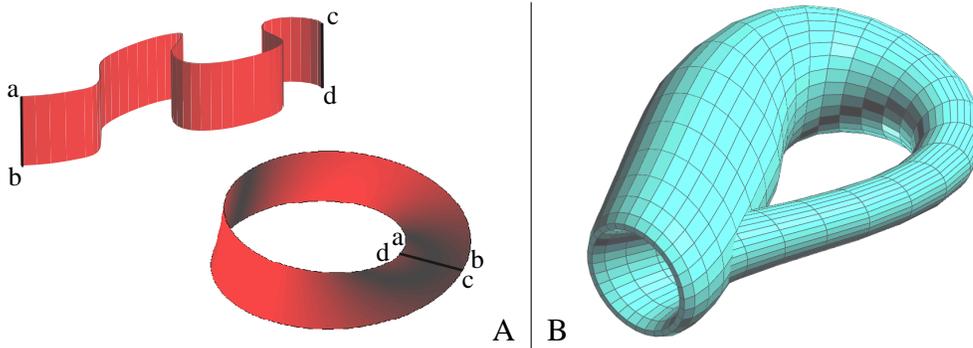


Figure 1.6: Deux surfaces non-orientables, le ruban de Möbius (en A) et la bouteille de Klein (en B). Un ruban de Möbius se construit en assemblant les deux extrémités d'une bandelette de papier après avoir effectué une torsion d'un demi-tour à l'une de ses deux extrémités.

Par exemple, les horizons et les failles d'un modèle géologique structural sont décrits par un ensemble de surfaces qui sont en contact ou qui se recoupent le long de lignes. Un modèle géologique surfacique est un objet non-variété (cf. figure 1.5B). Pour construire un modèle volumique à partir d'un ensemble de surfaces, il sera nécessaire de définir une structure pour décrire sans ambiguïté les configurations non-variétés. Notons au passage que les régions d'un tel modèle sont au contraire des objets 3-variétés.

### 1.2.4 Orientabilité

Un objet de dimension  $n$  est orientable s'il possède deux faces différentes de dimension  $n$ . Cette page, si nous faisons abstraction de son épaisseur, est une surface ouverte orientable car elle a un recto et un verso. De même, une bulle de savon a une face interne et une face externe : c'est une surface fermée orientable. Sur la figure 1.6, sont représentés deux exemples classiques de surfaces non-orientables : le ruban de Möbius à gauche et la bouteille de Klein à droite. Un ruban de Möbius se construit facilement en collant les deux extrémités d'un ruban de papier après avoir fait effectué une rotation d'un demi-tour à l'une de ses deux extrémités. Ce ruban n'a qu'une face et qu'un seul bord : si nous traçons une ligne le long du ruban, nous nous apercevons une fois arrivé au point de départ que ce qui nous semblait être les deux faces du ruban ont été marquées. Cette propriété est parfois utilisée dans le domaine industriel pour augmenter la durée de vie des courroies et des bandes de convoyage : l'usure ne se fait pas sur une seule face comme pour une courroie classique, mais est répartie sur l'ensemble de la surface. La bouteille de Klein, désespoir des vigneron et des ivrognes est une surface fermée qui n'a ni intérieur ni extérieur.

Les surfaces que nous rencontrons dans la vie courante sont généralement orientables. Celles rencontrées en géologie le sont toutes, mais il est tout à fait possible que

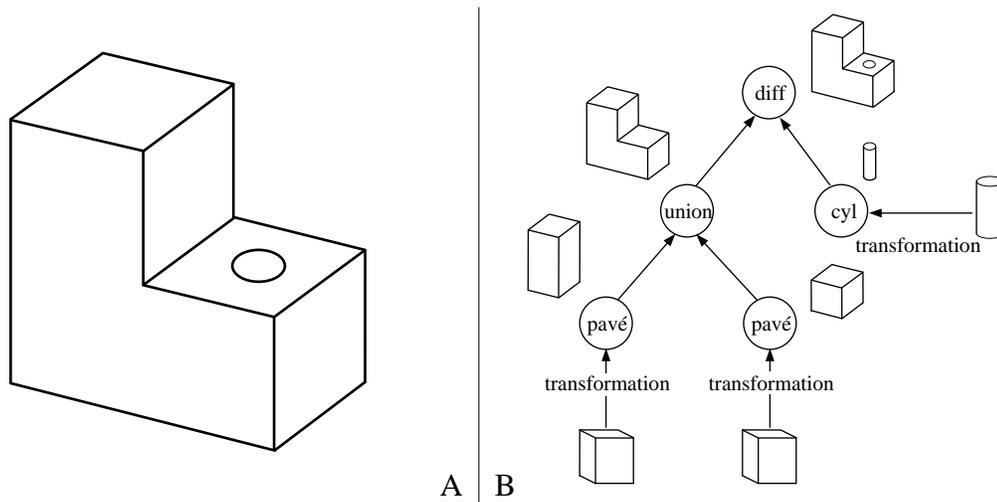


Figure 1.7: Exemple de représentation volumique utilisant l'approche booléenne.

le géologue construisent des surfaces non-orientables à la suite d'une erreur de manipulation. L'analyse de l'orientabilité constituera donc un premier test pour vérifier la validité d'une surface.

### 1.3 Les techniques de modélisation volumique.

Il existe plusieurs représentations pour décrire un modèle volumique. Nous en présentons ici quelques-unes parmi les plus utilisées en infographie.

#### 1.3.1 Représentation booléenne

La représentation booléenne des modèles plus connue sous le nom de "Constructive Solid Geometry" (CSG) [RV80] est basée sur l'observation suivante : la forme de nombreux composants industriels est une combinaison de formes géométriques simples comme des sphères, des cônes, des cylindres ou des parallélépipèdes.

Par exemple, l'objet représenté sur la figure 1.7 peut être produit en collant deux blocs rectangulaires ensemble puis en forant un trou dans le bloc de droite. Dans l'approche booléenne, cet objet se construit en deux opérations successives : premièrement l'union de deux parallélépipèdes rectangles et deuxièmement, la différence de la forme géométrique obtenue avec un cylindre (cf. figure 1.7B). Un objet sera donc défini par un ensemble de primitives géométriques (cubes, cylindres, sphères...) auxquelles est appliquée une suite finie d'opérations géométriques (modification des dimensions, rotation, translation, *etc.*) et booléennes. Les opérateurs booléens utilisés sont au nombre de trois :

- l'union  $A \cup B$  est l'ensemble des points appartenant à  $A$  ou à  $B$  ;

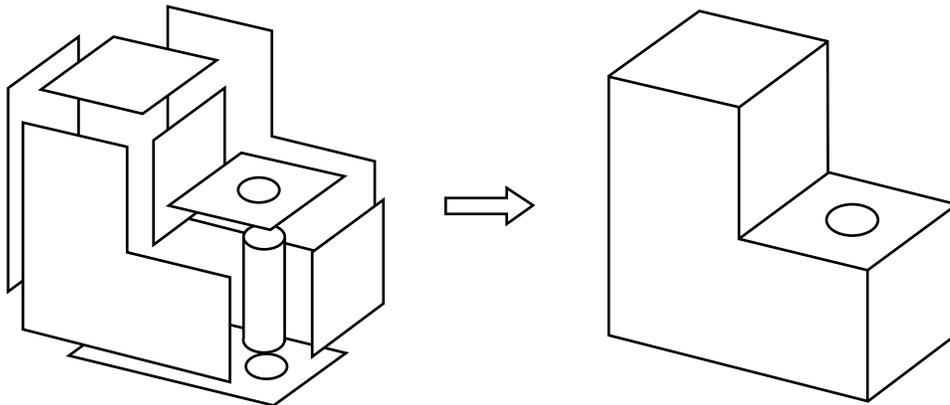


Figure 1.8: Exemple de représentation par frontières d'un volume.

- l'intersection  $A \cap B$  est l'ensemble des points appartenant à  $A$  et à  $B$  ;
- la différence  $B \setminus A$  est l'ensemble des points appartenant à  $B$  mais pas à  $A$  ( $B \setminus A = B - A \cap B$ ).

La structure d'un modèle CSG est maintenue sous la forme d'un arbre dont les feuilles correspondent aux primitives géométriques et les branches aux opérations booléennes et géométriques nécessaires à sa construction (cf. figure 1.7B). Une telle approche offre une interface agréable et intuitive à l'utilisateur. Un objet se construit facilement en intégrant successivement des formes géométriques simples. Cependant, la représentation graphique d'objets construits avec cette méthode est malaisée. Certains modeleurs géométriques ont une interface utilisateur basée sur la représentation CSG pour la construction des objets et une interface graphique basée sur une représentation par frontières.

Une telle structure est mal adaptée à la représentation des objets naturels. Il est en effet difficile de construire une couche géologique de forme quelconque et souvent complexe à partir d'un ensemble de primitives géométriques. De plus, la représentation CSG suppose une connaissance a priori de la forme de l'objet à modéliser, ce qui n'est généralement pas le cas des corps géologiques.

### 1.3.2 Représentation par frontières

Cette représentation est référencée dans la littérature de langue anglaise sous le nom de *Boundary Representation*. Dans cette structure, les volumes sont décrits par leurs frontières, c'est-à-dire par un ensemble de surfaces (cf. figure 1.8). Les arêtes ailées [Bau75] et les demi-arêtes de Weiler [Wei86b] sont deux exemples parmi les plus connus de ces représentations. Dans la structure des arêtes ailées, l'élément de base est

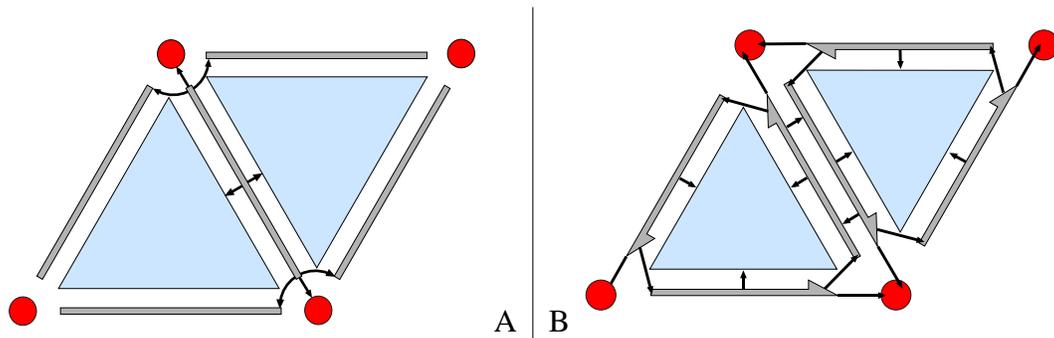


Figure 1.9: (A) : structure de l'arête ailée (Winged-Edge). (B) : structure de la demi-arête (Half-Edge).

l'arête (voir figure 1.9A). Une arête “connaît” les deux faces qui la bordent (d'où son nom d'arête ailée) ainsi que ses deux extrémités. Chaque arête est reliée à quatre de ses voisines, deux pour chacune de ses extrémités. Weiler a amélioré cette structure en dédoublant chaque arête en deux demi-arêtes orientées (voir figure 1.9B). Cette structure constitue le cœur de l'actuel noyau topologique du logiciel GOCAD pour représenter les objets variétés, c'est pourquoi nous allons la décrire un peu plus en détail. Pour plus de renseignements sur ce noyau topologique, le lecteur pourra se référer par exemple à la thèse de Mariez [Mar98].

### Demi-arête

Chaque demi-arête “connaît” son nœud d'origine et sa demi-arête associée. Réciproquement, chaque nœud “connaît” la liste des demi-arêtes qui en partent. Avec cette brique de base, il est possible de représenter facilement des objets variétés simpliciaux :

- Une ligne polygonale est composée de deux demi-lignes orientées issues de l'assemblage de demi-arêtes bout à bout.
- L'ajout de l'élément *Triangle* permet de décrire des surfaces triangulées. Chaque triangle “connaît” les trois demi-arêtes qui le bordent. Inversement, chaque demi-arête pointe (s'il existe) vers le triangle auquel elle est incidente, ainsi que vers sa demi-arête associée.
- Enfin, cette structure peut être étendue aux volumes en introduisant l'élément *Tétraèdre*. Chaque tétraèdre “connaît” les quatre demi-triangles orientés qui le bordent. Réciproquement, chaque demi-triangle pointe vers le tétraèdre auquel il est incident ainsi que son demi-triangle associé, si ce dernier existe.

Cette approche est très intuitive car des sommets, des arêtes, des triangles et des tétraèdres sont manipulés. Malheureusement, de nouveaux éléments topologiques doivent être définis pour passer d'une représentation des objets de dimension  $n$  à une représentation des objets de dimension  $n + 1$ , ce qui rend cette structure peu évolutive.

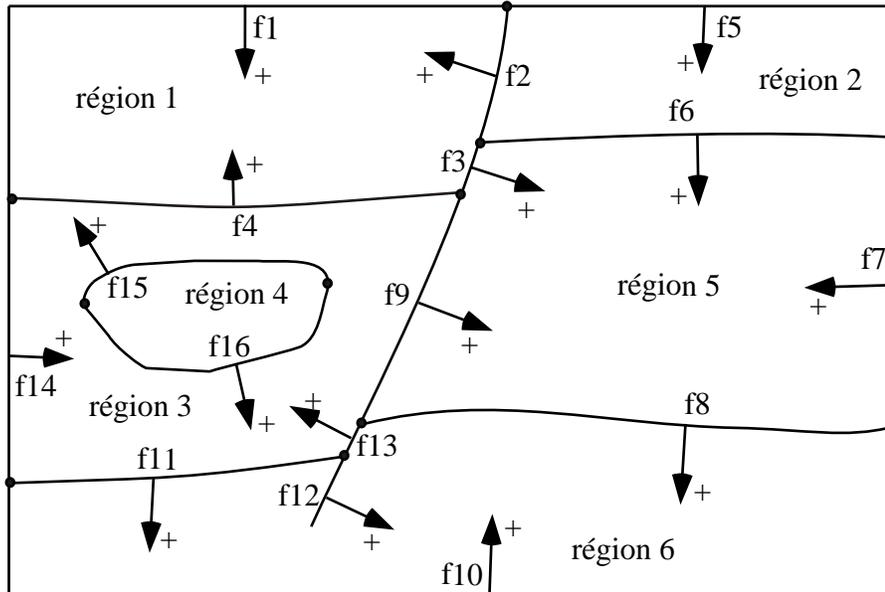


Figure 1.10: Coupe verticale d'un modèle de 3D représenté par ses éléments frontières. La région 3 est délimitée par deux frontières : une frontière externe composée des faces orientées  $\{f_4^-, f_9^-, f_{13}^-, f_{11}^-, f_{14}^+\}$  et une frontière interne composée des faces  $\{f_{15}^+, f_{16}^+\}$ .

### Arête radiale

Grâce à la structure de la demi-arête, nous pouvons représenter les horizons et les failles d'un modèle surfacique par un ensemble de facettes triangulaires. Les surfaces d'un tel modèle ne sont généralement pas variétés. Pour définir les frontières des régions d'un modèle volumique construit à partir d'un ensemble de surfaces jointives, nous devons décrire les différentes configurations non-variétés rencontrées, ce que ne permet pas la structure de la demi-arête. Weiler [Wei85] a introduit la structure de l'arête radiale pour pouvoir définir sans ambiguïté les relations de connectivité entre plusieurs surfaces se partageant un bord en commun. Cette structure est utilisée dans le logiciel GOCAD pour la représentation des modèles volumiques.

Dans cette structure, les régions d'un modèle sont définies par leurs frontières, c'est-à-dire pour un modèle volumique par un ensemble de surfaces jointives. Une région peut être délimitée par plusieurs frontières. Si tel est le cas, elle possède une frontière externe englobant un nombre fini de frontières internes. Une région appelée *Univers* aura un statut particulier. C'est une représentation de l'espace environnant dans lequel le ou les modèles sont plongés. L'*Univers* étant infini par définition, cette région n'aura donc pas de frontière externe, mais plusieurs frontières internes correspondant chacune à la limite externe d'un modèle. Les surfaces sont dédoublées afin de distinguer sans ambiguïté l'intérieur et l'extérieur d'une région. Deux faces

orientées, une positivement et l'autre négativement, sont associées à chacune des surfaces du modèle à condition bien sûr que ces surfaces soient toutes orientables. Par exemple, la région 3 de la figure 1.10 est délimitée par deux frontières : une frontière externe composée des faces orientées  $\{f_4^-, f_9^-, f_{13}^+, f_{11}^-, f_{14}^+\}$  et une frontière interne composée des faces  $\{f_{15}^+, f_{16}^+\}$ . La région  $R_4$  a pour frontière externe l'ensemble des faces  $\{f_{15}^-, f_{16}^-\}$  qui ne peut pas être confondue avec la frontière interne de  $R_3$ . À ce stade, nous sommes capables de décrire sans ambiguïté les différentes régions d'un modèle.

La structure de l'arête radiale complète la définition des modèles avec la description des relations d'adjacence existant entre leurs faces orientées. Dans un modèle donné, une face orientée peut partager géométriquement certains de ses bords avec d'autres surfaces. Pour pouvoir caractériser ces configurations non-variétés sans ambiguïtés, chaque bord est associé à une arête radiale<sup>1</sup>. Chaque arête radiale "connaît" le bord et la face orientée qui lui sont associés et ainsi que deux autres arêtes :

1. une arête radiale associée à une surface différente. Cette relation d'adjacence est figurée par une double flèche sur la figure 1.11. Un bord sera dit libre, s'il est partagé par une seule et unique surface. Par exemple sur la figure 1.10, la faille  $f_{12}$  a un bord libre.
2. l'arête radiale associée à la même surface mais d'orientation opposée. Cette relation d'adjacence est représentée à l'aide d'une simple flèche sur la figure 1.11.

Une fois cette structure correctement définie pour tous les bords, il est facile de parcourir l'ensemble des régions du modèle à l'aide de ces deux relations d'adjacence :

- Une frontière de région est définie par un ensemble de faces orientées adjacentes deux à deux par un bord via une relation de type 1 dans le cas général ou via une relation de type 2 si ce bord est libre.
- La relation de type 2 permet de passer à la région adjacente à une face donnée, à condition que cette face n'ait aucun bord libre. Dans le cas contraire, la même région se trouve de part et d'autre de la surface.

La structure de l'arête radiale est cependant une base de données lourde à gérer : pas moins de 11 éléments topologiques différents sont nécessaires pour décrire un modèle tridimensionnel. En conséquence, les algorithmes de construction et de manipulation de modèles décrits avec cette structure seront souvent complexes et difficiles à maintenir.

---

<sup>1</sup>Une arête radiale et sa face orientée correspondent respectivement à un edge-use et à un face-use dans la terminologie de Weiler

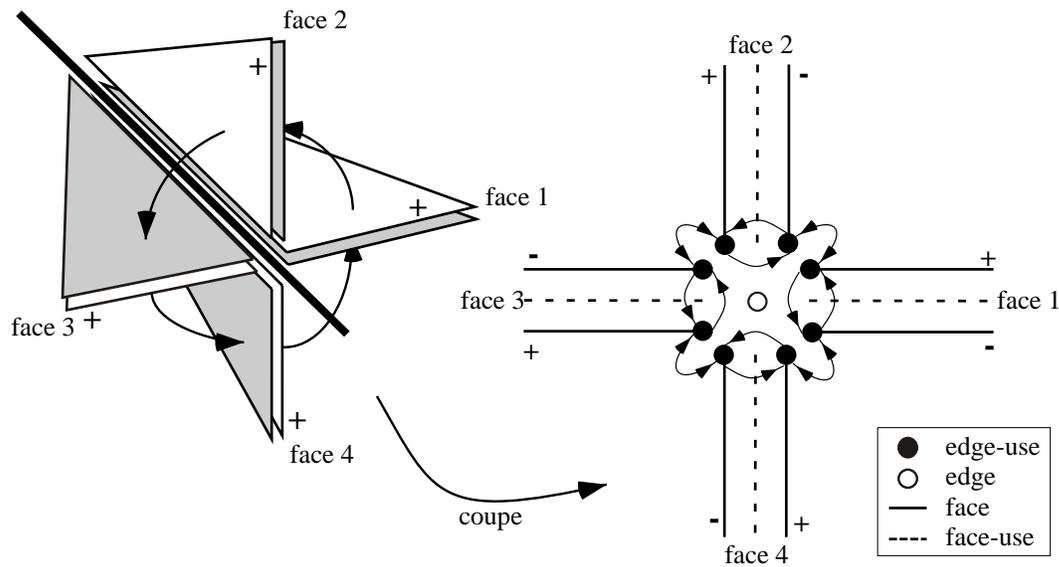


Figure 1.11: La structure de l'arête radiale permet la description de configurations non-variétés où plusieurs surfaces sont en contact le long d'une frontière commune.

Remarque :

La représentation Surface Layer Topology (SLT) utilisée par la CGG pour définir la topologie de ses modèles de vitesse se limite à une simple description des régions par leurs frontières. L'utilisateur définit chaque couche du modèle en énumérant les faces orientées qui la délimitent. Cette représentation s'avère suffisante pour décrire les modèles simplifiés que sont les modèles de vitesse, mais incomplète dès qu'il s'agit de construire et manipuler des modèles plus complexes, comme par exemple des modèles faillés.

### 1.3.3 Représentation cellulaire

Dans cette représentation, les objets sont décomposés en un ensemble fini de cellules de forme quelconque. Les Cell-Tuples [Bri90] et les Cartes Généralisées (G-Cartes) [Lie94] sont deux exemples de ces représentations. L'intérêt majeur de ces deux structures est qu'elles reposent sur un formalisme mathématique bien défini pour décrire les différentes relations associant les cellules d'un même objet. En conséquence, un seul élément topologique associé à un opérateur d'adjacence par dimension est nécessaire pour décrire tout objet variété<sup>2</sup> de dimension  $n$ .

<sup>2</sup>La structure des G-Cartes est plus générale que celle des Cell-Tuples de Brisson. Elle permet en fait de représenter une classe plus vaste d'objets, appelés quasi-variétés cellulaires.

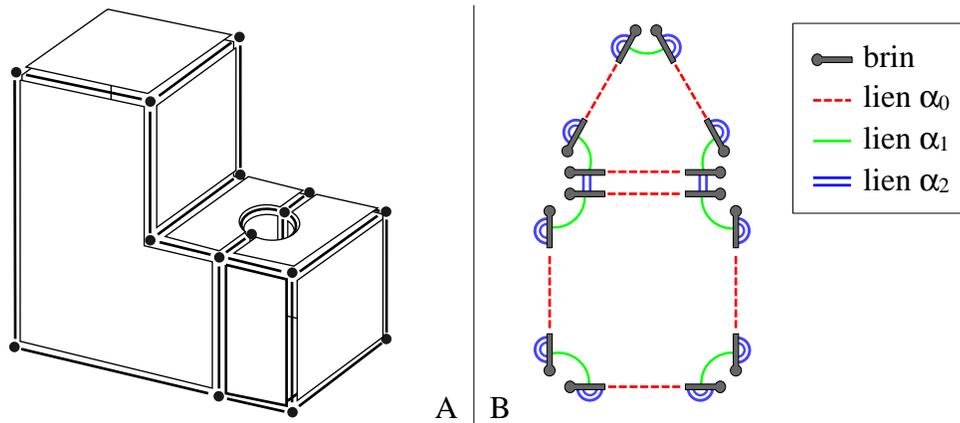


Figure 1.12: A : Exemple de représentation cellulaire d'un volume. B : Description de la décomposition cellulaire d'une surface par une G-Carte.

La figure 1.12B montre une surface composée d'un triangle et d'un carré et décrite avec une G-Carte. Une G-Carte est définie par un ensemble d'éléments topologiques abstraits, appelés brins, représentés sur la figure sous la forme d'une épingle. Les brins sont associés entre eux par des involutions<sup>3</sup>  $\alpha_i$ , en considérant un type d'involution par dimension. La surface de notre exemple est construite à partir d'un ensemble de 14 brins en associant :

- les brins des sommets par des liens  $\alpha_0$  pour former des arêtes ;
- les brins des arêtes par des liens  $\alpha_1$  pour construire les deux polygones ;
- les brins des polygones par des liens  $\alpha_2$  pour les assembler.

De même, des involutions  $\alpha_2$  seraient utilisées pour former des polyèdres à partir de polygones ainsi que des involutions  $\alpha_3$  pour relier ces polyèdres et décrire des volumes. Et ainsi de suite pour représenter des objets de dimension supérieure.

Lévy a étendu les Cartes Généralisées avec la notion de Cartes Généralisées Hiérarchiques pour pouvoir représenter des modèles non-variétés définis par un ensemble de surfaces [Lev99]. Une surface peut être vue comme une cloison séparant deux régions 3-variétés (cf. figure 1.13A). Dans cette représentation, deux niveaux imbriqués de G-Cartes sont utilisés pour décrire une surface ou plus généralement un objet de dimension  $n$  :

- la *Toile* traduit sa décomposition en cellules ;
- le *Cadre* explicite les relations d'adjacence avec les autres objets de même dimension.

<sup>3</sup>Une involution est une fonction  $f$  telle que  $f \circ f = Id$  où  $Id$  est la fonction identité.

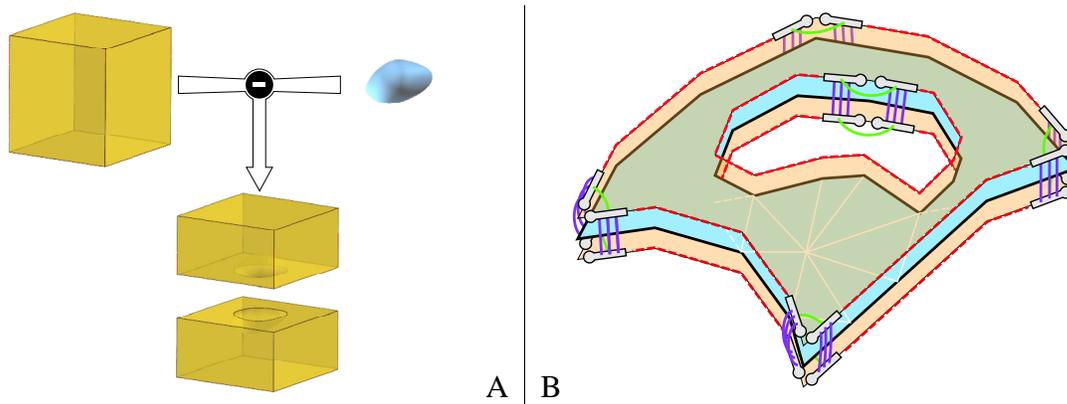


Figure 1.13: *Le Cadre d'une surface est une représentation du domaine volumique dans lequel elle est plongée. Il est composé de deux faces orientées reliées par des involutions  $\alpha_3$ . En cela, les Cartes Généralisées Hiérarchiques se rapprochent de la structure de la Ligne Radiale.*

Le Cadre d'une surface est composé de deux faces orientées soudées par des involutions  $\alpha_3$  (cf. figure 1.13B). En cela, cette structure se rapproche de celle des arêtes radiales où chaque surface est dédoublée. Un modèle se construit en assemblant les Cadres de surfaces adjacentes deux à deux le long d'un bord commun. L'objet ainsi obtenu est constitué de 3-cellules jointives au niveau de leurs faces, c'est-à-dire au niveau des Cadres des surfaces. Chaque région du modèle correspond à une 3-cellule. Un modèle basé sur les H-G-Cartes sera plus facile à maintenir : un seul élément topologique, le brin, est utilisé pour le décrire en comparaison avec les 11 éléments de la structure de l'arête radiale. Nous présenterons plus en détail les G-Cartes et les H-G-Cartes dans le chapitre suivant.

### 1.3.4 Bilan

En géologie pétrolière, les données disponibles sur le sous-sol peuvent être relativement denses. Elles se retrouvent généralement sous la forme de sections sismiques interprétées et/ou de nuages de points extraits de cubes sismiques. Avec toutes ces informations, le géologue peut aisément construire des surfaces et élaborer un modèle structural cohérent. Ce modèle sert ensuite comme base de travail pour définir un modèle volumique. Il est donc logique d'utiliser une représentation par frontières ou basée sur les H-G-Cartes pour le décrire. C'est le choix qui a été fait pour le logiciel GOCAD avec une représentation par frontières basée sur la structure de l'arête radiale et pour le modèleur expérimental basé sur les H-G-Cartes développé par l'équipe de J.L. Mallet. Un avantage non négligeable de la structure des H-G-Cartes sur celle de l'arête radiale réside dans sa simplicité et dans sa généralité. C'est une des raisons qui nous ont fait choisir les H-G-Cartes.

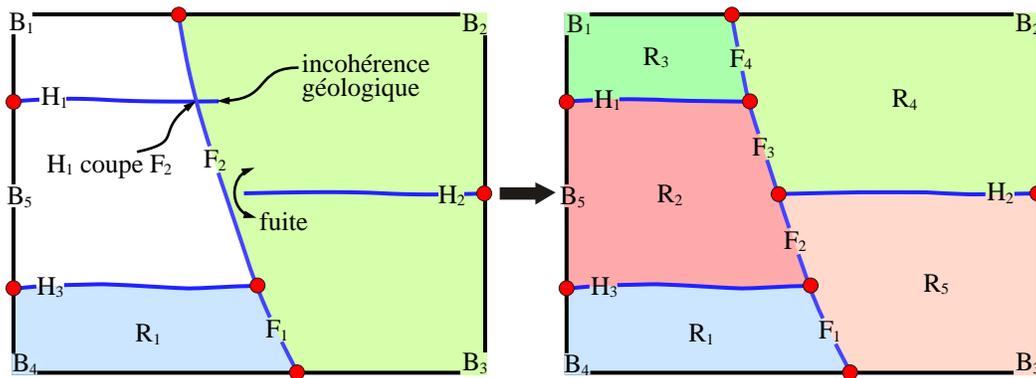


Figure 1.14: La construction d'un modèle cohérent implique le respect d'un certain nombre de règles sur la géométrie et la topologie de ses surfaces. L'horizon  $H_1$  et la faille  $F_2$  s'intersectent ce qui ne permet pas de définir les régions  $R_2$  et  $R_3$ . Le contact entre  $H_2$  et  $F_2$  n'est pas parfait ce qui fait communiquer les régions  $R_4$  et  $R_5$ . Une fois ces problèmes réglés, le modèle peut être construit.

En revanche, quand les informations disponibles sont moins denses (relevés de terrain, forages), d'autres représentations sont envisageables. Par exemple, Nullans [Nul98] et Boissonnat [BN96] utilisent des diagrammes de Voronoï 2D et 3D pour construire respectivement des coupes géologiques ou des modèles 3D. Les régions de leurs modèles sont alors définies par un ensemble de cellules 2D ou 3D.

## 1.4 Construction d'un modèle géologique

Que ce soit dans la structure des arêtes radiales avec la notion de face orientée ou dans celle des H-G-Cartes avec la notion de Cadre, les surfaces d'un modèle jouent le même rôle de cloisons séparant l'espace en régions. Les étapes de construction d'un modèle volumique seront identiques, seule la structure utilisée pour décrire les relations d'adjacence est différente.

### 1.4.1 Préparation des surfaces

Afin de construire un modèle volumique cohérent, l'ensemble des surfaces délimitant les régions de ce modèle doit satisfaire certains critères :

- Les surfaces d'un modèle ne peuvent s'intersecter qu'au niveau de leur bords, leurs bords qu'au niveau de leurs extrémités, extrémités qui doivent être disjointes. C'est la condition de non-intersection de Requicha déjà évoquée au début de ce chapitre.
- Les surfaces doivent être en contact parfait pour éviter toute fuite entre les régions. L'horizon  $H_2$  de la figure 1.14 ne va pas jusqu'à la faille  $F_2$  à la suite

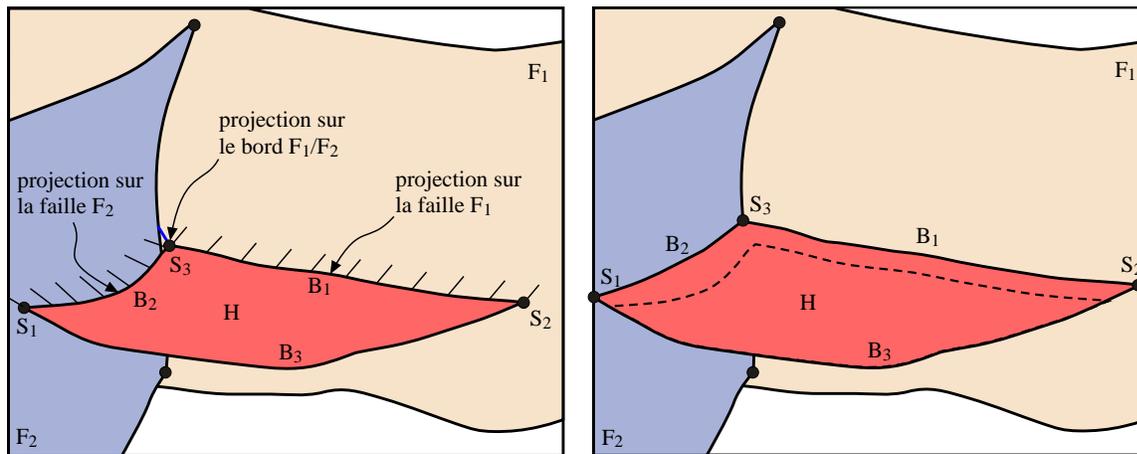


Figure 1.15: L'horizon  $H$  ne se termine pas sur les deux failles  $F_1$  et  $F_2$ . Pour rendre ce modèle cohérent, deux contraintes géométriques sont appliquées sur les bords  $B_1$  et  $B_2$  de cet horizon : ils sont contraints à se déplacer respectivement sur les plans des failles  $F_1$  et  $F_2$ . Le nœud commun à  $B_1$  et  $B_2$  n'est autorisé à se déplacer que sur la ligne de contact entre  $F_1$  et  $F_2$ .

d'un problème de pointé sismique. Un espace fait communiquer les deux régions  $R_4$  et  $R_5$ . En conséquence, une seule région est détectée au lieu de deux.

Quand la première condition est respectée, nous pouvons décrire les frontières d'une région sans ambiguïté par un ensemble de faces orientées. La région  $R_1$  de la figure 1.14 est délimitée par les surfaces  $H_3$ ,  $F_1$  et  $B_4$ . L'horizon  $H_1$  a été pointé au delà de la faille  $F_2$  et la traverse donc de part en part. La condition de non-intersection n'est pas respectée par ces deux surfaces. Nous ne pouvons pas identifier les éléments frontières des régions  $R_2$  et  $R_3$ . Pour rétablir la cohérence du modèle, une solution naïve consiste à découper ces deux surfaces le long de leur ligne d'intersection. Les frontières des régions  $R_2$  et  $R_3$  peuvent alors être décrites par les ensembles de surfaces  $\{H_3, F_2, F_3, H_1, B_5\}$  et  $\{H_1, F_1, B_1\}$  respectivement. Notons au passage qu'une fois les surfaces découpées, il faudra retirer la portion de  $H_1$  qui dépasse de  $F_2$ . Si elle ne pose aucun problème particulier pour l'identification des régions du modèle, elle n'a aucune réalité géologique.

Ce sera aux géologues de définir si une surface doit se terminer ou non sur une autre en fonction du contexte géologique. Leur interprétation pourra être transcrite sous la forme de contraintes géométriques sur les bords des surfaces. Les bords d'une surface peuvent être subdivisés en plusieurs sous-parties, appelées *Bords Logiques* et délimitées chacune par deux sommets particuliers, nommés *Nœud Bornes*. C'est au niveau de ces bords logiques que seront attachées les contraintes.

Considérons un exemple avec le modèle de la figure 1.15 composé de deux failles  $F_1$  et  $F_2$  et d'un horizon  $H$ . Une première analyse a permis de déterminer que la faille

$F_2$  se terminait sur la faille  $F_1$ . L'horizon  $H$  doit être maintenu “plaqué” contre les deux failles pour rendre le modèle cohérent. Trois contraintes géométriques seront utilisées à cet effet :

- son bord  $B_1$  doit être projeté sur la faille  $F_1$  ;
- son bord  $B_2$  doit être projeté sur la faille  $F_2$  ;
- le sommet commun aux deux bords  $B_1$  et  $B_2$  doit être projeté sur la ligne de contact entre  $F_1$  et  $F_2$ .

Ces deux types de contraintes géométriques correspondent respectivement aux contraintes DSI *Bord Contre Surface* et *Nœud Borne Contre Bord* [Ett95, Mal02]. La souplesse d'utilisation de l'interpolateur DSI permet de prendre en compte simultanément un grand nombre de contraintes pour définir au mieux la géométrie des surfaces. Toutes ces contraintes géométriques traduisent des informations d'ordre géologique sur les relations existant entre les différentes surfaces d'un modèle. En conséquence, la construction d'un modèle structural faillé se fait en plusieurs étapes selon l'ordre suivant :

- le réseau de failles est d'abord mis en place ;
- l'analyse du jeu des failles et de leur hiérarchie en connaissance du contexte tectonique régional permet de préciser les contacts faille contre faille ;
- la construction des horizons peut être alors réalisée ;
- enfin, les contacts horizon-faille sont établis.

Duvinage [Duv01] et Lecour [Lec01] ont proposé dans leur thèse des méthodes pour automatiser la construction d'un modèle structural faillé à partir des données extraites des cubes sismiques. Néanmoins, l'intervention du géologue est et restera toujours nécessaire pour corriger les contacts proposés par l'algorithme.

Une simple projection n'est néanmoins pas suffisante pour garantir un contact parfait, les surfaces étant composées de triangles qui ne s'imbriquent pas forcément. De plus, la première condition de non intersection n'est pas respectée. Une étape supplémentaire de découpage des surfaces sera donc nécessaire. Euler propose dans sa thèse [Eul99], deux méthodes pour garantir le respect de ces deux conditions avec les algorithmes de découpage exact et de découpage contraint des surfaces. Dans les deux sections suivantes, nous allons présenter les principes généraux de ces deux méthodes.

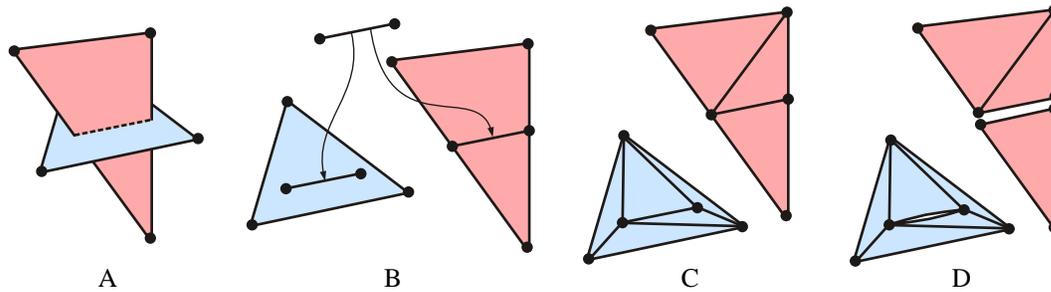


Figure 1.16: *Algorithme de découpage de surfaces. (A) : calcul de l'intersection entre deux surfaces (ici deux triangles). (B) : les lignes d'intersection (ici un segment) sont ensuite insérées dans les deux surfaces qui sont retriangulées en (C). (D) : les surfaces sont enfin découpées le long des lignes.*

### Algorithme de découpage exact

Cet algorithme est utilisé pour découper un ensemble de surfaces  $S_1$  par un ensemble de surfaces coupantes  $S_2$  le long des lignes et des points d'intersection qui auront été éventuellement détectés (cf. figure 1.16). En général, les surfaces de l'ensemble  $S_2$  ne sont pas modifiées à moins d'appartenir aussi à l'ensemble  $S_1$ . Pour construire un modèle cohérent, les surfaces qui le décrivent ne doivent plus s'intersecter après découpage, sauf au niveau de leurs bords. Les deux ensembles  $S_1$  et  $S_2$  devront donc contenir chacun l'intégralité des surfaces du modèle pour ne manquer aucune intersection.

L'algorithme de découpage exact peut être décomposé en six étapes principales que nous allons maintenant détailler :

1. Les intersections sont détectées et calculées lors de la première étape. Pour cela, chaque triangle est pris individuellement et comparé avec les autres triangles. L'intersection entre deux triangles est constituée selon les cas, d'un point, d'un segment ou d'un polygone s'ils sont coplanaires, polygone qui sera décrit par ses frontières, c'est-à-dire un ensemble de segments. L'algorithme ne prend actuellement en compte que les deux derniers cas où l'intersection peut être décrite par un ensemble de segments. Le ou les segments ainsi calculés sont ensuite dupliqués, un segment par triangle générateur.
2. Les segments d'intersection sont ensuite assemblés bout à bout pour construire des lignes. Deux segments peuvent être reliés si deux de leurs sommets partagent la même position géométrique et le même plongement topologique, c'est-à-dire s'ils sont contenus dans le même triangle, dans la même arête ou dans le même sommet. Quand trois segments ou plus se terminent en un même point géométrique, ils ne sont pas assemblés (ce point correspond à la convergence

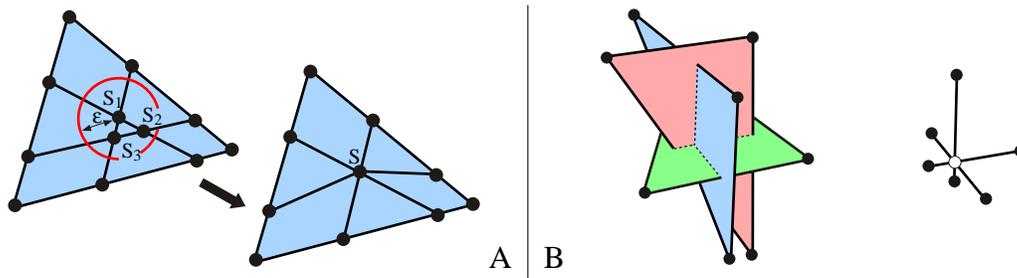


Figure 1.17: (A) : agrégation de sommets proches les uns des autres. (B) : Les segments construits lors de la première étape de l'algorithme de découpage peuvent se recouper. Une étape supplémentaire est nécessaire pour détecter tous les points d'intersection restants (ici un seul point peint en blanc).

d'au moins trois lignes d'intersection). Il y aura donc en ce point autant de sommets confondus que de segments qui s'y rencontrent.

3. L'étape suivante consiste à fusionner les sommets qui sont trop proches les uns des autres pour éviter des problèmes de précision numérique et la création de triangles quasiment plats à l'issue du découpage (cf. figure 1.17A). Une sphère de tolérance est attribuée à chaque sommet pour délimiter son proche voisinage. Suivant son statut topologique, un nœud pourra être libre de bouger ou non. Il sera libre s'il est plongé au sein d'un triangle et fixe s'il est plongé dans un sommet ou une arête ou s'il est lui-même un sommet de triangle. Un nœud  $n_1$  situé dans le voisinage d'un nœud  $n_2$  sera fusionné au nœud  $n_2$  s'il est libre. Dans le cas contraire,  $n_1$ , s'il est libre, sera déplacé à la position de  $n_2$ . Si  $n_1$  et  $n_2$  sont tous les deux fixes ou s'ils appartiennent à deux triangles différents, ils ne seront pas modifiés.
4. Quand trois triangles se coupent comme sur la figure 1.17B, les segments d'intersection qui auront été identifiés se croisent en un point dont il faut maintenant déterminer la position : le calcul des intersections des triangles se faisant en prenant les triangles deux à deux, ce point ne peut être détecté pendant la première étape. La détection des intersections des lignes se fait à l'aide d'une méthode purement géométrique (les informations topologiques de plongement des segments ne sont pas prises en compte) et en utilisant une tolérance : deux segments suffisamment proches pourront être découpés alors qu'ils ne s'intersectent pas.
5. Les sommets et les arêtes de la ligne d'intersection sont ensuite insérés dans les surfaces qui sont retriangulées. Cette étape est réalisée triangle par triangle en utilisant la triangulation contrainte de Delaunay [Che89, Con97, She99].
6. Enfin, le découpage des surfaces est effectué par dédoublement des arêtes et des sommets le long de la ligne d'intersection.

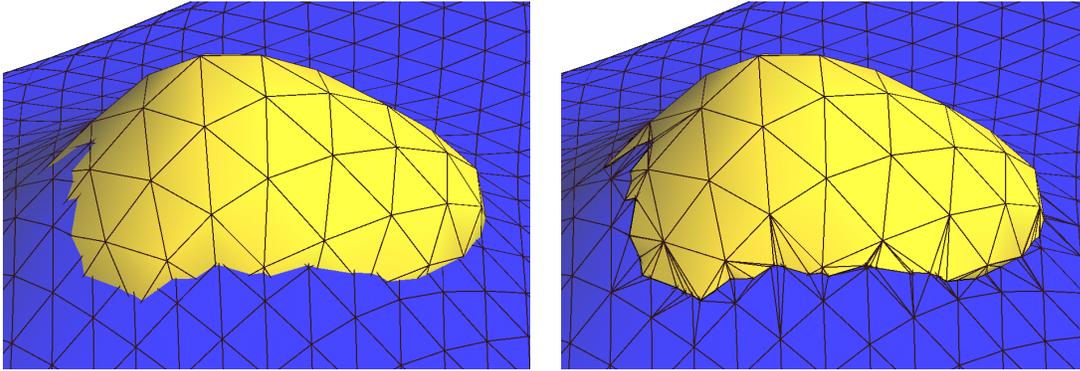


Figure 1.18: *Découpage exact de deux surfaces.*

La figure 1.18 montre un exemple de découpage d'une surface triangulée par une autre, effectué à l'aide de cet algorithme. En nous arrêtant à la troisième étape de l'algorithme, nous pouvons construire les lignes d'intersection entre ces deux surfaces : c'est dans ce but que nous utiliserons cet algorithme dans le chapitre 3.

Les surfaces modélisées en géologie peuvent parfois contenir plusieurs centaines de milliers de triangles. La recherche des intersections se faisant triangle par triangle, la complexité d'un tel algorithme est en  $O(n^2)$ , où  $n$  est égal au nombre de triangles. Le temps imparti à la détection des intersections devient donc très vite prohibitif. Une structure de type arbre octal [Mea82] est donc utilisée pour accélérer les calculs. Le domaine d'étude est subdivisé en 8 régions parallélépipédiques. Le processus de partition de l'espace se répète ensuite pour chaque région et s'arrête au bout d'un certain nombre de subdivisions ou quand chaque région ne contient plus qu'un nombre prédéfini de triangles. Grâce à cette structure, nous pouvons connaître pour un triangle donné la boîte qui le contient et par conséquent les triangles de son proche voisinage. La recherche des intersections se fait alors parmi cet ensemble limité de triangles et non plus sur la totalité. Un arbre octal est aussi utilisé pour l'agrégation des sommets dans l'étape 3 et le calcul des points d'intersection des lignes dans l'étape 4.

Le codage des nombres réels se faisant sur un nombre fini de bits, la précision numérique des ordinateurs est de ce fait limitée. Deux triangles suffisamment proches pourront être déclarés comme s'intersectant alors qu'ils ne le sont pas et inversement. L'utilisation de prédicats géométriques basés sur une arithmétique exacte manipulant des nombres flottants de précision arbitraire [She97, ABD97] permet de réduire considérablement ces problèmes d'imprécision numérique et de garantir une certaine robustesse à cet algorithme. Si la détection des intersections entre triangles se fait de manière robuste, le calcul des segments d'intersection se fait en revanche avec une précision limitée. À cela s'ajoute le fait que la géométrie des lignes d'intersection peut être modifiée dans les étapes 3 et 4. L'insertion de ces lignes dans le maillage des surfaces entraîne alors un changement de la géométrie de ces dernières. De nouvelles

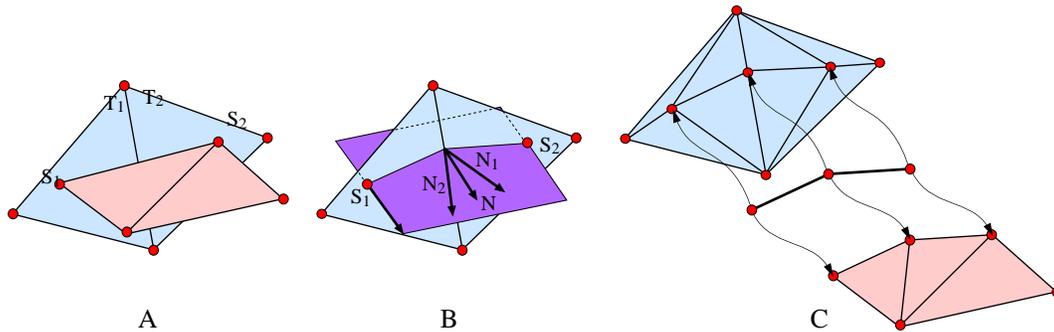


Figure 1.19: *Algorithme de découpage contraint.* La ligne de contact est construite par morceau en “projetant” chaque arête du bord contraint. Pour une arête ( $S_1, S_2$ ) donnée dont les sommets sont respectivement plongés dans les triangles  $T_1$  et  $T_2$  (A), la direction de projection est donnée par le plan passant par les sommets  $S_1$  et  $S_2$  et contenant la normale moyenne aux deux triangles (B). La ligne est ensuite insérée dans la triangulation des deux surfaces (C).

intersections entre triangles peuvent être ainsi engendrées, intersections qui ne seront malheureusement pas détectées. Une approche ensembliste comme celle proposée par Dazy [DLM00] ou par Higashi [HNNH01] permettra à terme d’améliorer l’algorithme de découpage exact en utilisant au maximum les relations topologiques existant entre les triangles.

### Algorithme de découpage contraint [Eul99]

L’utilisation des contraintes *Bord Contre Surface* et *Nœud Borne Contre Bord* permet de coller un bord d’une surface donnée contre une surface cible comme nous l’avons vu sur la figure 1.15. Cependant, la discrétisation des surfaces en triangles n’autorise pas un contact parfait : si chaque sommet du bord de la surface contrainte est plongé dans un triangle de la surface cible, ce n’est pas le cas de ses arêtes. L’algorithme de découpage contraint a pour but d’assurer un contact parfait par retriangulation de la surface contrainte et le respect de la condition de non-intersection par découpage de la surface cible par la surface contrainte. Il utilise pour cela les informations topologiques apportées par les contraintes : chaque sommet du bord de la surface contrainte “connaît” le triangle de la surface cible sur lequel il est projeté. Soient  $S_1$  et  $S_2$ , deux sommets consécutifs de ce bord, plongés respectivement dans les triangles  $T_1$  et  $T_2$  (cf. figure 1.19A).

- Le plan passant par ces deux sommets et contenant la normale moyenne aux deux triangles est tout d’abord construit (cf. figure 1.19B). Ce plan donnera la direction de la projection de l’arête sur la surface cible. Le plan du triangle dont  $S_1$  et  $S_2$  sont deux sommets, peut être aussi utilisé à cet effet, mais les résultats obtenus sont moins bons pour certaines configurations géométriques.

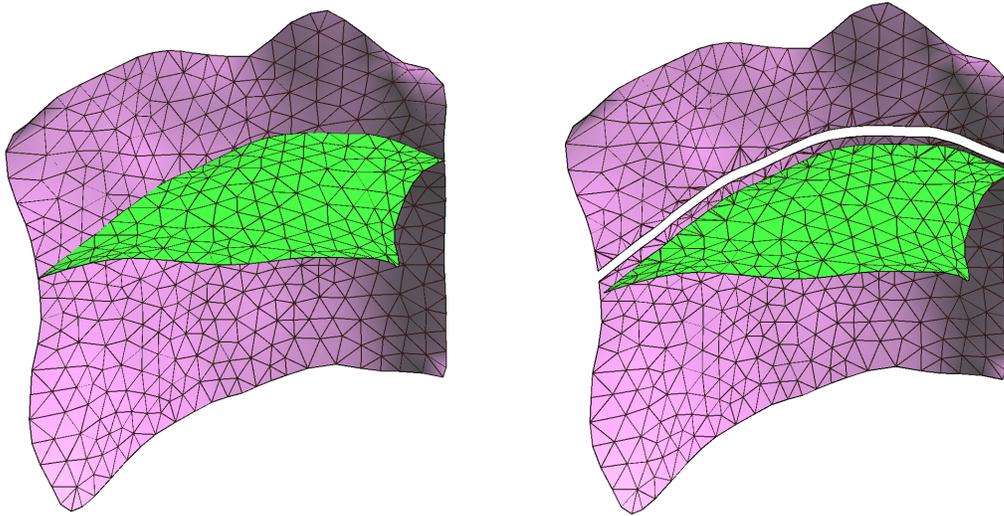


Figure 1.20: *Découpage contraint d'une faille par un horizon.*

- L'intersection de ce plan avec les triangles de la surface cible donne une ligne polygonale qui est ensuite insérée dans la triangulation des deux surfaces (cf. figure 1.19C).
- La surface cible est ensuite découpée le long de la ligne d'intersection ainsi construite de la même manière que dans l'algorithme précédent.

La figure 1.20 illustre le découpage contraint d'une faille par un horizon.

Le découpage des surfaces ne doit pas se faire dans n'importe quel ordre : cette opération modifie la topologie mais aussi la géométrie des surfaces contraintes. Reconsidérons la figure 1.15, page 27. L'intersection de la faille  $F_1$  avec la faille  $F_2$  doit d'abord être réalisée avant d'effectuer celle de l'horizon avec les deux failles. La ligne de contact entre  $F_1$  et  $F_2$  étant parfaitement définie, il est alors possible de prendre en compte l'information topologique relative à la contrainte *Nœud Borne Contre Bord* attachée au sommet  $S_3$  de l'horizon pour construire le point d'intersection entre les trois surfaces. Une analyse poussée de la hiérarchie des failles et des contacts horizon contre faille, horizon contre horizon doit être faite pour déterminer l'ordre de découpage des surfaces.

## 1.4.2 Assemblage des surfaces

Une fois les surfaces du modèle structural correctement définies, leur assemblage doit être maintenant effectué afin de construire le modèle volumique. Pour identifier automatiquement les frontières des différentes régions d'un modèle, les relations d'adjacence entre surfaces doivent être correctement établies. Quand trois surfaces

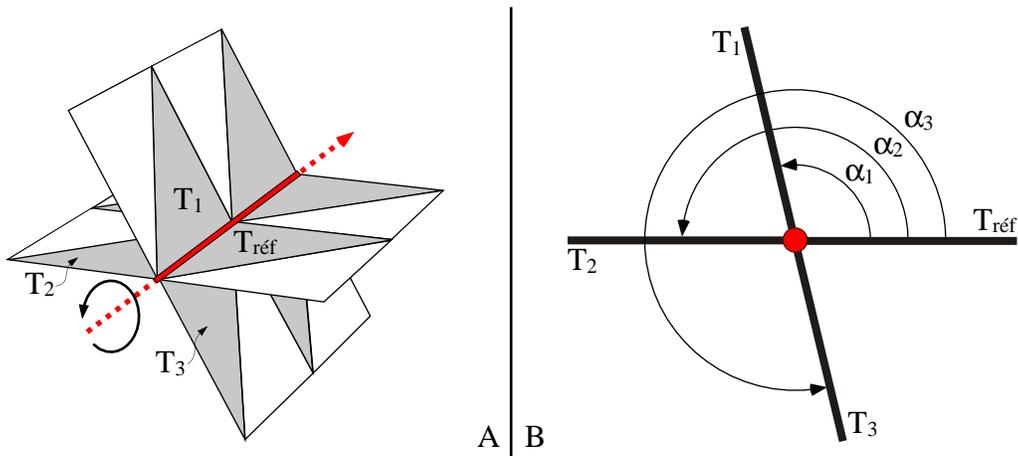


Figure 1.21: Tri géométrique de surfaces partageant un bord en commun. C'est la répartition statistique des triangles ayant une arête en commun dans ce bord (triangles peints en gris) qui sert de critère pour le tri.

ou plus se partagent géométriquement et topologiquement un bord comme sur la figure 1.21A, il est nécessaire de les trier si nous voulons obtenir un modèle cohérent. Ces surfaces sont semblables aux pages d'un livre qu'il faut relier. Si elles sont placées dans le désordre, le texte n'est plus compréhensible. Il nous faut donc définir un critère pour les classer.

Considérons un ensemble de surfaces adjacentes par un bord. Nous pouvons calculer pour un ensemble de triangles se partageant une arête donnée de ce bord, l'angle qu'ils forment par rapport à un triangle de référence (cf. figure 1.21B). Cette opération est répétée pour tous les triangles du bord. C'est la répartition angulaire la plus fréquemment rencontrée qui déterminera le classement des surfaces.

Cette méthode peut être parfois mise à défaut : par exemple, lorsque deux surfaces sont tangentes, les triangles du bord sont quasiment confondus et les angles relatifs quasiment nuls. L'intervention du géologue permettra de corriger d'éventuelles erreurs de tri.

### 1.4.3 Construction des régions

Une fois les relations d'adjacence correctement établies et décrites dans une base de données (les arêtes radiales pour le logiciel GOCAD ou les H-G-Cartes pour notre choix de représentation), les frontières de régions peuvent être identifiées en parcourant cette structure. Une région pourra avoir plusieurs frontières, une frontière externe et une ou plusieurs frontières internes qu'il faudra alors identifier.

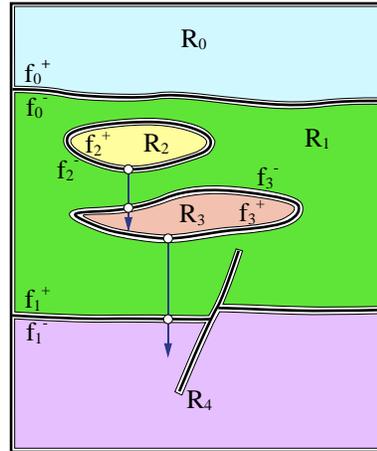


Figure 1.22: Recherche de la région d'appartenance d'une frontière interne.

Dans un premier temps, nous devons déterminer si une frontière est interne ou externe : son volume orienté sera utilisé à cet effet. Il est défini comme la somme des “volumes” des différentes faces orientées qui définissent la frontière. Ces volumes sont calculés en effectuant la somme des aires des triangles pondérées par l’altitude moyenne de leurs sommets et par l’orientation des faces (par -1 si la face est orientée positivement et par 1 si la face est orientée négativement). Une frontière sera interne si son volume est négatif et externe s’il est positif [Lam94]. Pour chaque région externe identifiée, nous pouvons créer une nouvelle région.

Il nous reste maintenant à identifier pour chaque frontière interne, sa région d’appartenance. Considérons le modèle géologique de la figure 1.22 : il possède deux frontières internes formées respectivement des faces orientées  $f_2^-$  et  $f_3^-$ . Ces frontières sont tout d’abord classées par altitude croissante de leur point géométrique le plus bas, soit la frontière contenant  $f_3^-$  puis celle contenant  $f_2^-$ . Un rai vertical descendant est ensuite lancé de chacun de ces points. Les informations attachées à la première surface rencontrée par les rai permettent de déterminer la région d’appartenance des frontières internes :

- Le rai partant de  $f_3^-$  traverse la surface  $f_1^+$  par sa face positive.  $f_1^+$  appartenant à la frontière externe de la région  $R_1$ ,  $f_3^-$  est donc une frontière interne de  $R_1$ .
- le rai partant de  $f_2^-$  traverse la surface  $f_3^+$  par sa face négative.  $f_3^-$  étant une frontière interne de la région  $R_1$ ,  $f_2^-$  est donc comme  $f_3^-$  une frontière interne de  $R_1$ . Inversement, si le rai avait traversé la surface  $f_3^+$  par sa face positive,  $f_2^-$  aurait été identifiée comme une frontière interne de la région  $R_3$ .

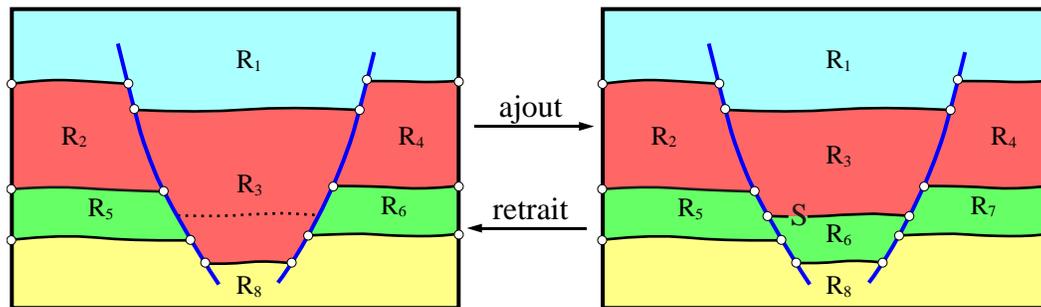


Figure 1.23: *Mise à jour d'un modèle géologique. De gauche à droite : l'ajout de la surface  $S$  divise la région  $R_3$  en deux sous-régions  $R_3$  et  $R_6$ . Le découpage des deux failles par l'horizon  $S$  a été réalisé au préalable (les intersections sont représentées par des ronds blancs). De droite à gauche : le retrait de la surface  $S$  a pour effet de fusionner les deux régions  $R_3$  et  $R_6$  en une seule  $R_3$ . Les cicatrices liées au découpage des deux failles par  $S$  n'étant plus utiles à la définition des régions du modèle, sont ensuite retirées.*

## 1.5 Mise à jour d'un modèle géologique

Un modèle géologique volumique est une représentation du sous-sol qui est amenée à être modifiée plusieurs fois au cours de son existence, au fur et à mesure que de nouvelles données sont intégrées et que de nouvelles interprétations sont proposées.

Trois opérations élémentaires peuvent être effectuées sur un modèle :

- Le retrait d'une surface d'un modèle entraîne la fusion des deux régions situées de part et d'autre de cette surface (cf. figure 1.23 de droite à gauche). Si au moins un bord de cette surface est libre, le nombre de régions restera en revanche inchangé.
- Inversement, quand une surface est ajoutée à un modèle, une ou plusieurs de ses régions pourront être subdivisées en sous-parties (cf. figure 1.23 de gauche à droite).
- La modification géométrique d'une surface peut engendrer de nouvelles intersections qu'il faut détecter et gérer. Inversement, un contact existant entre deux surfaces pourra être rompu. Dans ces deux cas, la topologie et la cohérence du modèle seront affectées.

Toutes ces opérations auront donc dans la plupart des cas un impact sur la topologie du modèle (le nombre et la disposition de ses régions sont modifiés), mais aussi sur celle des surfaces frontières (leur nombre, les contacts qu'elles partagent, leur triangulation sont modifiés).

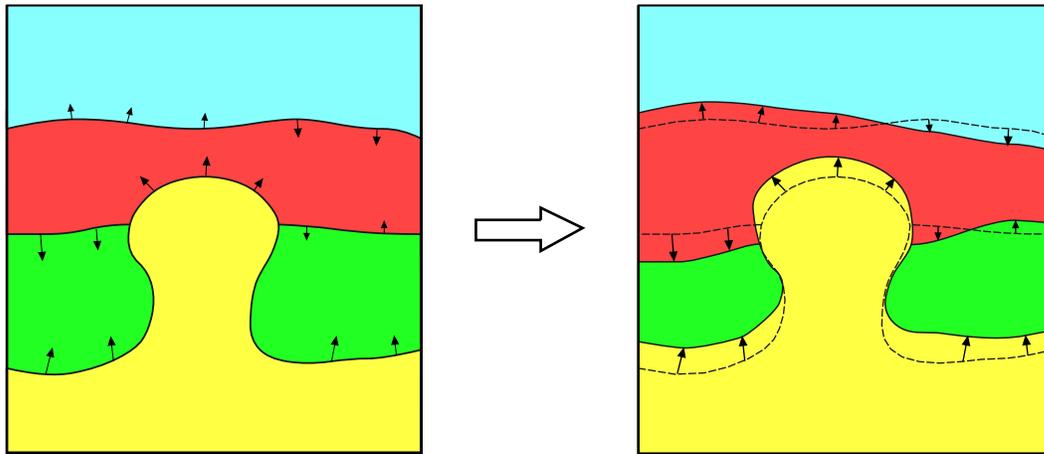


Figure 1.24: *Déformation continue à topologie constante d'un modèle géologique moyennant le respect de vecteurs de perturbation.*

Dans les logiciels d'inversion tomographique de la Compagnie Générale de Géophysique, la géométrie et la topologie des modèles de vitesse sont définies par un modèle volumique décrit par ses frontières. Les horizons et les failles de ce modèle géologique subdivisent le sous-sol en macro-couches auxquelles est attribuée une loi de vitesse de propagation des ondes sismiques. Cette loi est définie par une grille 2D pour décrire les variations latérales de vitesse et par un gradient vertical pour décrire les variations verticales de vitesse liées à la compaction des terrains. À chaque itération du processus d'inversion tomographique, le modèle de vitesse doit être mis à jour :

- la loi de vitesse associée à chaque macro-couche est redéfinie ;
- la géométrie des interfaces du modèle géologique est modifiée.

Le modèle géologique comme les lois de vitesse sont des modèles discrets : les limites de couche sont décrites par des surfaces triangulées et les vitesses sont échantillonnées sur une grille 2D. Si la mise à jour des lois de vitesse est facile, celle du modèle géologique l'est moins. À chaque itération, des vecteurs de perturbation sont calculés en certains nœuds des surfaces, généralement des horizons, pour définir leur nouvelle position. La mise à jour du modèle géologique consiste à le déformer afin de respecter au mieux ces vecteurs de perturbation (cf. figure 1.24). Cette déformation devra se faire à topologie constante de manière à ne pas avoir à redéfinir le modèle de vitesse après chaque itération. Les contacts surfaces contre surfaces devront donc être maintenus et les surfaces ne pas s'intersecter<sup>4</sup> après déformation.

<sup>4</sup> hormis au niveau de leur bords

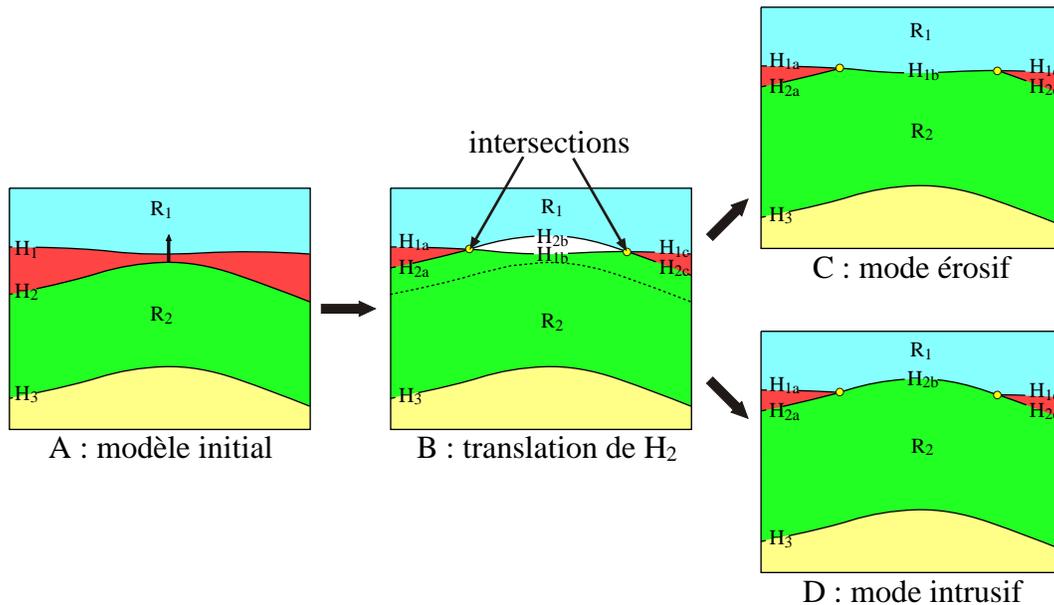


Figure 1.25: (A) : la modification d'un horizon peut engendrer de nouvelles intersections et donc affecter la topologie du modèle. (B) : l'horizon  $H_2$ , après translation, intersecte l'horizon  $H_1$ . Une nouvelle région, peinte en blanc est détectée. Elle peut être fusionnée avec la région  $R_1$  en supprimant l'horizon  $H_{2b}$  pour simuler le comportement érosif de  $H_1$  (C) ou avec la région  $R_2$  en supprimant l'horizon  $H_{1b}$  pour simuler le caractère intrusif de  $H_2$  (D).

Dans les deux sections suivantes, nous allons identifier les contraintes liées à la mise à jour de modèles géologiques. Ce problème sera traité différemment si nous acceptons ou non de modifier la topologie de ces modèles.

### 1.5.1 Mise à jour d'un modèle avec modification de la topologie

La modification d'un modèle 3D géologique décrit par ses frontières soulève plusieurs problèmes que nous allons aborder à l'aide de deux exemples.

Comme nous l'avons évoqué dans la section précédente, la modification d'une surface peut générer de nouvelles intersections. L'exemple de la figure 1.25 montre un modèle vu en coupe composé de trois horizons  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  délimitant quatre couches. Déplaçons l'horizon  $H_2$  vers le haut. Celui-ci recoupe maintenant l'horizon  $H_1$  en deux endroits. Afin de respecter la condition de non-intersection de Requicha, les surfaces du modèle doivent être redécoupées :  $H_1$  et  $H_2$  sont subdivisés chacun en trois sous-parties, respectivement  $H_{1a}$ ,  $H_{1b}$ ,  $H_{1c}$  et  $H_{2a}$ ,  $H_{2b}$ ,  $H_{2c}$ . À l'issue du découpage, une nouvelle région correspondant à la zone où  $H_2$  passe par dessus de  $H_1$ , est détectée (cf. figure 1.25B). Pour rétablir la cohérence du modèle, cette région doit être fusionnée avec les régions préexistantes du modèle,  $R_1$  (cf. figure 1.25C) ou

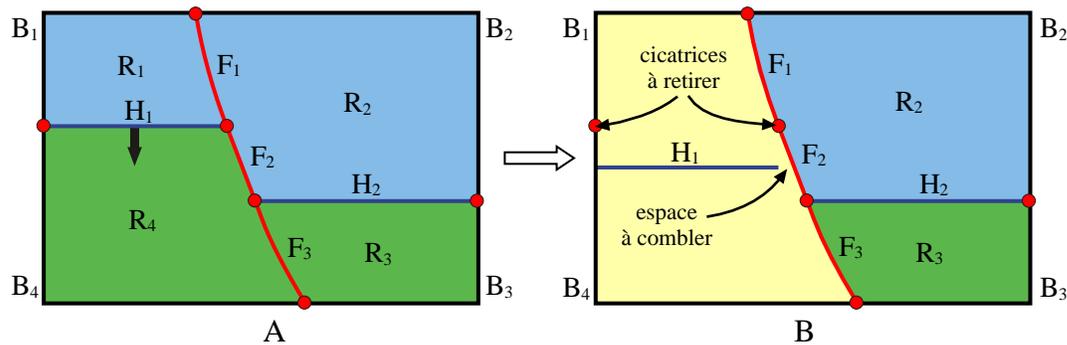


Figure 1.26: Mise à jour d'un modèle géologique après translation d'un horizon.

$R_2$  (cf. figure 1.25D) par suppression d'une de ses surfaces frontières respectivement  $H_{2b}$  et  $H_{1b}$ . Suivant l'option choisie, le style de la discordance sera très différent. Toutes ces opérations peuvent être partiellement automatisées en attachant à chacune des surfaces des informations relatives à leur disposition et à leur nature :

- $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  sont tous les trois des horizons : ce sont des surfaces qui séparent deux couches d'âge différent.
- En supposant, que la série est conforme,  $H_1$  est plus récent que  $H_2$ , lui-même moins âgé que  $H_3$ . Cette information permet de détecter la région  $R$  comme incohérente : sa surface frontière  $H_{2b}$  est au-dessus de la surface  $H_{1b}$  d'un âge moins élevé.
- Dans la figure 1.25C, l'horizon  $H_1$  est considéré comme une surface d'érosion érodant les terrains sous-jacents : la région  $R$  doit être agrégée à la région  $R_1$ . Inversement, dans la figure 1.25D, l'horizon  $H_2$  est vu comme la frontière d'un corps intrusif : la région  $R$  doit être fusionnée avec la région  $R_2$ . Le caractère érosif ou intrusif d'un horizon ne correspond pas forcément à une réalité géologique mais plutôt comme une information sur l'opération topologique à appliquer en cas d'intersection.

L'intervention du géologue reste toujours nécessaire pour contrôler la validité du résultat ou pour lever une indétermination. Ce problème de gestion des régions est aussi rencontré lors de la phase de construction quand deux surfaces sont tangentes. Dans la zone de tangence, leurs triangles sont très proches les uns des autres et de nombreuses intersections peuvent être alors détectées. C'est autant de petites régions parasites qu'il faut supprimer avec cette méthode.

La modification d'une surface peut aussi affecter les contacts bord contre bord qu'elle partage avec les autres surfaces du modèle. Considérons l'exemple de la figure 1.26A : il représente un modèle géologique simple vu en coupe, composé d'une

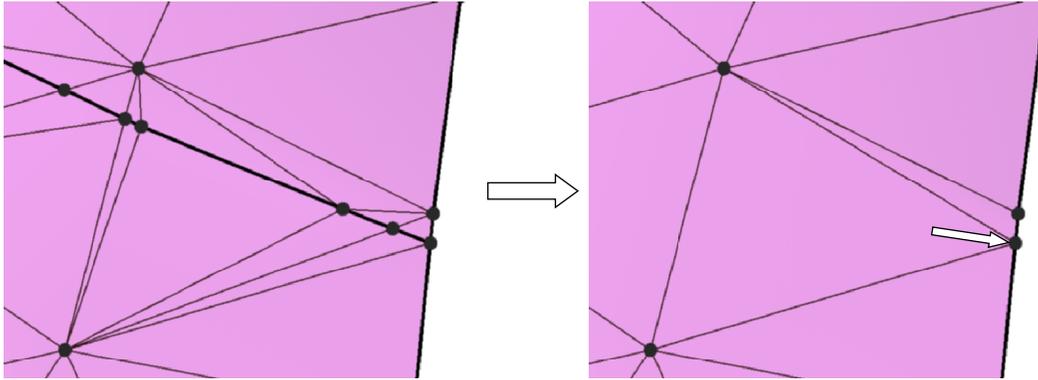


Figure 1.27: *Algorithme de retrait de cicatrices. Le sommet situé à l'extrémité (le sommet désigné par la flèche) est conservé car il peut correspondre à un point d'intersection faisant intervenir d'autres surfaces que celles concernées par l'algorithme de retrait de cicatrices.*

faille recoupant et décalant un horizon en deux parties,  $H_1$  à gauche et  $H_2$  à droite. La faille et la boîte englobante ont été respectivement subdivisées en trois et quatre sous-surfaces  $F_1, F_2, F_3$  et  $B_1, B_2, B_3$  et  $B_4$ , afin de respecter la condition de non-intersection. Réalisons maintenant une translation de l'horizon  $H_1$  vers le bas (voir figure 1.26B). Les contacts géométriques et topologiques de  $H_1$  avec les surfaces  $B_1, B_4, F_1$  et  $F_2$ , ne sont plus assurés. Une fuite fait communiquer la région  $R_1$  avec la région  $R_4$  : une seule région est détectée au lieu de deux. L'horizon  $H_1$  coupe aussi la boîte englobante  $B_4$  : la condition de non-intersection n'est plus validée. Enfin, les "cicatrices" générées lors du découpage de la boîte englobante et de la faille par l'horizon  $H_1$  ne sont plus utiles à la définition des régions du modèle.

Euler [Eul99] propose une méthode pour rétablir la cohérence d'un modèle qui peut se résumer par les étapes suivantes :

- L'horizon  $H_1$  est d'abord détaché du modèle. Les surfaces intersectant  $H_1$  ont été construites à l'aide d'une opération de découpage pour définir les lignes d'intersection. Le retrait de  $H_1$  demande à reconstruire l'état initial existant avant le découpage.
- Les cicatrices sont donc éliminées. L'algorithme de retrait de cicatrices permet d'obtenir un maillage quasiment identique à la triangulation originale. Il se décompose en trois étapes :
  - La première consiste à identifier les arêtes du bord à supprimer pouvant être appariées. Pour chaque arête de ce bord, est recherché l'ensemble des arêtes qui lui sont identiques d'un point de vue géométrique. Cet ensemble pourra contenir plus de deux arêtes qui devront être alors triées. Chacune de ces arêtes appartient à un triangle donné. Deux arêtes pourront être

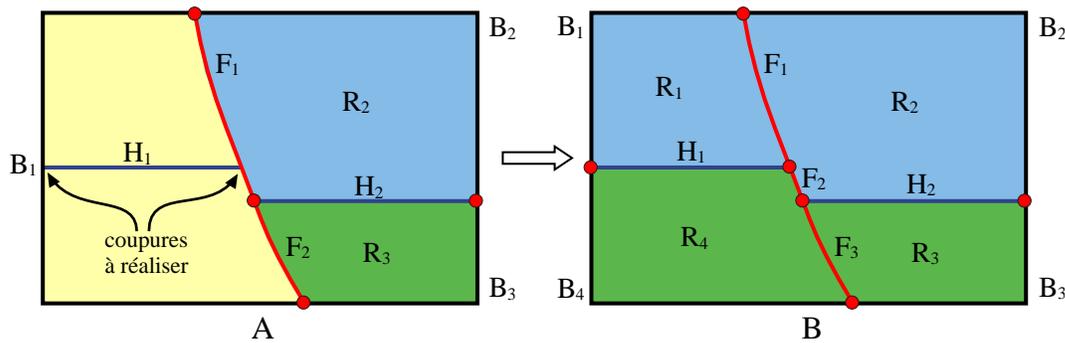


Figure 1.28: Mise à jour d'un modèle géologique après translation d'un horizon (suite).

soudées si et seulement si leurs triangles respectifs sont coplanaires à une tolérance près.

- Une fois les couples d'arêtes identifiés, ceux-ci peuvent être soudés.
- Il ne reste plus alors qu'à éliminer la trace de la ligne d'intersection sur chacune des surfaces pour rétablir un maillage proche de l'original. Cette étape consiste à éliminer des nœuds le long de la ligne de scission. Le critère choisi pour la suppression d'un nœud est purement topologique, il est donné par le nombre de ses voisins : les nœuds qui ont été rajoutés lors de l'opération de découpage n'ont, après suture des surfaces, que 4, 5 ou 6 voisins. Seuls les nœuds situés aux deux extrémités de la ligne de suture sont préservés. Ces nœuds peuvent correspondre à des points d'intersection faisant intervenir des surfaces autres que celles concernées par le retrait de cicatrices et ne doivent donc pas être supprimés (cf. figure 1.27).
- Une fois les cicatrices retirées, nous pouvons maintenant rétablir un contact parfait entre les différentes surfaces du modèle. Cette étape utilise les contraintes géométriques *Bord Contre Surface* et *Nœud Borne contre Bord* associant les bords de  $H_1$  avec la faille et la boîte englobante. Les surfaces sont ensuite coupées à l'aide de l'algorithme de découpage contraint (cf. figure 1.28A).
- Il faut s'assurer que la modification de l'horizon  $H_1$  n'entraîne pas de nouvelles intersections et les traiter le cas échéant.
- L'horizon  $H_1$  est enfin réintégré dans le modèle qui peut être alors reconstruit (cf. figure 1.28B).

L'utilisation combinée des outils de découpage exact ou contraint, des outils de retrait de cicatrices et des contraintes géométriques et géologiques permet de construire et de remanier pas à pas des modèles géologiques décrits par leurs frontières. Nous avons montré et illustré par l'exemple de la figure 1.25 comment rétablir la

cohérence d'un modèle géologique quand de nouvelles intersections sont détectées après une modification. Après découpage des interfaces, les surfaces incohérentes sont supprimées. Le retour à l'état initial avant modification suppose de reconstruire les portions de surfaces qui ont été détruites :

- Si cette **destruction est effective**, des algorithmes comme la triangulation contrainte de Delaunay peuvent être utilisés pour combler les trous d'une surface donnée. Les éléments de maillage ainsi reconstruits sont ensuite ressoudés à l'aide de l'algorithme de retrait de cicatrices.
- Si cette **destruction est virtuelle**, les surfaces incohérentes étant simplement détachées du modèle et conservées en mémoire, l'algorithme de retrait de cicatrices est alors suffisant pour reconstruire une surface proche de l'originale. Cette option a été choisie dans le logiciel GOCAD pour gérer les cas de surfaces tangentes. Dans la zone où plusieurs surfaces sont tangentes, une seule surface est nécessaire pour la définition des frontières de régions. Seule une des surfaces correspondant à cette zone est utilisée, les autres étant retirées virtuellement du modèle.

Toutes ces opérations entraînent une retriangulation intensive des surfaces formant les modèles. Ces modifications effectuées sur la topologie des interfaces peuvent avoir des conséquences ultérieures, comme par exemple :

- Lorsque des informations sont stockées sur les sommets, les arêtes ou les triangles des surfaces, l'ajout, la destruction ou la modification des éléments du maillage entraîne l'altération de ces informations.
- Dans le logiciel de tomographie sismique proposé par la CGG, la géométrie du modèle de vitesse est contrôlée par un nombre fini de sommets pour lesquels sont calculés leur nouvelle position à chaque itération du processus d'inversion (cf. figure 1.24). Ces sommets constituent autant de paramètres de contrôle du modèle qu'il faut préserver. Le calcul de leur déplacement et de sa propagation à l'ensemble des sommets des interfaces utilisent des informations relatives à la connectivité des nœud du maillage. Une modification de la triangulation implique une mise à jour de ces informations à chaque itération, ce qui est coûteux en temps.

Pour pallier ces inconvénients, nous proposons de subdiviser ces surfaces en sous-domaines ayant pour frontières les lignes d'intersection et de contact, au lieu de les découper (voir figure 1.29). De telles surfaces, comme les "trimmed-surfaces" [Far87, Cas87], sont déjà utilisées dans le domaine de l'infographie. Les "trimmed-surfaces" sont des surfaces paramétriques dont certaines parties, délimitées par des lignes, sont masquées. Nous voulons étendre ce concept aux surfaces triangulées dans le but de faciliter la mise à jour des modèles : la triangulation des interfaces reste inchangée, seules les limites des domaines sont à redéfinir à chaque modification.

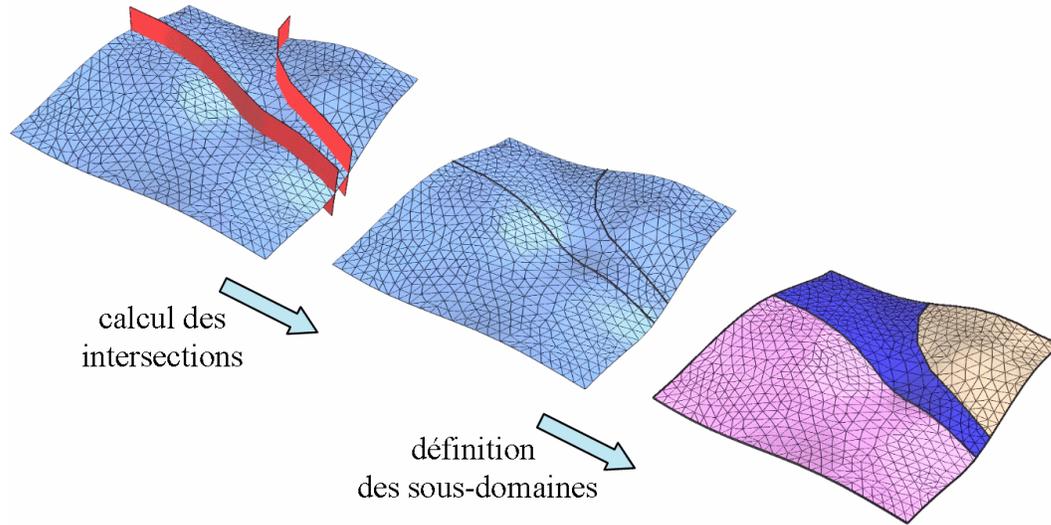


Figure 1.29: *Subdivision d'une surface en sous-domaines délimités par les lignes d'intersection.*

### 1.5.2 Mise à jour d'un modèle à topologie constante

Les contraintes de l'inversion tomographique sismique nous font privilégier une mise à jour des modèles avec préservation de leur topologie. Plus généralement, nous voulons définir une méthode pour déformer continûment un modèle géologique moyennant le respect de contraintes de déplacement connues en certains points du modèle. Nous pouvons formuler le problème de la manière suivante : soient  $M$  un modèle volumique et  $M'$  le même modèle après déformation. Cette déformation est décrite par une fonction continue  $D$  qui associe à tout point  $\mathbf{x}$  de  $M$ , un point  $\mathbf{x}'$  de  $M'$  :

$$\begin{aligned} D : M &\Longrightarrow M' \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{x}' = D(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Un vecteur de déplacement  $V_i$  est connu en un nombre fini  $n$  de points  $\mathbf{x}_i$  ( $i \in [1; n]$ ) de  $M$ , définissant ainsi leur nouvelle position  $\mathbf{x}'_i$ . La fonction de déformation  $D$  doit donc respecter les  $n$  contraintes suivantes :

$$\forall i \in [1; n], \quad \mathbf{x}'_i = D(\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_i + \mathbf{V}_i$$

Pour éviter les changements de topologie, il faut que chaque élément de volume garde un signe constant lors de la déformation. En d'autres termes, il faut que le déterminant Jacobien  $J(\mathbf{x})$  défini ci-dessous garde un signe constant pour tout point  $\mathbf{x}$  appartenant au domaine d'étude :

$$J(\mathbf{x}) = \det \left( \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial x} \\ \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial y} \\ \frac{\partial x'}{\partial z} & \frac{\partial y'}{\partial z} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{vmatrix} \text{ avec } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Enfin, d'autres contraintes peuvent être introduites pour mieux définir la fonction de déformation :

- le pendage des horizons pourra être précisé en certains points ;
- la déformation des couches du modèle pourra se faire à volume constant ;

Les outils de déformation de formes libres (Free Form Deformation ou FFD) sont couramment utilisés en infographie pour manipuler des objets soit indirectement par l'intermédiaire d'un maillage de contrôle, soit directement moyennant le respect d'un nombre fini de vecteurs de déplacement. Ces outils nous serviront de base pour définir une méthode générale pour déformer un modèle à topologie constante.

## 1.6 Conclusion

Le modèle volumique est un outil utile au géologue pétrolier pour décider d'exploiter ou non un champ. Chaque région du modèle peut être ensuite remplie par une grille structurée (maillage à base d'hexaèdres) ou non (maillage à base de tétraèdres ou de polyèdres quelconques). Ces grilles servent de support pour estimer les propriétés pétrophysiques des terrains comme la porosité, la perméabilité des roches à partir des données sismiques ou de puits ou encore pour simuler l'exploitation d'un gisement. De par la nature des données qui sont fournies, nuages de points ou coupes sismiques interprétées, la construction d'un modèle volumique passe par une étape d'assemblage d'un modèle structural composé de surfaces. En conséquence, une représentation par frontières du type arête radiale utilisée par le logiciel GOCAD ou les Cartes Généralisées Hiérarchiques sont bien adaptées aux besoins du géologue pétrolier. Nous préférons la structure des H-G-Cartes car un seul élément topologique est nécessaire pour décrire à la fois la topologie du modèle et celle de ses interfaces.

La mise à jour de tels modèles reste problématique : la moindre action appliquée sur une interface d'un modèle peut avoir des conséquences sur la topologie de ce dernier, mais aussi sur la géométrie et la topologie des autres interfaces. Dans sa thèse [Eul99], Euler définit et met en œuvre les opérateurs élémentaires nécessaires à la construction et la modification d'un modèle volumique. Les travaux d'Euler sont

actuellement poursuivis par Caumon [Cau02] qui développe des outils pour manipuler interactivement des modèles géologiques. L'utilisation de ces outils se traduit par une retriangulation importante des surfaces qui peut être contre-indiquée pour certaines applications.

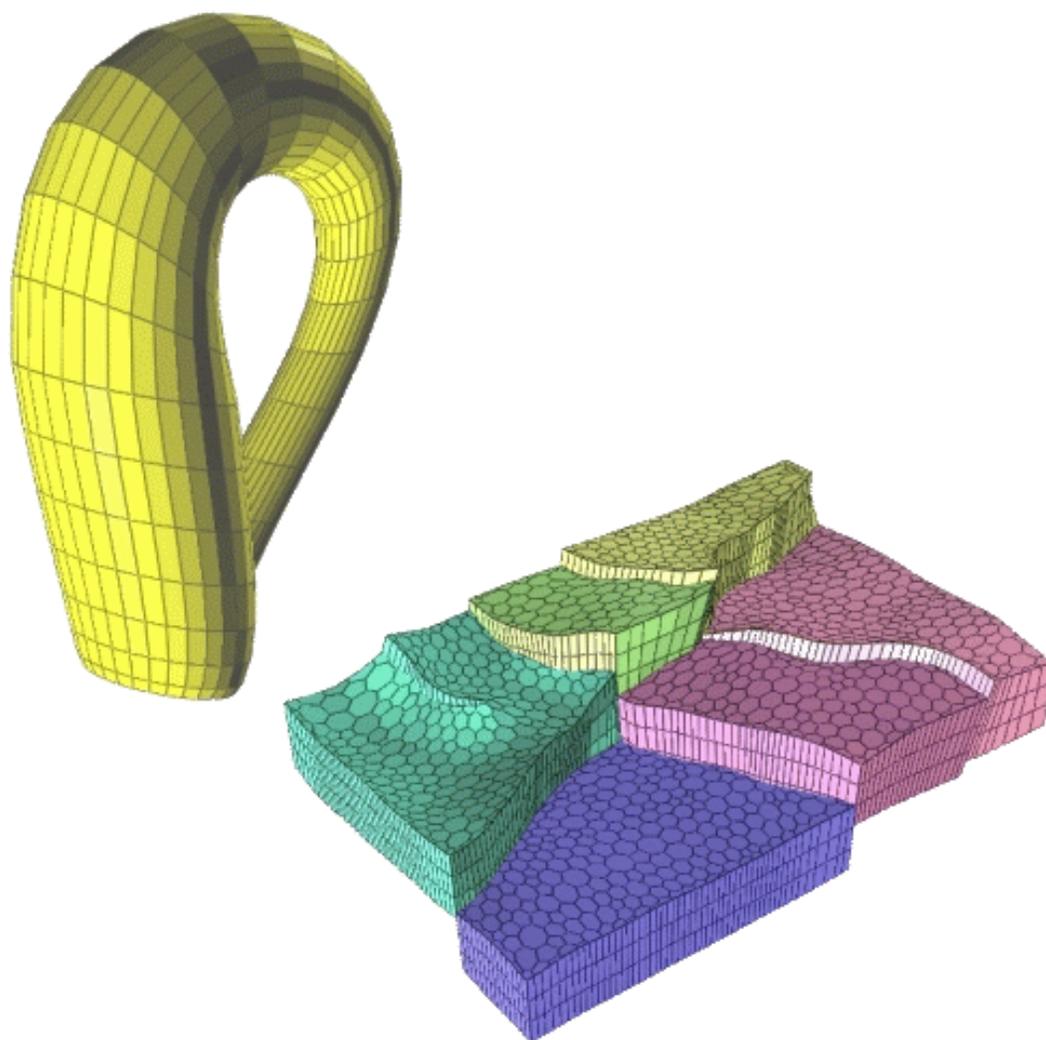
Dans cette thèse, nous proposons une nouvelle base de données pour décrire les modèles géologiques et faciliter leur mise à jour. Cette structure s'inspire du concept des trimmed-surfaces appliqué aux surfaces triangulées : les surfaces ne sont plus découpées mais partitionnées en sous-domaines par les lignes de contact et d'intersection. Chaque sous-domaine peut être vu comme une partie virtuelle d'une surface respectant ainsi la clause de non-intersection. Cette structure sera dérivée des H-G-Cartes que nous décrirons donc plus précisément dans le chapitre suivant.

Les besoins des outils d'inversion tomographique sismique sont différents : la mise à jour de la géométrie des modèles de vitesse doit se faire à topologie constante. Dans ce but, nous définirons une méthode générale, dérivée des outils de déformation de formes libres. D'autres contraintes que celles de déplacement pourront être ajoutées pour définir plus précisément la fonction de déformation.



## Chapitre 2

### Cartes Généralisées



## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la théorie des Cartes Généralisées, notées plus simplement G-Cartes. Les G-Cartes sont une généralisation des Cartes [Edm60, Jac70, Cor75] aux volumes, puis aux objets de dimension arbitraire par P. Lienhardt [Lie88, Lie89]. Elles permettent à l'aide d'un seul et unique élément topologique, le brin<sup>1</sup>, et de relations mathématiques reliant ces brins, de décrire la topologie d'objets variétés de dimension arbitraire. Ces objets peuvent être par exemple des lignes ou des surfaces polygonales, des volumes décomposés en polyèdres quelconques ou encore des hypervolumes.

Les G-Cartes ont été ensuite étendues par B. Lévy [Lev99] avec les Cartes Généralisées Hiérarchiques (H-G-Cartes) dans l'optique de la modélisation volumique. Un modèle géologique 3D est une partition de l'espace en sous-domaines appelés régions. Chaque région est décrite par ses frontières qui sont elles-même définies par un ensemble fini de surfaces polygonales. Dans la représentation des H-G-Cartes, un modèle 3D, ainsi que les surfaces qui délimitent ses régions, est décrit par deux niveaux emboîtés de G-Cartes. Cette structure hiérarchisée nous permettra de nous affranchir des bases de données habituellement utilisées dans GOCAD pour représenter les objets non-variétés, comme les *arêtes radiales* [Wei86a], ces structures étant assez lourdes à gérer. Nous étendrons ensuite la notion de Cartes Généralisées Hiérarchiques dans le chapitre suivant pour définir les Trimmed-TSurfs.

## 2.2 Cartes généralisées

Lévy a introduit dans sa thèse [Lev99] la notion de Cartes Généralisées à partir de la décomposition d'objets en cellules et de l'analyse des relations d'adjacence entre ces cellules, mettant ainsi en parallèle les Cartes Généralisées avec les Cell-tuples de Brisson [Bri89]. Nous aborderons plutôt les G-Cartes à partir de la notion de triangulation barycentrique, mais avec une approche moins formelle que celle employée par Lienhardt [Lie94]. Nous utiliserons en outre cette notion de triangulation barycentrique dans un autre but, plus tard dans le chapitre 3. Avant d'aller plus loin, nous allons aborder brièvement dans la section suivante, quelques notions sur les simplexes pour introduire le principe de la triangulation barycentrique.

### 2.2.1 Simplexes et ensembles semi-simpliciaux

#### Simplexes

Soient  $i, j$  deux entiers positifs tels que  $i \geq j$ . Un simplexe abstrait  $\sigma$  de dimension  $i$ , noté plus simplement  $i$ -simplexe, est défini par un ensemble de  $i + 1$  sommets abstraits

<sup>1</sup>Le brin est référencé sous le nom de *dart* dans la littérature de langue anglaise

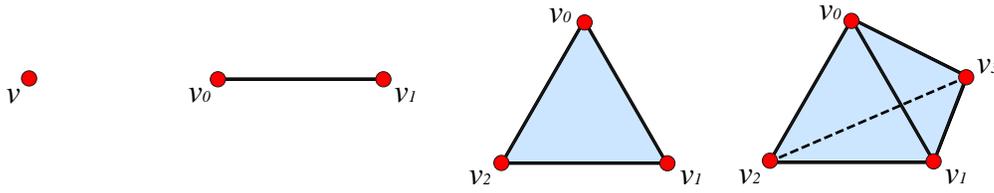


Figure 2.1: De gauche à droite : exemples de simplexes de dimension 0, 1, 2 et 3.

$\mathcal{V} = \{v_0, \dots, v_i\}$ . Un simplexe  $\tau$  est une  $j$ -face de  $\sigma$ , s'il est un sous-ensemble de  $j+1$  éléments de  $\mathcal{V}$ . La  $i$ -face d'un  $i$ -simplexe  $\sigma$  s'identifie à ce dernier. Les simplexes de dimension 0, 1, 2 et 3 seront représentés respectivement par un point, un segment, un triangle et un tétraèdre, même s'ils n'ont aucune existence géométrique (cf. figure 2.1).

### Ensembles semi-simpliciaux

Un ensemble semi-simplicial est une collection de simplexes reliés entre eux par des opérateurs bords. Plus formellement, un ensemble semi-simplicial  $\mathcal{S} = (K, (d_j)_{j=0, \dots, n})$  de dimension  $n$  est défini par [May67, Lan95] :

- $K = \bigcup_{0 \leq i \leq n} K_i$  où  $K_i$  est un ensemble fini de simplexes de dimension  $i$ . Si  $K$  est vide alors  $\mathcal{S}$  est un ensemble semi-simplicial vide.
- Pour tout entier  $j, 0 \leq j \leq n$ ,  $d_j$  est une application sur  $K$  vérifiant :
  - $d_j$  n'est pas définie sur  $K_i$  pour tout  $i$  tel que  $0 \leq i < j \leq n$ .  $d_0$  n'est pas définie sur  $K_0$ .
  - Si  $K_i$  est vide pour  $i \in [1, n]$ , alors  $d_j$  n'est pas définie, sinon  $d_j$  est une application de  $K_i$  vers  $K_{i-1}$  qui, à un  $i$ -simplexe  $\sigma$  associe un  $(i-1)$ -simplexe  $\tau$  de son bord.  $d_j$  est appelée opérateur bord de  $\sigma$  et on note  $\tau = \sigma d_j$ . Cette application vérifie en outre la relation suivante :

$$\forall \sigma \in K_i, \forall 0 \leq k < j, \sigma d_j d_k = \sigma d_k d_{j-1}$$

### Quelques définitions classiques sur les ensembles semi-simpliciaux

Soit  $\mathcal{S} = (K, (d_j)_{j=0, \dots, n})$ , un ensemble semi-simplicial de dimension  $n$ . À partir des opérateurs de bords  $d_i$ , nous pouvons définir les propriétés suivantes sur les simplexes :

- Un simplexe  $\sigma$  est incident à un simplexe  $\tau$ , noté  $\sigma \mathcal{I} \tau$ , s'il existe une séquence d'opérateurs bords telle que  $\sigma d_{i_1}, \dots, d_{i_k} = \tau$ .  $\tau$  est une face de  $\sigma$  (cf. figure 2.2A).

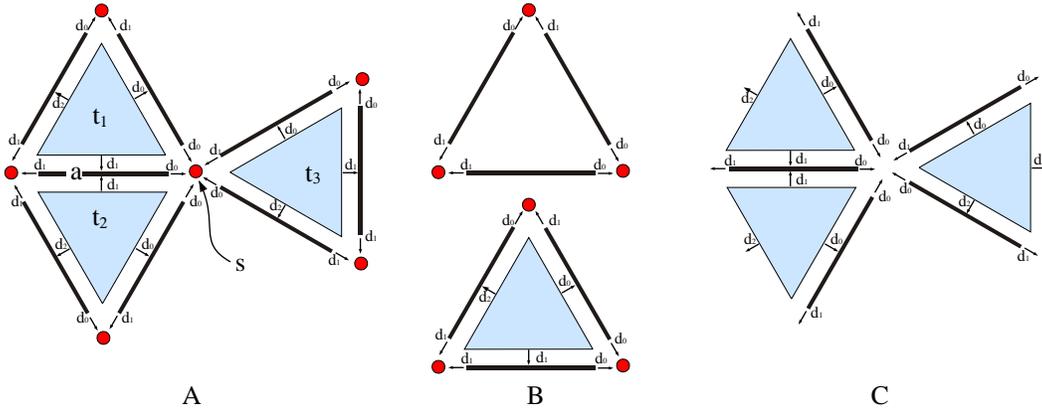


Figure 2.2: En (A) : le triangle  $t_1$  est incident à l'arête  $a$  et au sommet  $s$ . Le triangle  $t_1$  et  $t_2$  ont l'arête  $a$  comme 1-face commune :  $t_1d_1 = t_2d_1 = a$ .  $t_1$  et  $t_2$  sont 1-adjacents via l'arête  $a$ . De même, les triangles  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  se partagent le sommet  $s$  comme 0-face commune :  $t_1d_1d_0 = t_2d_1d_0 = t_3d_2d_0 = s$ .  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  sont 0-adjacents via le sommet  $s$ . En (B) : en haut, le bord du triangle  $t_1$  et en bas, le simplexe fermé défini à partir du triangle  $t_1$ . En (C) : l'étoile du sommet  $s$ .

- Deux simplexes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont dits  $i$ -adjacents, noté  $\sigma_1\mathcal{A}_i\sigma_2$  s'ils ont une  $i$ -face en commun (cf. figure 2.2A).
- On appelle bord d'un simplexe  $\sigma$ , noté  $\partial\sigma$ , l'ensemble de ses faces :  $\partial\sigma = \{\tau/\sigma\mathcal{I}\tau\}$ . Le bord d'un 0-simplexe est vide. Un  $i$ -simplexe fermé est un ensemble simplicial composé d'un  $i$ -simplexe et de son bord (cf. figure 2.2B).
- On appelle étoile d'un simplexe  $\sigma$ , noté  $Et(\sigma)$ , l'ensemble des simplexes qui lui sont incidents :  $Et(\sigma) = \{\tau/\tau\mathcal{I}\sigma\}$  (cf. figure 2.2C). L'étoile d'un  $n$ -simplexe de  $\mathcal{S}$  est vide.

## 2.2.2 Triangulation barycentrique

Considérons un objet  $n$ -variété  $C$  décrit par un ensemble de cellules que nous supposons convexes (cf. figure 2.3). La triangulation barycentrique de cet objet  $C$  est définie récursivement de la manière suivante :

- Chaque sommet de  $C$  est remplacé par un sommet numéroté (0) (cf. figure 2.3B).
- Considérons  $c_i$ , une  $i$ -cellule de  $C$  dont les simplexes du bord ont été déjà triangulés. La  $i$ -triangulation barycentrique de  $c_i$  consiste à insérer en son barycentre un sommet numéroté ( $i$ ) et à le relier à tous les sommets numérotés de 0 à  $i-1$  et associés à chacun des simplexes de son bord (cf. figures 2.3C et 2.3D).

À l'issue de la triangulation barycentrique de  $C$ , nous obtenons un ensemble simplicial numéroté  $\mathcal{S}$ , dont chaque sommet numéroté ( $i$ ) peut être mis en correspondance avec une  $i$ -cellule de  $C$ .

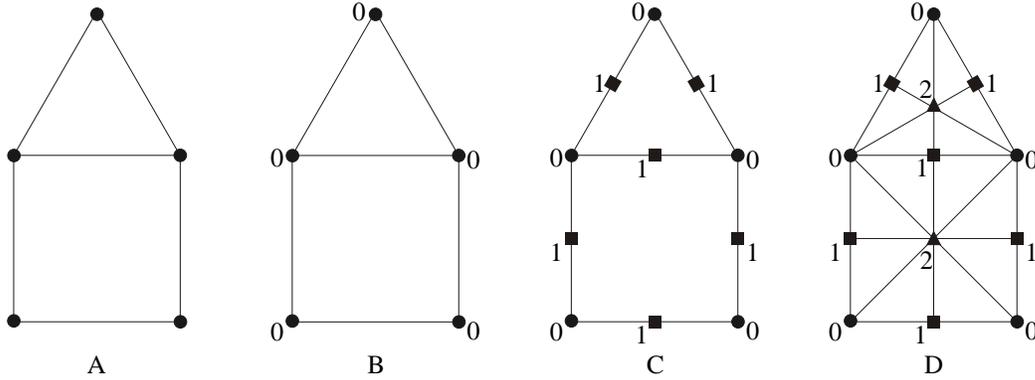


Figure 2.3: *Triangulation barycentrique du complexe cellulaire de dimension 2 représenté en (A). (B) : chaque sommet est remplacé par un sommet numéroté (0). (C) : au milieu de chaque arête, est inséré un sommet numéroté (1). Ce sommet est relié à ses deux voisins numérotés (0). (D) : au barycentre de chaque polygone est inséré un sommet numéroté (2). Ce sommet est ensuite relié à ses voisins numérotés (0) et (1) pour retriangler le polygone.*

### 2.2.3 Une définition intuitive des G-Cartes

Reprenons l'exemple de la surface représentée sur la figure 2.3 et intéressons nous à ses triangles. Par construction, chaque triangle a ses sommets numérotés de 0 à 2 et ses arêtes numérotées (0,1), (0,2) et (1,2). Dans le cas général, chaque arête est une face de deux triangles. Les arêtes (0,2) et (1,2) sont construites lors de la triangulation des polygones. Il y aura donc toujours deux triangles incidents à ces arêtes. Les arêtes (0,1) sont construites lors de la triangulation des arêtes de la surface. Par conséquent, un seul triangle sera incident à une arête (0,1) située sur un bord de la surface. Réciproquement, chaque triangle est 1-adjacent à 3 autres triangles par ses arêtes (0,1), (0,2) et (1,2) ou à deux, si son arête (0,1) est située sur un bord. Pour distinguer ces trois types d'adjacence, nous pouvons introduire trois relations mathématiques que nous nommerons respectivement  $\alpha_2$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_0$  et qui seront définies de la manière suivante :

$$t_1, t_2 \text{ 1-adjacents par une arête numérotée } [0, 2] \setminus i \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_i(t_1) = t_2 \\ \alpha_i(t_2) = t_1 \end{cases}$$

La relation  $\alpha_2$  admettra des points fixes si la surface initiale possédait un ou plusieurs bords avant sa triangulation :  $\exists t, \alpha_2(t) = t$ . Il est facile de démontrer que les relations que nous venons de définir sont des involutions :

$$\forall i \in [0, 2], \forall t, a_i \circ a_i(t) = t$$

L'étoile d'un sommet numéroté ( $i$ ) est composée d'arêtes numérotées ( $i, j$ ) avec  $j \in [0, 2] \setminus i$  et des triangles adjacents par ces arêtes. En conséquence, les involutions  $\alpha_k$  qui associent ces triangles entre eux sont telles que  $k \neq i$ . Par exemple, un sommet numéroté (2), issu de la triangulation d'un polygone, est incident à des triangles

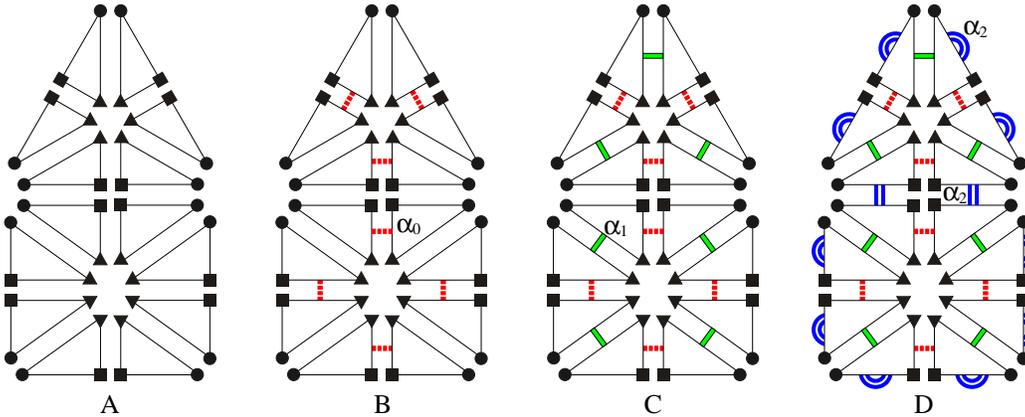


Figure 2.4: (A) : chaque triangle a ses sommets numérotés 0 (rond), 1 (carré) et 2 (triangle). Selon le type d'arête considéré, nous pouvons identifier trois relations d'adjacence :  $\alpha_0$  par une arête (1,2) (B),  $\alpha_1$  par une arête (0,2) (C) et  $\alpha_2$  par une arête (0,1).

reliés par des involutions  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$ . Le nombre de triangles contenus dans l'étoile d'un sommet numéroté ( $i$ ) est variable et dépend du maillage initial de la surface :

- Les triangles reliés par des involutions  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  appartiennent à l'étoile d'un sommet numéroté (0) associé à un sommet du maillage initial. Ils ont été construits par triangulation des  $n_p$  polygones incidents à ce sommet. Ils sont donc au nombre de  $2 \times n_p$ .
- Les triangles reliés par des involutions  $\alpha_0$  et  $\alpha_2$  appartiennent à l'étoile d'un sommet numéroté (1) associé à une arête du maillage initial. Ils ont été construits par triangulation du ou des 2 polygones incidents à cette arête. Il y a donc  $2 \times 1 = 2$  ou  $2 \times 2 = 4$  triangles.
- Les triangles reliés par des involutions  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  appartiennent à l'étoile d'un sommet numéroté (2) associé à un polygone à  $n_c$  côtés du maillage initial. Ils ont été construits par triangulation de ce polygone, soit  $2 \times n_c$  triangles.

Les involutions  $\alpha_0$  et  $\alpha_2$  mettent toujours en relation deux ou quatre triangles symétriques deux-à-deux par rapport à une arête numérotée (1,2) et (0,1) respectivement. De ces considérations géométriques, nous en déduisons que  $\alpha_0 \circ \alpha_2$  est une involution.

Cette structure est facilement généralisable à des objets de dimension  $n$  arbitraire. Après triangulation barycentrique, chaque  $n$ -simplexe a ses sommets numérotés de 0 à  $n$  et ses  $(n-1)$ -faces numérotées  $[0, n] \setminus i$ . Nous pouvons définir  $n+1$  relations d'adjacence  $a_i$  qui associent à tout  $n$ -simplexe, le  $n$ -simplexe qui lui est adjacent par sa  $(n-1)$ -face numérotée  $[0, n] \setminus i$ . Enfin, nous pourrions aussi démontrer par récurrence que  $\forall i, j / 0 \leq i < i+2 \leq j \leq n, \alpha_i \circ \alpha_j$  est une involution.

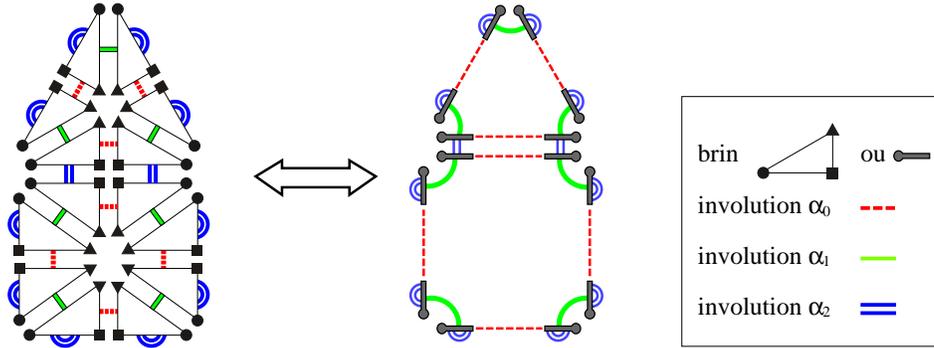


Figure 2.5: Deux représentations différentes de la même  $G$ -Carte.

Par exemple pour  $n = 3$ , les simplexes issus de la triangulation barycentrique d'un volume composé de polyèdres sont des tétraèdres. Les involutions  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_3$  qui associent ces tétraèdres entre eux ne sont pas indépendantes. En effet, les liens  $\alpha_3$  relient les faces des polyèdres pour reformer le volume. Ces faces sont elles-même constituées de tétraèdres associés par des liens  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$ . Nous avons donc pour chaque relation  $\alpha_0 \circ \alpha_3$  et  $\alpha_1 \circ \alpha_3$ , deux tétraèdres reliés par des liens  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  respectivement et leurs symétriques par les liens  $\alpha_3$ , soit quatre tétraèdres symétriques deux à deux. Les relations  $\alpha_0 \circ \alpha_3$  et  $\alpha_1 \circ \alpha_3$  sont donc des involutions. De même, les liens  $\alpha_0$  et  $\alpha_2$  sont dépendants : les liens  $\alpha_2$  relient les arêtes de polygones pour former des polyèdres. Ces arêtes sont formées chacune de tétraèdres associés par des involutions  $\alpha_0$ , soit  $2 \times 2 = 4$  tétraèdres symétriques deux à deux.  $\alpha_0 \circ \alpha_2$  est une involution.

### 2.2.4 Cartes Généralisées : définition

Ce que nous venons de définir est en fait équivalent à une Carte Généralisée. Lienhardt [Lie94] donne la définition suivante des  $G$ -Cartes. Soit  $n \geq -1$ . Une Carte Généralisée de dimension  $n$  est définie par le  $(n+2)$ -uplet  $\mathcal{G} = (\mathcal{B}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  où  $\mathcal{B}$  est un ensemble fini de brins et  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont des permutations sur  $\mathcal{B}$  vérifiant :

- $\forall 0 \leq i \leq n, \alpha_i$  est une involution. Si  $\mathcal{B}$  est vide, alors l'involution  $\alpha_i$  n'est pas définie.
- $\forall 0 \leq i < i+2 \leq j \leq n, \alpha_i \circ \alpha_j$  est une involution.

Dans le cas particulier où  $n = -1$ , la  $G$ -Carte est un ensemble de brins libres :  $\mathcal{G} = \mathcal{B}$ .

Les brins ont pour équivalents les  $n$ -simplexes que nous avons construits par triangulation barycentrique d'objets cellulaires de dimension  $n$ . Pour des raisons pratiques, nous représenterons dans ce chapitre les brins par des épingles, de façon similaire à Lévy [Lev99] (cf. figure 2.5). Nous réutiliserons cependant la représentation simplifiée des brins dans le chapitre 3.

## 2.3 Implantation des Cartes Généralisées

Les G-Cartes ont été implantées dans plusieurs logiciels de modélisation aussi bien 3D [Elt94, Ber97] que 4D [BBB98]. Elles forment le cœur d'un noyau topologique expérimental [LCC00] qui doit remplacer à moyen terme le noyau topologique du logiciel GOCAD actuellement basé sur la structure des demi-arêtes [Wei85]. Une G-Carte peut être implantée sous la forme d'une liste chaînée de brins. Un brin contient  $n + 1$  pointeurs vers ses  $n + 1$  brins voisins. L'accès et la mise à jour de ses voisins se fait à l'aide des fonctions **alpha** et **positionner\_alpha**. La fonction **est\_libre** vérifie si un brin  $b$  n'est pas un point singulier de l'involution  $\alpha_i : \alpha_i(b) = b$ . Enfin, le booléen **est\_marqué** nous sera utile pour le parcours de la G-Carte. Nous compléterons plus loin cette structure.

```

struct Brin {
    Procédure positionner_alpha( Brin* brin, Brin* voisin, Entier i ) ;
    Brin* alpha(Brin* b, Entier i) ;
    Booléen est_libre(Brin* b, Entier i) ;

    Booléen est_marqué ;
    Brin* alpha[n+1] ;
} ;

```

### 2.3.1 Orbite et cellules

Soit  $\mathcal{G}(\mathcal{B}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  une  $n$ -G-Carte et  $b$ , un de ses brins. On définit l'orbite  $\langle \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k} \rangle (b)$  comme l'ensemble des brins pouvant être joints à partir de  $b$  en parcourant la G-Carte  $\mathcal{G}$  via les involutions  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$ . L'algorithme qui suit permet de parcourir une orbite quelconque, étant donné un brin *début* et une liste d'involutions  $\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}\}$ .

Les algorithmes implantés dans les modeleurs géométriques manipulent des cellules comme les sommets, les arêtes, les polygones d'une surface et non des brins. Il est toutefois très facile de retrouver les brins d'une cellule si nous connaissons un de ses brins. L'involution  $\alpha_i$  est la seule involution qui relie les brins de deux  $i$ -cellules adjacentes. L'ensemble des brins appartenant à la même  $i$ -cellule qu'un brin  $b$ , sera donc donné par l'orbite  $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n \rangle (b)$ , que nous noterons plus simplement  $\langle \alpha_i \rangle (b)$ . L'algorithme de parcours d'orbite sera aussi utilisé pour traverser les brins d'une composante connexe d'une G-Carte. Si  $b$  est un brin d'une G-Carte  $\mathcal{G}(\mathcal{B}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , le parcours des brins de la composante connexe de  $\mathcal{G}$  qui contient  $b$ , se fait en traversant l'orbite  $\langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle (b)$ . Nous généraliserons cet algorithme dans le chapitre 3 pour le parcours des cellules d'une Trimmed-TSurf.

```
parcourir_orbite( début: Brin,  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$  : Entier )
```

```
  P : Pile ;
```

```
  marquer( début ) ;
```

```
  empiler( P, début ) ;
```

```
  tant que non vide( S )
```

```
    Brin b = dépiler( P ) ;
```

```
    ACTION( b ) ; pour j de 1 à k
```

```
      si non marqué(  $\alpha_{i_j}( b )$  )
```

```
        marquer(  $\alpha_{i_j}( b )$  ) ;
```

```
        empiler( S,  $\alpha_{i_j}( b )$  ) ;
```

```
      fin si
```

```
    fin pour
```

```
  fin tant que
```

```
fin parcourir
```

L'algorithme de parcours d'orbite, s'il est générique, peut en revanche s'avérer superflu dans certains cas. Le sommet d'une ligne polygonale n'est composé qu'au plus de deux brins et ne nécessite qu'une seule involution pour être parcouru. Une arête d'une surface polygonale est composée de deux ou quatre brins et se parcourt simplement en utilisant successivement les involutions  $\alpha_0$  et  $\alpha_2$ . C'est pour cette raison que des opérateurs de parcours plus spécialisés n'ayant pas recours à une pile et au marquage des brins, ont été mis en place. Lévy [Lev99] et Conreux [Con01] ont fait une analyse des optimisations possibles selon le nombre et la nature des involutions utilisées. Cette analyse couvre tous les parcours d'orbite possibles d'une G-Carte de dimension inférieure ou égale à trois :

- Un parcours d'orbite avec une seule involution  $\alpha_i$  n'atteindra que deux brins au maximum : les brins  $b$  et  $\alpha_i(b)$  si  $\alpha_i(b) \neq b$ . Les parcours des brins d'un sommet et d'une arête de ligne polygonale utilisent respectivement une involution  $\alpha_1$  et une involution  $\alpha_0$ .

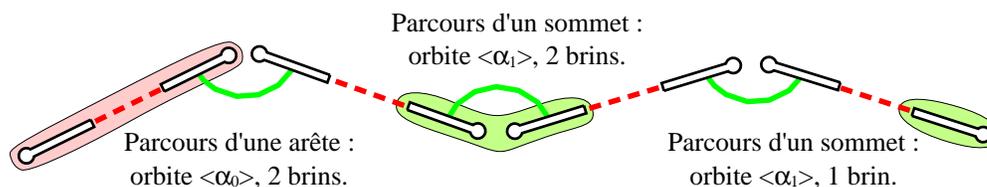


Figure 2.6: *Parcours à une involution : un ou deux brins sont traversés.*

- Les parcours à deux involutions se subdivisent en deux catégories en fonction des involutions utilisées. Ces orbites permettent de traverser par exemple les brins d'une cellule d'une 2-G-Carte.

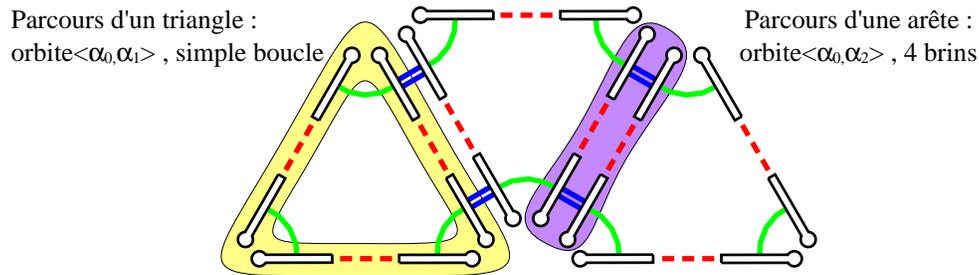


Figure 2.7: Parcours à deux involutions : à gauche simple boucle (orbites  $\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle$ ), à droite parcours borné où seuls 2 ou 4 brins sont visités (orbites  $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$  avec  $i < i+2 \leq j$ ).

- Si les deux involutions se suivent  $\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle$ , les brins de l'orbite sont traversés à l'aide d'une simple boucle.
- Si les involutions ne se suivent pas  $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle / 0 \leq i < i+2 \leq j$ , quatre brins au plus sont traversés. En effet, par définition  $\alpha_i \circ \alpha_j$  est dans ce cas particulier une involution.
- Avec trois involutions, seuls les parcours tels que  $\langle \alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_j \rangle$  avec  $j \geq i+2$  ou  $j \leq i-2$  peuvent être optimisés. Ils se font en trois étapes selon une double boucle :
  - parcours de la première boucle à l'aide des deux involutions qui se suivent ;
  - passage à un brin de la deuxième boucle par la troisième involution ;
  - parcours de la deuxième boucle.

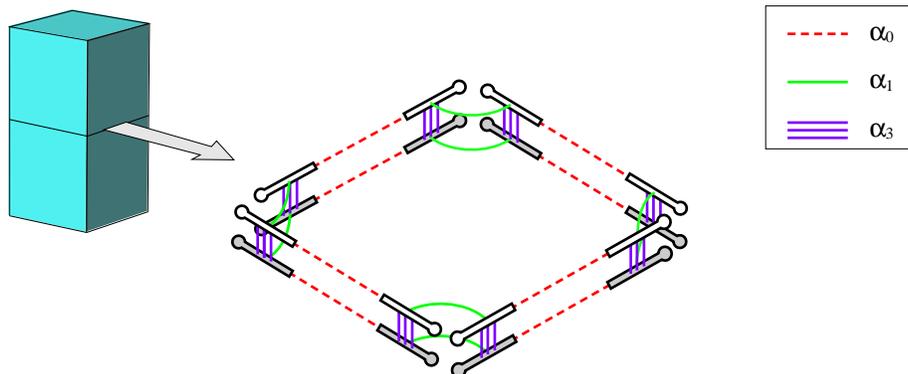


Figure 2.8: Parcours à trois involutions en double boucle ( $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3$ ). Les brins en blanc sont d'abord traversés (première boucle) puis les brins en gris (deuxième boucle). Le passage d'une boucle à l'autre se fait par une involution  $\alpha_3$ .

0 involution		Id	} parcours borné
1 involution		$\alpha_0$	
		$\alpha_1$	
		$\alpha_2$ $\alpha_3$	
2 involutions	$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle / j \geq i+2$	$\alpha_0, \alpha_2$ $\alpha_0, \alpha_3$ $\alpha_1, \alpha_3$	
	$\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle$	$\alpha_0, \alpha_1$ $\alpha_1, \alpha_2$ $\alpha_2, \alpha_3$	} simple boucle
3 involutions	$\langle \alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_j \rangle / j \geq i+2$ ou $j \leq i-2$	$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3$ $\alpha_0, \alpha_2, \alpha_3$	} double boucle
	$\langle \alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2} \rangle$	$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	
4 involutions		$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	} parcours général

Figure 2.9: Selon le nombre et la nature des involutions, une pile et le marquage des brins ne sont pas forcément nécessaires pour le parcours d'une orbite. Des algorithmes plus simples et plus efficaces peuvent donc être utilisés.

La figure 2.9 récapitule la liste des orbites possibles et leurs caractéristiques pour traverser un G-Carte de dimension inférieure ou égale à trois. Cette étude s'est limitée à des orbites comprenant trois involutions au plus, mais elle peut être étendue dans le but d'optimiser le parcours de G-Cartes de dimension supérieure. Ces algorithmes ont été implantés de manière générique en utilisant des classes patrons [Str97]. Ce mode d'implantation permet de définir toute une classe d'itérateurs spécialisés (comme par exemple des itérateurs sur les sommets d'un polyèdres, les arêtes connectées à un sommet...) avec un code de taille réduite et donc facile à maintenir [LCC00].

### 2.3.2 Orientabilité et Orientation

Nous avons vu dans le chapitre précédant qu'un objet de dimension  $n$  était orientable s'il possédait deux faces différentes de dimension  $n$ . L'orientabilité et l'orientation d'une  $n$ -G-Carte connexe  $\mathcal{G}(\mathcal{B}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  se déterminent en marquant ses brins deux à deux. Un booléen sera réservé à cet effet pour chaque brin de la G-Carte.

Orienter la G-Carte  $\mathcal{G}$  revient à considérer chaque couple de brins  $\{b, \alpha_0(b)\}$  comme un petit aimant. Supposons que  $b$ , un brin de  $\mathcal{G}$ , soit marqué. Par convention, nous dirons que  $b$  correspond au pôle nord de l'aimant. Son brin  $\alpha_0(b)$  associé n'est pas marqué et correspond au pôle sud. Le pôle nord d'un aimant est attiré par le pôle sud et repoussé par le pôle nord d'un autre aimant. Si la G-Carte  $\mathcal{G}$  est orientable, il est alors

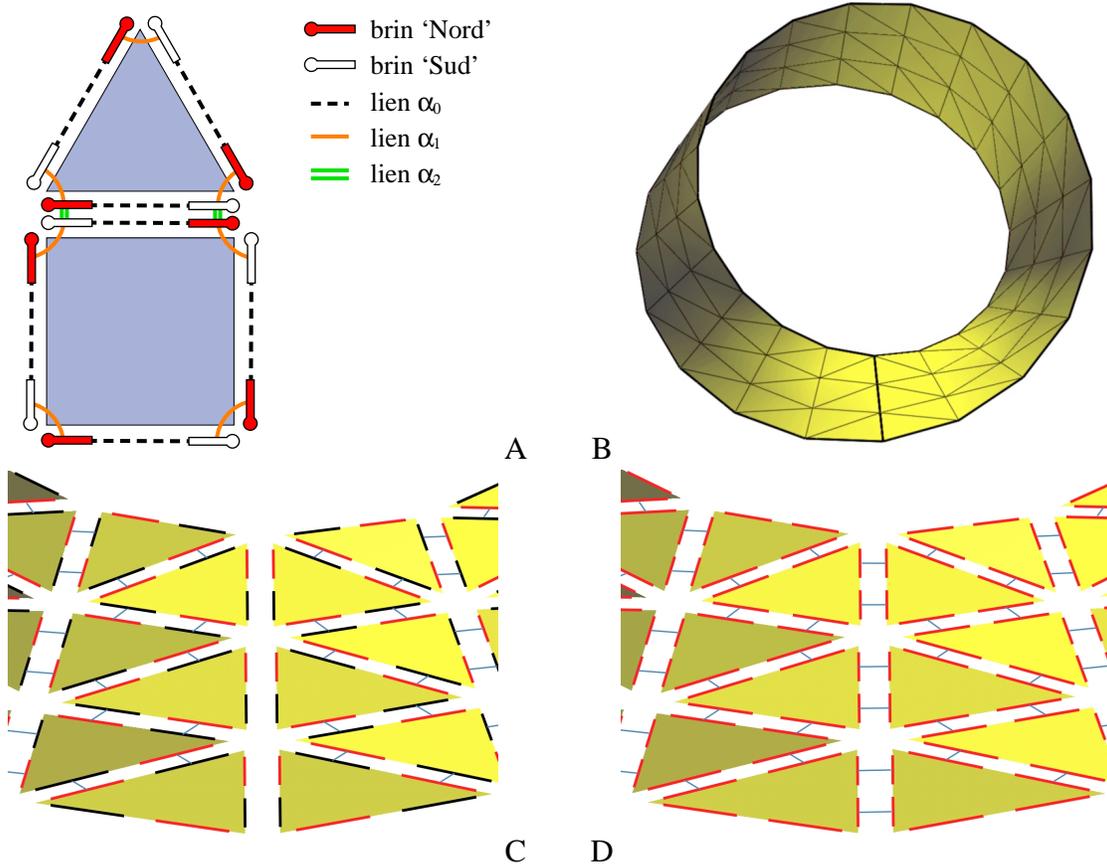


Figure 2.10: A : Orientation d'une surface. Chaque couple de brins  $\{b, \alpha_0(b)\}$  peut être assimilé à un aimant. Quand la surface est orientable, il est possible de marquer les brins tout en respectant les lois du magnétisme, sinon l'ensemble des brins est marqué. B : Construction d'une surface non-orientable, le ruban de Möbius. Avant soudure des deux extrémités, la surface est orientable (C), mais ne l'est plus une fois la jonction faite (D).

possible d'orienter les brins de manière à ce que cette loi magnétique d'attraction et de répulsion soit respectée. Ainsi, les voisins du brin  $b$  par les involutions  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ , seront tous des pôles sud, c'est-à-dire des brins non-marqués. De même, les voisins du brin  $\alpha_0(b)$  seront tous des pôles nord et donc des brins marqués.

Nous pouvons vérifier si une G-Carte connexe  $\mathcal{G}$  est orientable en recherchant les brins d'orientation similaire à l'un de ses brins. Si  $b$  est un brin de la G-Carte  $\mathcal{G}$ , la liste des brins de même orientation que  $b$  s'obtient facilement en parcourant l'orbite  $\langle \alpha_0 \circ \alpha_1, \alpha_0 \circ \alpha_2, \dots, \alpha_0 \circ \alpha_n \rangle (b)$ .  $\mathcal{G}$  sera orientable si cette liste contient la moitié de ses brins et non-orientable si elle les contient tous.

L'orientation des G-Cartes est une donnée fondamentale pour le bon fonctionnement de nombreux algorithmes ainsi que pour la définition de certains objets utilisés

dans les modeleurs géologiques comme GOCAD :

- Pour le rendu graphique d'une surface, nous avons besoin d'estimer sa normale en chacun de ses points. L'orientation cohérente des polygones de la surface rend possible ce calcul.
- Un horizon correspond à la fois à la limite inférieure (ou mur) d'une couche et à la limite supérieure (ou toit) d'une autre couche. Si les G-Cartes qui décrivent les horizons sont orientables, nous pouvons leur associer deux faces orientées, une face orientée positivement et une autre orientée négativement. Les faces positives pourront par exemple être utilisées pour décrire le mur des couches et les faces négatives leur toit.
- Les frontières des régions d'un modèle géologiques 3D sont décrites par une collection de faces orientées.
- Nous utiliserons l'orientation des G-Cartes pour définir et construire les régions d'une Trimmed-TSurf.

### 2.3.3 Plongement

Nous venons de montrer comment décrire la topologie des objets cellulaires à l'aide de G-Cartes. Dans cette section, nous allons nous intéresser aux plongements de leurs cellules. Nous appelons plongement, l'ensemble des propriétés (géométrie, porosité, perméabilité, faciès géologique, saturation en huile...) attachées à un objet. Cette notion ne se limite pas forcément aux cellules (sommets, arêtes, polygones...), mais peut être étendue à des orbites quelconques [Con01]. Le plongement des sommets a un statut particulier :

- C'est à leur niveau qu'est définie la géométrie des objets. Les coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$  d'un point sont des propriétés numériques qui devront être toujours déterminées.
- Ce plongement peut être partagé partiellement (au moins pour la géométrie) ou totalement par plusieurs sommets topologiquement disjoints.

Les propriétés stockées peuvent être de natures et de formes variées. Une propriété pourra être décrite par :

- **des valeurs discrètes.** Une valeur est connue en chaque sommet, arête, polygone ou polyèdre. La porosité, la perméabilité sont deux exemples de propriétés décrites de cette manière.

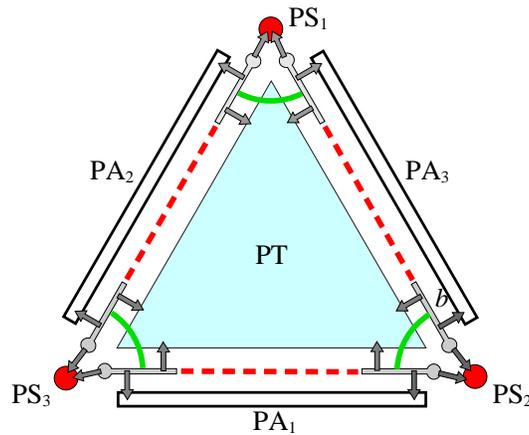


Figure 2.11: *Plongement d'une G-Carte. Chaque brin connaît le plongement de la cellule à laquelle il appartient. Le brin  $b$  par exemple pointe vers les plongements du sommet  $PS_2$ , de l'arête  $PA_3$  et du triangle  $PT$ . Un brin par cellule est désigné comme brin clef du plongement.*

- **une fonction analytique.** Par exemple, la vitesse de propagation des ondes sismiques peut être définie par l'équation  $V(x, y, z) = V_0(x, y) + k(z - z_0)$  où  $V_0(x, y)$  exprime la variation latérale des vitesses et  $k(z - z_0)$  la variation verticale des vitesses liée à la compaction des terrains. Un modèle de vitesse pourra donc être entièrement défini en associant une loi de vitesse à chaque région (ou couche) d'un modèle structural, régions qui seront décrites chacune par des 3-cellules.

Enfin, les valeurs stockées pourront être par exemple sous la forme :

- d'une valeur numérique pour exprimer des propriétés comme la porosité, le pourcentage d'argile, *etc.* ;
- d'une chaîne de caractères pour ajouter par exemple des informations géologiques relatives à une couche, un horizon ou une faille ;
- d'un booléen pour déterminer l'appartenance à une région définie comme un ensemble de cellules ;
- d'une autre cellule pour définir des relations topologiques comme une intersection ou encore le plongement d'une cellule dans une autre.

Les cellules d'un objet décrit par une  $n$ -G-Carte sont définies par un ensemble de brins. Chaque brin de cette G-Carte devra donc stocker  $n + 1$  plongements, soit un plongement par dimension. Pour éviter un coût trop élevé en mémoire et résoudre d'éventuels conflits, un seul plongement est attribué par  $i$ -cellule et partagé entre les brins qui définissent cette cellule. Enfin, pour faciliter la gestion des plongements, un brin par cellule est marqué comme brin clef de son plongement (cf. figure 2.11).

Nous pouvons alors compléter la définition de la structure des brins en rajoutant un tableau de  $n + 1$  plongements et un autre de  $n + 1$  booléens **clef\_de\_cellule**. Les fonctions **Positionner\_plongement** et **Plongement** permettent de modifier et d'accéder aux plongements stockés dans ce brin. La fonction **est\_clef\_de\_cellule** vérifie si le brin en question est le brin clef du plongement de dimension  $dim$ .

```

struct Brin {
    Procédure positionner_alpha( Brin* brin, Brin* voisin, Entier dimension ) ;
    Brin* alpha(Brin* brin, Entier dimension) ;
    Booléen est_libre(Brin* brin, Entier dimension ) ;
    Procédure positionner_plongement(
        Brin* brin, Plongement* plongement, Entier dim
    ) ;
    Plongement* plongement(Brin* brin, Entier dim) ;
    Booléen est_clef_de_cellule(Brin* brin, Entier dim ) ;

    Booléen est_marqué ;
    Brin* alpha[n+1] ;
    Plongement* plongement[n+1] ;
    Booléen clef_de_cellule[n+1] ;
};

```

Les opérations topologiques comme la fusion ou la scission de cellules ont un impact sur les plongements. Un automate a été mis au point pour mettre à jour les plongements après chaque modification topologique facilitant ainsi la tâche de l'utilisateur. La G-Carte est parcourue cellule par cellule, et ce, pour toutes les dimensions. Pour chaque  $i$ -cellule, le brin clef est recherché. Suivant le nombre de brins clef trouvés, plusieurs options sont possibles :

- Si un seul brin est trouvé, son  $i$ -plongement est partagé aux autres brins de la cellule.
- Si plusieurs brins clef sont trouvés, le plongement d'un seul brin est conservé. Les autres brins sont démarqués et leur  $i$ -plongement détruit. Le plongement du premier brin clef est ensuite partagé aux autres brins de la cellule.
- Si aucun brin clef n'est trouvé, un brin est désigné comme brin clef et un nouveau  $i$ -plongement est créé. Ce plongement est ensuite partagé aux autres brins de la cellule.

### 2.3.4 Opérations topologiques sur les Cartes Généralisées

Un nombre limité d'opérations topologiques de base est nécessaire pour créer, modifier et détruire une G-Carte. Pour nous en convaincre, revenons à la figure 2.4, page 52. Nous y avons construit une surface polygonale en quatre étapes :

- création d'une G-Carte comprenant 14 brins libres ;
- construction des arêtes en reliant deux brins par des involutions  $\alpha_0$  ;
- assemblage des polygones en reliant les brins des arêtes par des involutions  $\alpha_1$  ;
- soudure des deux polygones par connexion des brins de leur bord commun par des involutions  $\alpha_2$ .

De la même manière, nous aurions pu construire un volume en assemblant des polygones pour former des polyèdres et en soudant ces polyèdres le long de faces communes par des liens  $\alpha_3$ . Une G-Carte peut donc être construite itérativement par assemblage de  $i$ -cellules le long d'une  $(i - 1)$ -face commune pour former une  $(i + 1)$ -cellule. Deux opérateurs sont alors nécessaires pour la construction d'une G-Carte.

- L'opérateur **Créer brin**( $\mathcal{G}$ ) crée un brin libre  $b$  de la même dimension que la G-Carte  $\mathcal{G}$  et l'ajoute à l'ensemble de ses brins.
- L'opérateur **Coudre**( $\mathcal{G}, b_1, b_2, i$ ) relie par des involutions  $\alpha_i$  les brins de deux  $(i - 1)$ -cellules  $c_1$  et  $c_2$  contenant respectivement les brins  $b_1$  et  $b_2$ . Pour pouvoir être assemblées, les cellules  $c_1$  et  $c_2$  doivent être libres (elles ne sont pas déjà cousues à d'autres  $i$ -cellules) et être isomorphes (elles doivent être de même dimension et avoir le même nombre de sommets). Deux sommets ou deux arêtes seront toujours isomorphes. Ce n'est plus vrai pour des cellules de dimension supérieure, comme les polygones : un carré ne peut pas être assemblé à un triangle. Un test d'isomorphisme devra être donc effectué pour les cellules de dimension supérieure à 2.

À l'aide de ces deux opérateurs, nous pouvons construire une G-Carte. Pour la modifier, nous devons introduire les deux opérateurs inverses :

- L'opérateur **Détruire brin**( $\mathcal{G}, b$ ) retire le brin  $b$  de l'ensemble des brins de la G-Carte  $\mathcal{G}$ . Le brin  $b$  doit être libre :  $\forall 0 \leq i \leq n, \alpha_i(b) = b$
- L'opérateur **Découdre**( $\mathcal{G}, b, i$ ) dissocie les deux  $i$ -cellules soudées le long de la  $(i - 1)$ -face définie par l'orbite  $\langle \alpha_{i-1} \rangle (b)$ . Tous les brins de l'orbite  $\langle \alpha_{i-1} \rangle (b)$  sont libérés :  $\forall b' \in \langle \alpha_{i-1} \rangle (b), \alpha_i(b') = b'$ .

En combinant ces quatre opérateurs de base, il est possible de définir toute une classe d'opérateurs topologiques de haut niveau pour manipuler les G-Cartes comme la scission, la fusion ou encore la destruction de cellules. Ces opérateurs ont été définis indépendamment de la dimension de la G-Carte par Elter [Elt94] et complétés par Conreaux [Con01].

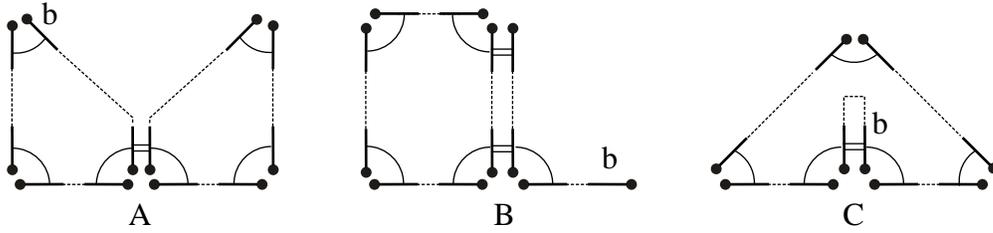


Figure 2.12: *L'opération de couture et son inverse peuvent aboutir à une G-Carte non valide si elles ne sont pas bien effectuées. En (A), couture incomplète :  $\alpha_0 \circ \alpha_2$  n'est pas une involution pour le brin  $b$ . En (B), assemblage de bords de dimensions hétérogènes : le brin  $b$  est un point fixe pour l'involution  $\alpha_1$ . En (C), arête repliée sur elle-même : le brin  $b$  est un point fixe pour l'involution  $\alpha_0 \circ \alpha_2$ . Afin d'éviter ces deux dernières configurations, deux contraintes supplémentaires peuvent être ajoutées à la définition d'une G-Carte, restreignant ainsi la classe des objets représentables :  $\forall 0 \leq i < n$ , l'involution  $\alpha_i$  n'admet pas de points fixes et  $\forall 0 \leq i < i + 2 \leq j \leq n$ , la fonction  $\alpha_i \circ \alpha_j$  n'admet pas de points fixes.*

## 2.4 Cartes Généralisées Hiérarchiques

### 2.4.1 Introduction

Un modèle géologique est une partition de l'espace 3D en sous-domaines appelés régions par un nombre fini de surfaces. Ces surfaces correspondent aux horizons et aux failles que le géologue a construit à partir de ses données. Chaque région du modèle est définie par ses frontières, c'est-à-dire un ensemble de surfaces jointives en leur bords (cf. figure 2.13). Quand plusieurs surfaces se rejoignent le long d'un bord commun, nous nous retrouvons devant une configuration non-variétée qu'il faut décrire.

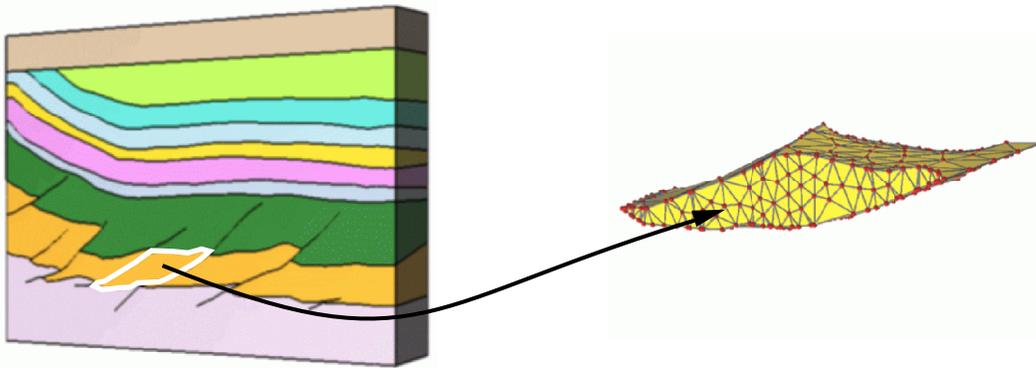


Figure 2.13: *Un modèle géologique 3D est une partition de l'espace en régions par un nombre fini de surfaces. Chaque région est un volume délimité par un ensemble de surfaces polygonales jointives en leur bords.*

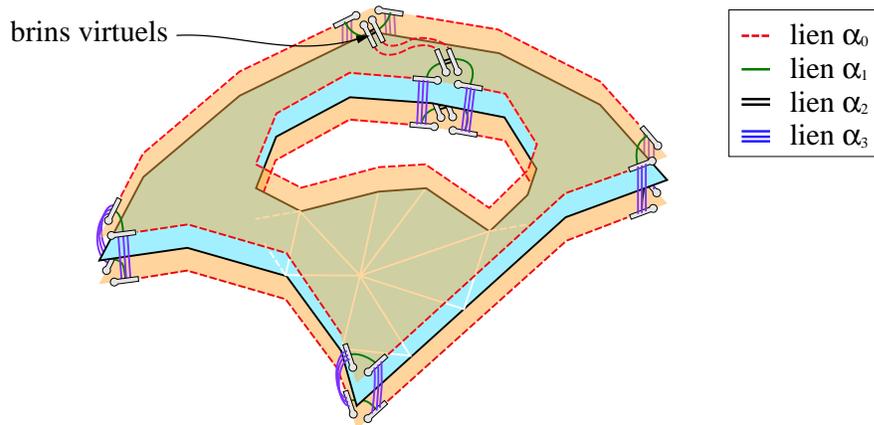


Figure 2.14: Cadre et Toile d'une surface triangulée.

Bruno Lévy [Lev99] a étendu les G-Cartes dans l'optique de la modélisation volumique à représentation frontière en introduisant la notion de Cartes Généralisées Hiérarchiques. Un modèle géologique est un volume subdivisé en plusieurs sous-volumes. C'est un objet variété qui peut donc être représenté par une 3-G-Carte, chaque 3-cellule correspondant à une région. Les surfaces sont subdivisées en polygones et donc décrites par une 2-G-Carte. Chacune de ces surfaces se trouve à l'interface entre deux cellules du modèle. D'où l'idée de représenter un objet à l'aide de deux niveaux emboîtés de G-Cartes : une G-Carte pour décrire sa décomposition en cellules et une autre pour définir ses relations d'adjacence avec les autres objets de même dimension.

## 2.4.2 Définition

Dans l'approche de B. Lévy, les objets sont définis par deux niveaux hiérarchiques de G-Cartes :

- La *Toile* décrit la subdivision d'un objet en cellules. C'est une G-Carte de la même dimension que l'objet.
- Le *Cadre* est une représentation des relations d'adjacence existant entre les différents objets qui composent un modèle.

Un  $n$ -objet peut être considéré comme une  $n$ -cloison séparant deux  $n + 1$ -volumes. Son Cadre est décrit par une  $(n + 1)$ -G-Carte composée de deux  $n$ -cellules accolées. Chaque Cadre pourra donc être décomposé en deux demi-Cadres orientés et assemblés par des involutions  $\alpha_{n+1}$ . En cela, cette structure se rapproche des arêtes radiales où chaque surface composant un modèle volumique est dédoublée. La figure 2.14 montre une surface connexe décrite par sa Toile et son Cadre. Son Cadre est une 3-G-Carte composée de deux polygones soudés par des liens  $\alpha_3$ .

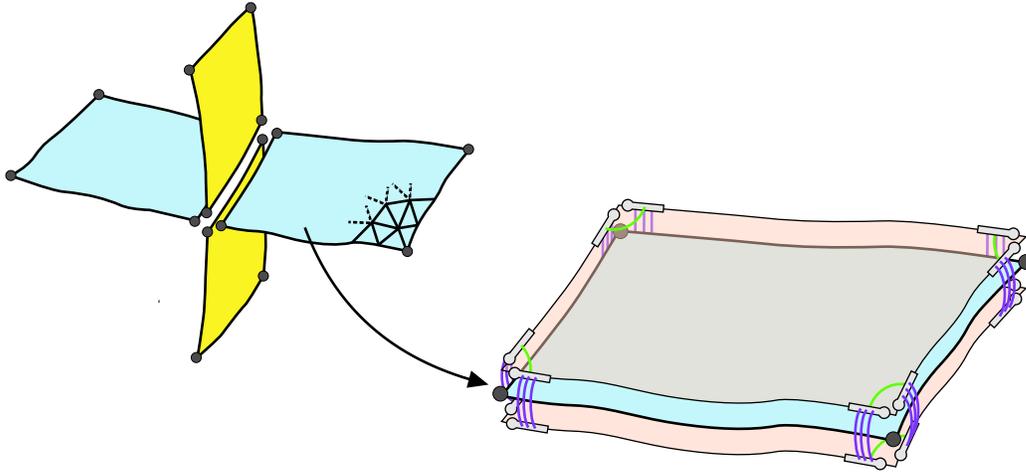


Figure 2.15: *Cadre et connectivité. Les bords d'une surface sont divisés en plusieurs parties appelées bords logiques, délimitées chacune par deux Nœuds Bornes (les boules grises). Chaque bord logique est représenté par une arête du Cadre et correspond à une zone où la surface est jointive avec d'autres surfaces du modèle.*

La subdivision d'un  $n$ -objet en cellules ainsi que la description de ses relations d'adjacence avec les autres objets de même dimension sont définies avec la même structure, les Cartes Généralisées. Les G-Cartes sont elles-même décrites à l'aide d'un seul et unique élément topologique, le brin. En comparaison, pour décrire un modèle géologique 3D avec la structure des arêtes radiales de Weiler, il ne faut pas moins d'onze éléments topologiques. À cela, s'ajoutent les sommets, les demi-arêtes et les triangles nécessaires à la description des surfaces du modèle. De plus, le même code pourra être utilisé pour construire et manipuler le Cadre et la Toile d'un objet. Un noyau topologique basé sur les H-G-Cartes sera donc de petite taille et plus facile à maintenir.

Le Cadre d'une ligne ou d'une surface peut être construit automatiquement à partir de sa Toile. Les bords d'un objet sont subdivisés en plusieurs sous-parties ou bords logiques, délimitées chacune par deux Nœud Bornes. Suivant la dimension des objets, nous avons les configurations suivantes :

- Dans un modèle 2D, les lignes se recoupent au niveau de leurs extrémités. Les Nœuds Bornes y sont placés par défaut. Ils pourront être aussi disposés par l'utilisateur au niveau d'un sommet interne de la ligne. À chaque Nœud Borne correspond un sommet du Cadre qui sera décrit par deux ou quatre brins suivant sa position. Le Cadre d'une ligne sera donc construit sommet par sommet en parcourant cette ligne d'une extrémité à l'autre.
- Dans un modèle 3D, les surfaces se coupent au niveau de leurs bords et leur bords au niveau de leurs extrémités. Par défaut, les Nœuds Bornes sont placés

à ces extrémités par les algorithmes de découpage de surfaces (cf. figure 2.15). À chaque bord logique ainsi délimité, correspond une arête du Cadre. Le Cadre d'une surface sera construit, arête par arête en parcourant ses bords pour rechercher les Nœuds Bornes. Quand une surface a plusieurs bords comme celle présentée sur la figure 2.14, son Cadre est composé de plusieurs composantes connexes, une par bord. Ces composantes connexes seront reliées par des brins virtuels.

Pour passer facilement du Cadre vers la Toile et réciproquement, chaque couple de brins  $\{B, \alpha_n(B)\}$  du Cadre pointe vers un brin  $b$  de la Toile (cf. figure 2.16). Inversement, ce brin  $b$  "connaît" un des brins de ce couple. Une telle structure permet au Cadre de déléguer une partie de son plongement à la Toile.

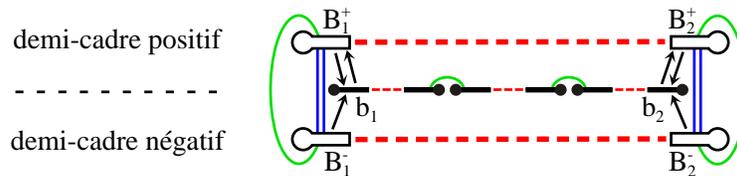


Figure 2.16: Liens entre la Toile et le Cadre d'une ligne. Chaque brin du Cadre connaît un brin de la Toile. Les brins  $B_1^+$  et  $B_1^-$  pointent vers le brin  $b_1$  et inversement  $b_1$  pointe vers  $B_1^+$ .

En continuant ce raisonnement, nous pouvons imaginer différents plongements pour le Cadre d'un objet donné suivant la nature de sa Toile (cf. figure 2.17) : une G-Carte, une surface BSpline ou de Bézier dont le maillage de contrôle pourra être décrit par une G-Carte. Nous verrons dans le chapitre suivant, un nouveau type de plongement avec la notion de Trimmed-TSurf.

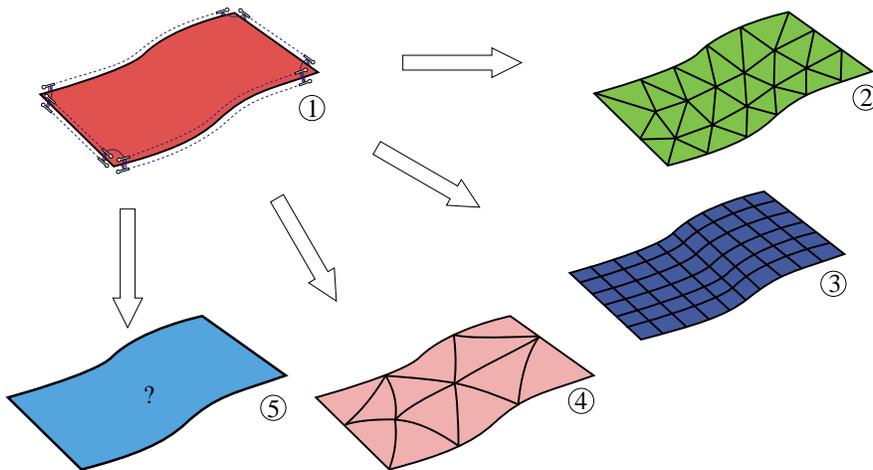


Figure 2.17: Plongement multiple d'une surface (1) : surface triangulée (2), surface paramétrique (3), surface composée de triangles de Bézier (4), autre représentation (5).

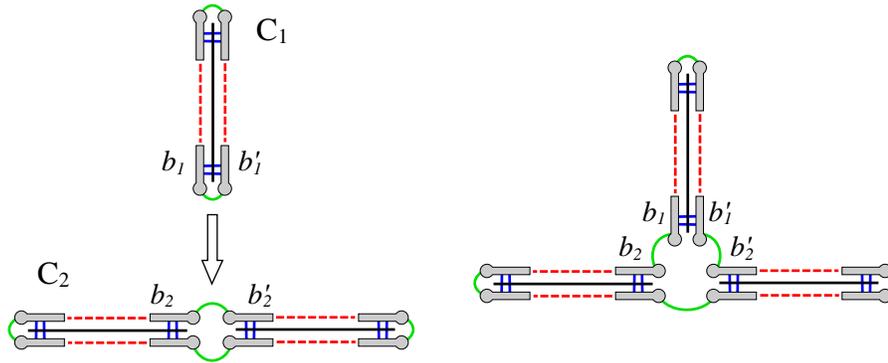


Figure 2.18: Opération d'assemblage de deux Cadres.

### 2.4.3 Modèle cellulaire

Un modèle  $n$ -D se construit en assemblant des Cadres de même dimension le long d'un bord commun, telles les pages d'un livre (cf. figure 2.18). Soient  $b_1$  et  $b_2$ , deux brins appartenant aux bords de deux Cadres  $C_1$  et  $C_2$  de dimension  $n$ . L'opération d'assemblage du Cadre  $C_1$ , supposé libre, au Cadre  $C_2$  est donnée par l'algorithme suivant :

- Le brin  $b'_2 = \alpha_{n-1}(b_2)$  est connecté au brin  $b'_1 = \alpha_{n-1}(b_1)$  par une involution  $\alpha_{n-1}$  et réciproquement ;
- Les brins  $b_1$  et  $b_2$  peuvent alors être connectés par  $\alpha_{n-1}$  ;
- Ces deux opérations sont répétées pour tous les autres brins du bord.

L'opération inverse de désassemblage en combinaison avec l'opération d'assemblage permet de modifier les modèles.

- les brins  $b_1$  et  $b'_1$  sont libérés pour l'involution  $\alpha_{n-1}$  ;
- le brin  $b_1$  est relié au brin  $b'_1$  et le brin  $b_2$  au brin  $b'_2$  par des involutions  $\alpha_{n-1}$  ;
- cette opération est répétée pour tous les brins du bord.

La  $n$ -G-Carte ainsi construite peut être considérée comme une relation variétée entre plusieurs  $n$ -volumes. Grâce aux H-G-Cartes, nous sommes passés d'une configuration  $(n - 1)$  non-variétée où plusieurs  $(n - 1)$ -cloisons se joignent le long d'un bord commun, à une jonction  $n$ -variétée entre hypervolumes. La topologie du modèle est donnée par cette  $n$ -G-Carte : chaque région du modèle est définie par une  $n$ -cellule.

La figure 2.19 montre un exemple de coupe géologique définie à partir de lignes interprétées par un géologue sur une section sismique. Ce modèle 2D a été construit

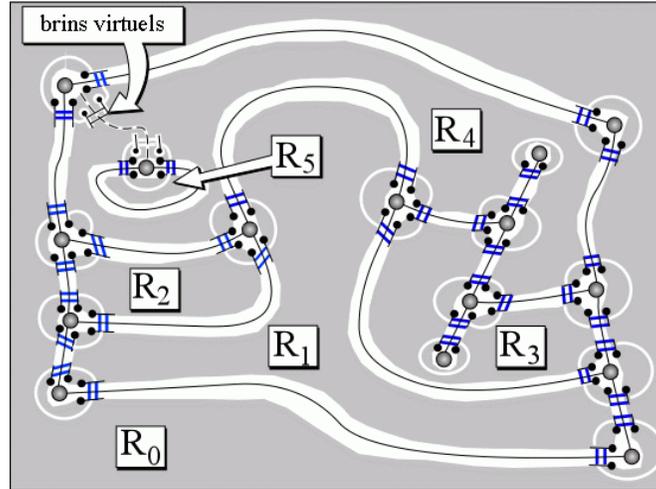


Figure 2.19: Exemple de modèle bidimensionnel construit par assemblage des Cadres d'un ensemble de lignes. Chaque région est définie par une 2-cellule. Des brins virtuels ont été ajoutés pour rendre la région  $R_4$  homéomorphe à un disque.

par assemblage des Cadres des lignes. Sa topologie est décrite par la 2-H-G-Carte résultante. Les régions  $R_0, R_1, \dots, R_5$  sont chacune définies par une 2-cellule de cette G-Carte. La liste des régions d'un modèle s'obtient alors à l'aide d'un simple algorithme de parcours de G-Cartes. La région  $R_0$  correspond au domaine de  $\mathbb{R}^2$  dans lequel est plongé le modèle et est appelée *Univers*. La région  $R_4$  a une frontière interne et ne peut donc être définie par une cellule : c'est un polygone avec un trou. Des brins virtuels reliant le bord interne au bord externe du polygone sont alors ajoutés pour rendre cette région homéomorphe à un disque.

Les H-G-Cartes ne permettent pas toutefois de représenter toutes les configurations non-variétés. Elles sont en cela moins puissantes que les chaînes de G-Cartes définies par Elter [Elt94], mais se révèlent suffisantes pour traiter les cas rencontrés en géologie.

## 2.5 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre comment construire des objets cellulaires variétés de dimension quelconque à l'aide de G-Cartes. Ces G-Cartes vont donc nous permettre de représenter la plupart des objets rencontrés en géologie. Les algorithmes de construction, de modification et de parcours de G-Cartes sont génériques. Cette genericité permet d'utiliser le même code de base pour manipuler des objets de dimensions différentes. Un noyau topologique basé sur les G-Cartes sera ainsi de taille réduite et donc facile à maintenir. Ces algorithmes pourront être interfacés de manière

à rendre leur emploi plus transparent pour l'utilisateur sans devoir faire face à une explosion exponentielle du code : des cellules comme des sommets, des arêtes ou encore des polygones sont manipulées et non directement les brins.

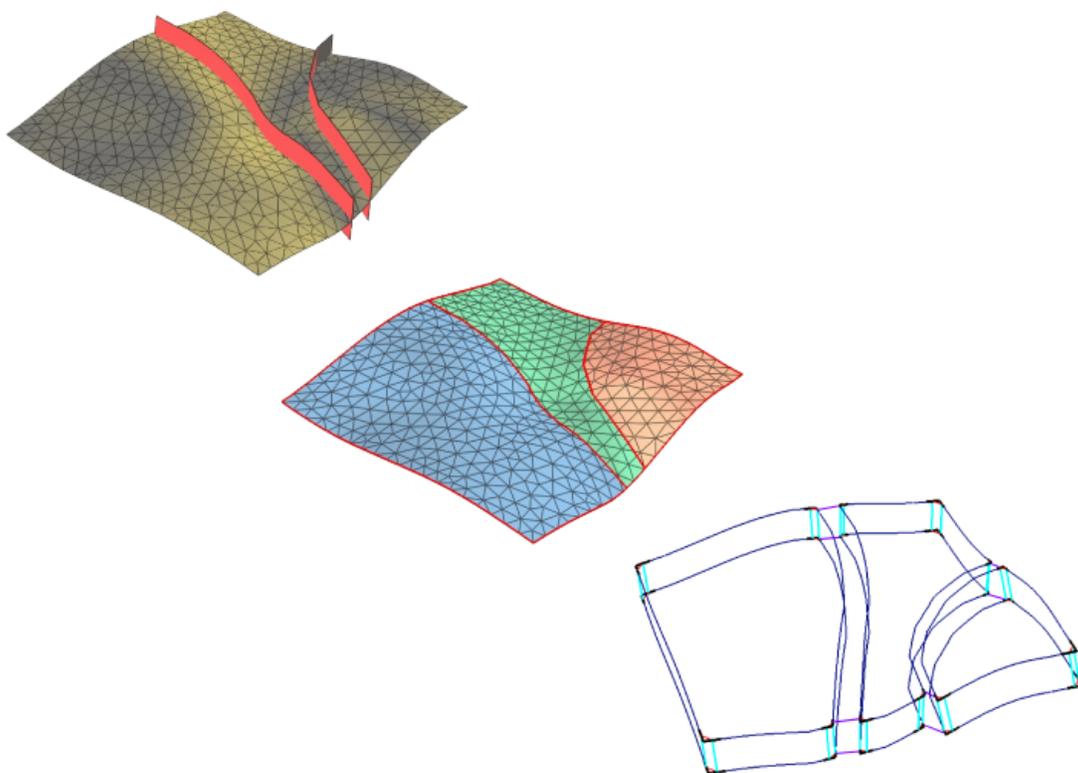
Avec les H-G-Cartes, une distinction nette est faite entre la subdivision d'un objet en cellules, décrite par sa Toile et la représentation de ses relations d'adjacence avec les autres objets de même dimension par son Cadre. Un  $n$ -modèle se construit en assemblant plusieurs Cadres de dimension  $n$  le long de leurs bords. La  $n$ -G-carte résultante décrit la topologie du modèle et donc la partition de l'espace en régions. La géométrie d'une région est donnée par les Toiles des Cadres qui ont été utilisés pour former cette région. Cependant, les H-G-Cartes ne permettent pas de gérer les frontières internes de régions sans l'ajout de brins virtuels (ou de toute autre structure permettant de faire le lien entre la frontière externe et les frontières internes d'une région), ce en quoi pâtit l'élégance mathématique du concept des Cartes Généralisées.

Enfin, le Cadre d'un objet donné pourra être plongé différemment selon la nature de sa Toile. Dans le chapitre suivant, nous allons définir un nouveau type de plongement avec la notion de Trimmed-TSurf. Les Trimmed-TSurfs nous permettront de construire un modèle géologique sans avoir à couper explicitement les surfaces qui le composent. La modification des modèles en sera ainsi facilitée.



# Chapitre 3

## Trimmed Triangulated Surfaces



## 3.1 Introduction

### 3.1.1 Rappel du problème

Nous avons vu dans le chapitre 1 que les régions d'un modèle géologique dans le logiciel GOCAD étaient définies par leurs frontières, c'est-à-dire par un ensemble de surfaces triangulées. Pour que les régions d'un modèle puissent être correctement caractérisées, ces surfaces doivent être jointives et respecter la condition de non-intersection introduite par Requicha [Req80]. Elles ne sont autorisées à se couper qu'au niveau de leurs bords, leurs bords qu'au niveau de leurs extrémités et les points d'intersection doivent être disjoints. Cette condition est valable aussi bien pour les représentations des modèles basées sur les arêtes radiales de Weiler [Wei86a] que pour celles basées sur les H-G-Cartes de Lévy [Lev99]. Elle est remplie en utilisant les algorithmes de découpage exact et de découpage contraint définis par Euler [Eul99].

Cette contrainte de non-intersection rend la mise à jour des modèles géologiques relativement ardue. Toute modification géométrique et/ou topologique effectuée sur un modèle, comme par exemple la translation d'un horizon le long d'une faille, nécessite une retriangulation importante des interfaces du modèle. Les cicatrices liées aux intersections de l'horizon avec les autres surfaces du modèle, doivent d'abord être retirées. Une fois la cohérence du modèle rétablie après translation de l'horizon, nous devons ensuite nous assurer que la clause de non-intersection est bien respectée. Les algorithmes de découpage exact et contraint sont utilisés à cet effet. Toutes ces opérations successives sur le maillage des surfaces peuvent altérer les informations qui y sont stockées, ce que nous voulons à tout prix éviter. Ainsi, il nous a semblé intéressant de développer une méthode de mise à jour des modèles qui évite des opérations successives de triangulation.

Le Cadre d'une surface permet de décrire les relations d'adjacence existant entre cette surface et les autres surfaces d'un modèle. Le plongement géométrique d'un Cadre est délégué à sa Toile. Dans la représentation utilisée par Lévy, la Toile d'une surface est une description par une 2-G-Carte de sa décomposition en cellules. D'autres types de plongements peuvent être envisagés pour prendre en compte les intersections, sans avoir à retriangler les surfaces à chaque modification du modèle. Dans ce chapitre, nous allons définir un nouveau type de surface que nous appellerons *Trimmed-TSurf* pour *Trimmed Triangulated Surface* en référence aux *trimmed-surfaces*.

### 3.1.2 Un bref aperçu sur les trimmed-surfaces

Les trimmed-surfaces sont couramment utilisées dans le domaine de l'infographie pour la conception d'objets manufacturés. Ce sont des surfaces paramétriques dont certains domaines ont été masqués, ce qui permet de construire par exemple des surfaces trouées ou tronquées [Far87, Cas87]. Ces domaines sont délimités par des courbes

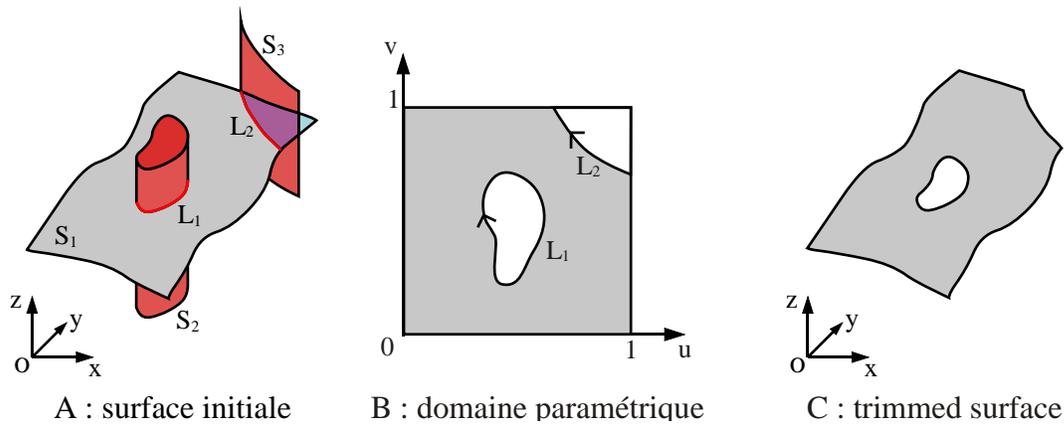


Figure 3.1: Construction d'une trimmed-surface à partir de trois surfaces paramétriques. A : la surface  $S_1$  est coupée par  $S_2$  et  $S_3$  le long des lignes  $L_1$  et  $L_2$ . B : Les trimming-curves  $L_1$  et  $L_2$  sont deux lignes orientées qui subdivisent le domaine paramétrique en trois sous-domaines. Seul l'intérieur des trimming-curves (en gris) est plongé dans  $\mathbb{R}^3$  pour donner la trimmed-surface affichée en C.

paramétriques orientées appelées *trimming-curves*. La figure 3.1 montre un exemple de construction d'une trimmed-surface à partir de trois surfaces paramétriques  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ .  $S_1$  est coupée par  $S_2$  et  $S_3$  le long des lignes d'intersection  $L_1$  et  $L_2$  respectivement. Ces deux lignes peuvent être aussi bien dessinées sur la surface  $S_1$  que dans le domaine paramétrique  $[0, 1] \times [0, 1]$  (cf. figure 3.1B). Les deux trimming-curves  $L_1$  et  $L_2$  sont orientées et subdivisent le domaine paramétrique en trois sous-domaines. Par définition, l'extérieur d'une trimming-curve se trouve à notre droite, si nous la parcourons dans son sens positif. Il correspond à une partie masquée de la trimmed-surface. Seul le domaine affiché en gris est plongé dans  $\mathbb{R}^3$  pour donner la trimmed-surface dessinée sur la figure 3.1C. Une représentation discrète, généralement une triangulation, est utilisée pour dessiner une trimmed-surface sur l'écran [RHD89, KM95, AJD97].

### 3.1.3 Trimmed Triangulated Surfaces

Le nouvel objet que nous allons présenter dans ce chapitre, la Trimmed-TSurf, est une transposition du principe des trimmed-surfaces paramétriques aux surfaces triangulées. Une Trimmed-TSurf est construite à partir d'une surface triangulée connexe qui pourra être ouverte ou fermée et contenir un ou plusieurs trous. Elle est subdivisée par un nombre fini de trimming-curves en plusieurs domaines, appelés régions. Une trimming-curve est définie comme une ligne polygonale fermée, orientée, plongée topologiquement et géométriquement dans la surface triangulée. Chaque trimming-curve prise individuellement, divise la surface en deux sous-domaines : son intérieur et son extérieur. Une région d'une Trimmed-TSurf pourra être délimitée par une ou plusieurs trimming-curves.

Nous avons choisi de ne pas définir l'intérieur d'une trimming-curve dans le domaine paramétrique  $[0, 1] \times [0, 1]$  contrairement à ce qui est fait classiquement avec les trimmed-surfaces, même si des outils de paramétrisation existent pour les surfaces triangulées [Flo97, LM98, Lev99, DMA02] ou encore plus généralement pour les surfaces polygonales [Lev01b]. Deux raisons principales ont orienté notre choix :

- La paramétrisation d'une surface faillée exige un minimum d'intervention de la part de l'utilisateur. Il doit s'assurer que la paramétrisation est bien continue de part et d'autre des failles : les surfaces faillées doivent être jointives dans le domaine paramétrique. Nous voulons que la construction d'un modèle géologique à partir de Trimmed-TSurfs soit la plus simple possible pour l'utilisateur.
- Une bulle de sel, une lentille gréseuse ou encore un corps minéralisé sont décrits par des surfaces fermées qui ne peuvent pas être paramétrisées, sauf par morceaux. Caumon [Cau02] utilise une paramétrisation locale pour modifier un modèle géologique au voisinage d'une faille. Les traces des horizons en contact avec cette faille sont décrites par une courbe paramétrique dans un domaine paramétrique 2D défini sur une partie de la faille. Il est alors possible de faire glisser un horizon le long de la faille en manipulant la courbe qui lui est associée. La faille est retriangulée dans le domaine paramétrique après chaque modification pour respecter la condition de non-intersection. Si une paramétrisation locale permet de résoudre ce genre de problèmes, elle n'est en revanche pas suffisante pour construire une Trimmed-TSurf à partir d'une surface fermée.

Nous utiliserons donc les relations topologiques reliant les trimming-curves à la surface dans laquelle elles sont plongées, pour définir les régions d'une Trimmed-TSurf.

## 3.2 Intérieur et extérieur d'une courbe polygonale

Dans cette section, nous aborderons les problèmes liés à la transcription du principe des trimmed-surfaces paramétriques aux surfaces triangulées, à savoir comment définir et identifier l'intérieur et l'extérieur d'une ligne polygonale fermée tracée sur une surface triangulée ou plus généralement, sur une surface polygonale.

### 3.2.1 Quelques définitions préliminaires

#### Courbe polygonale

Une courbe polygonale  $L$  peut être décrite comme une suite de cellules  $\{c_0, c_1, \dots, c_{2n}\}$  incidentes deux à deux qui sont alternativement des sommets pour les cellules d'indice pair et des arêtes pour les cellules d'indice impair. Une courbe est fermée si  $c_0 \equiv c_{2n}$ . Une courbe est simple, si toutes ses cellules sont distinctes, hormis, si elle est fermée, ses deux extrémités.

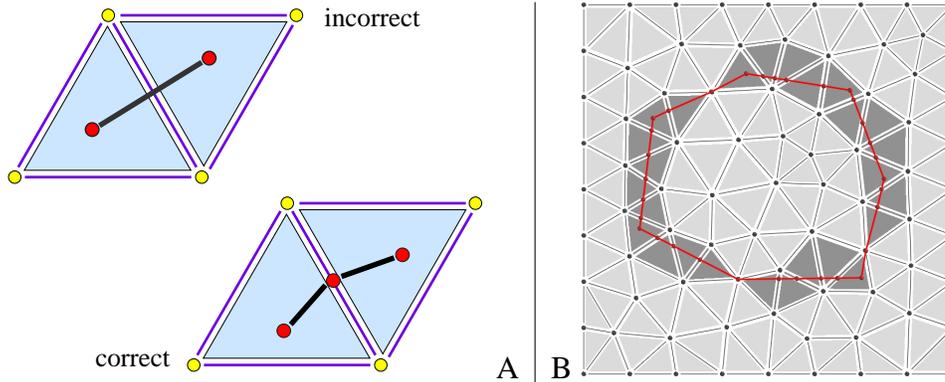


Figure 3.2: A : Plongement d'une ligne polygonale dans une surface. B : Chemin d'une ligne polygonale plongée dans une surface triangulée. Les cellules de la surface traversées par la ligne sont peintes en gris foncé.

### Plongement d'une courbe polygonale dans une surface polygonale

Soit  $L$ , une courbe polygonale tracée sur une surface polygonale  $S$ . Pour que le cheminement de la ligne  $L$  sur  $S$  puisse être correctement décrit, le plongement géométrique de ses cellules ne doit pas être quelconque : tout point de  $L$  doit appartenir à la surface  $S$ . En particulier :

- Chaque sommet de  $L$  est contenu dans le domaine plan défini par un polygone de la surface  $S$ , arêtes et sommets inclus. Un sommet pourra donc être plongé dans :
  - un sommet, s'il partage la même position géométrique que celui-ci ;
  - une arête, extrémités exclues, s'il est contenu dans le segment géométrique ouvert défini par cette arête ;
  - un polygone, arêtes et sommets exclus, s'il appartient au domaine géométrique ouvert défini par ce polygone.
- Chaque arête est contenue dans le domaine plan d'un seul et unique polygone. En haut de la figure 3.2A, le plongement de l'arête n'est pas correct : ses deux extrémités sont plongées dans deux triangles différents. Si nous coupons cette arête en insérant un sommet à la jonction des deux triangles, nous obtenons deux arêtes correctement plongées (cf. le bas de la figure 3.2A). Une arête pourra être plongée dans :
  - une arête, extrémités exclues si l'ensemble de ses points est contenu dans le segment géométrique ouvert défini par cette arête ;
  - un polygone, arêtes et sommets exclus si l'ensemble de ses points appartient au domaine géométrique ouvert défini par ce polygone.

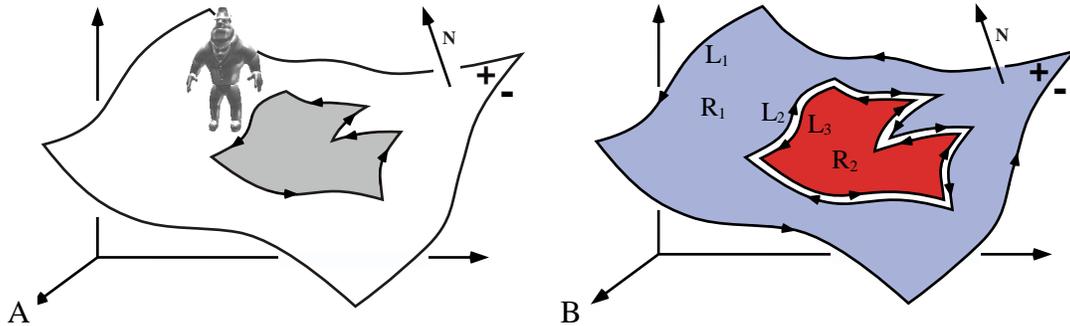


Figure 3.3: A : Détermination de l'intérieur d'une ligne fermée, tracée sur une surface en fonction de leur orientation respective. B : La région  $R_1$  a comme frontière externe la ligne  $L_1$  qui est orientée positivement et comme frontière interne la ligne  $L_2$  qui est orientée négativement. La région  $R_2$  est délimitée par la ligne  $L_3$  qui est orientée positivement.

Quand ces conditions sont remplies, le cheminement de la courbe  $L$  sur la surface  $S$  peut être décrit comme la suite finie des cellules de  $S$  successivement traversées par ses sommets et ses arêtes, ce qui est illustré par la figure 3.2B.

### Théorème de Jordan

*Toute courbe continue, fermée et simple sépare le plan en deux régions disjointes. L'une, bornée, est appelée intérieur de la courbe et l'autre, non-bornée, est appelée extérieur de la courbe. Une telle courbe est aussi appelée Courbe de Jordan.*

De même, si nous traçons une ligne polygonale simple et fermée sur une surface polygonale homéomorphe à un disque, nous subdivisons cette dernière en deux domaines finis que nous appellerons aussi intérieur et extérieur de la ligne. Un promeneur se déplaçant sur le côté positif de la surface (donné par sa normale) et longeant la ligne suivant son sens positif aura par convention l'intérieur à sa gauche et l'extérieur à sa droite (cf. figure 3.3A).

### Lignes et régions

Nous pouvons définir des domaines plus complexes en utilisant plusieurs lignes. Une région donnée pourra avoir plusieurs bords : une frontière externe et une ou plusieurs frontières internes. Si nous voulons que le domaine délimité par ces lignes soit toujours sur leur gauche, celles-ci doivent être orientées convenablement par rapport à la surface. Si nous nous plaçons du côté positif de la surface, nous devons avoir (cf. figure 3.3B) :

- la frontière externe orientée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Cette orientation sera dite positive.

- la ou les frontières internes, si elles existent, orientées dans le sens des aiguilles d'une montre. Cette orientation sera dite négative.

### Extension à d'autres types de surfaces

Les surfaces modélisées par les géologues ne sont pas forcément homéomorphes à un domaine plan. Nous aimerions donc étendre le concept des Trimmed-TSurfs à d'autres types de surfaces. Nous devons être capables de déterminer pour chaque surface rencontrée, si nous pouvons construire une Trimmed-TSurf à partir de cette surface et le cas échéant, de proposer une méthode appropriée. L'analyse de ses caractéristiques topologiques nous sera en cela un outil très utile :

- **Nombre de composantes connexes.** Un horizon ou une faille peut être décrit par un ensemble de surfaces connexes. Le nombre de composantes connexes d'une surface se détermine facilement en traversant les brins de sa Toile : l'ensemble des brins d'une 2-G-Carte connexe  $\mathcal{G}(\mathcal{B}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$  s'obtient en parcourant l'orbite  $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \rangle$  d'un de ses brins. Il suffit donc de compter le nombre de fois que ce parcours d'orbite est nécessaire pour traverser tous les brins de la surface. Nous traiterons chaque composante connexe d'une surface séparément.
- **Orientabilité.** À la suite d'une erreur de manipulation, le géologue peut construire des surfaces qui ne sont pas orientables. De telles surfaces ne sont pas rencontrées dans la nature et doivent être éliminées ou corrigées. Nous avons déjà vu dans le chapitre 2 comment détecter si une G-Carte est orientable en parcourant l'ensemble de ses brins. Nous supposons que toutes les surfaces rencontrées par la suite seront orientables. Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, il ne nous est pas possible de déterminer l'intérieur et l'extérieur d'une ligne tracée sur une surface car nous utilisons pour cela leurs orientations respectives.
- **Nombre de bords.** Certaines surfaces peuvent être fermées comme par exemple une bulle de sel ou une lentille gréseuse : ces surfaces n'ont pas de bords. D'autres surfaces peuvent avoir au contraire plusieurs bords, les bords internes délimitant des trous. Soit  $S$  une surface connexe décrite par une 2-G-Carte  $\mathcal{G}_S(\mathcal{B}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ .  $S$  est fermée si  $\mathcal{G}_S$  ne présente pas de points fixes pour les involutions  $\alpha_2$ , elle est ouverte dans le cas contraire :

$$\mathcal{G}_S \text{ est fermée} \Leftrightarrow \forall b \in \mathcal{B}, \alpha_2(b) \neq b$$

Si  $S$  est ouverte, le nombre de ses bords peut être déterminé en construisant la 1-G-Carte  $\mathcal{G}_L(\mathcal{B}', \alpha'_0, \alpha'_1)$  de ses bords et en comptant le nombre de ses composantes connexes.  $\mathcal{G}_L$  est définie par :

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{B}' = \{b \in \mathcal{B} / \alpha_2(b) = b\}; \\ \alpha'_0 = \alpha_0 / \mathcal{B}'; \\ \forall b, b' \in (\mathcal{B} \times \mathcal{B}'), \alpha'_1(b) = b', \text{ avec } b \neq b', \text{ et } b' \in \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle (b) \end{array} \right.$$

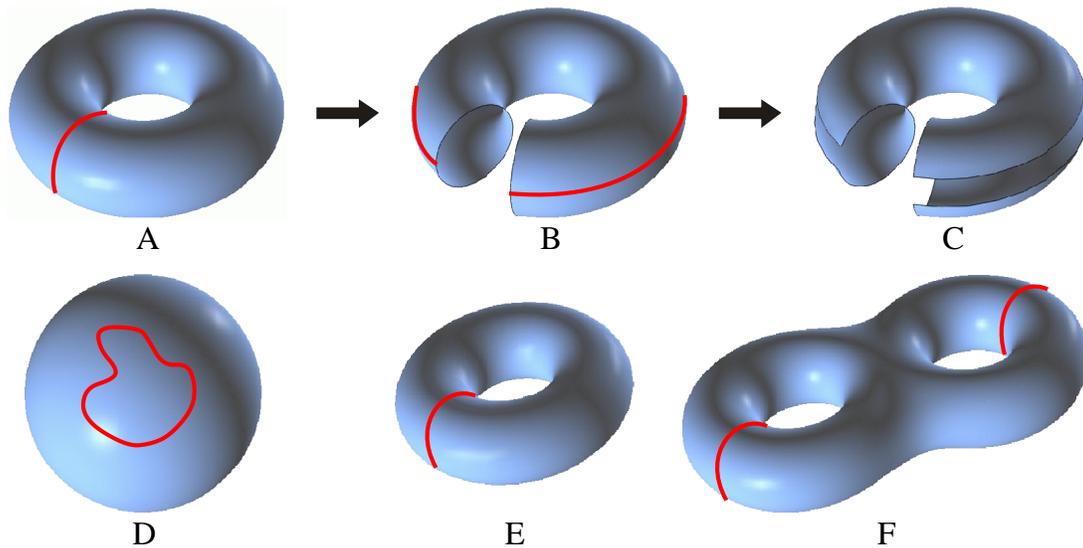


Figure 3.4: *A, B, C : Découpage d'un tore par deux courbes. D, E, F : Le genre d'une surface orientable est égal au nombre maximal de courbes de Jordan pouvant y être tracées sans la subdiviser en deux parties disjointes. Une sphère (D) est une surface de genre 0, un tore (E) une surface de genre 1 et enfin plus généralement un tore à  $n$ -trous (F) une surface de genre  $n$ .*

Chaque composante connexe du bord est une courbe de Jordan : un trou pourra donc être défini comme une région particulière d'une surface.

- Caractéristique d'Euler-Poincaré.** La caractéristique d'Euler-Poincaré  $\chi(S)$  d'une surface  $S$  est donné par la somme suivante :  $\chi = V(S) - E(S) + P(S)$  où  $V(S)$  est égal au nombre de ses sommets,  $E(S)$  au nombre de ses arêtes et  $P(S)$  au nombre de ses polygones. Par exemple, elle est égale à 0 pour un tore, à 1 pour une surface plane et à 2 pour une sphère. Nous utiliserons cette caractéristique topologique pour calculer le genre de la surface.
- Genre.** Une courbe simple fermée tracée sur un tore ne le subdivise par forcément en deux parties distinctes. Par exemple, si un tore est découpé le long d'un de ses méridiens, la surface obtenue est d'un seul tenant et homéomorphe à un cylindre (cf. figure 3.4B). Si ce cylindre est de nouveau découpé selon une de ses lignes directrices, la surface résultante est toujours connexe et homéomorphe à un disque (cf. figure 3.4C). Le genre d'une surface orientable est égal au nombre maximal  $g$  de courbes simples fermées et ne se recoupant pas qui peuvent être tracées sur cette surface sans la subdiviser en deux parties connexes.
  - Une sphère est une surface close de genre 0. La moindre courbe fermée dessinée sur une sphère la découpe en deux morceaux (cf. figure 3.4A).
  - Un tore est une surface close de genre 1. Une courbe tracée le long d'un

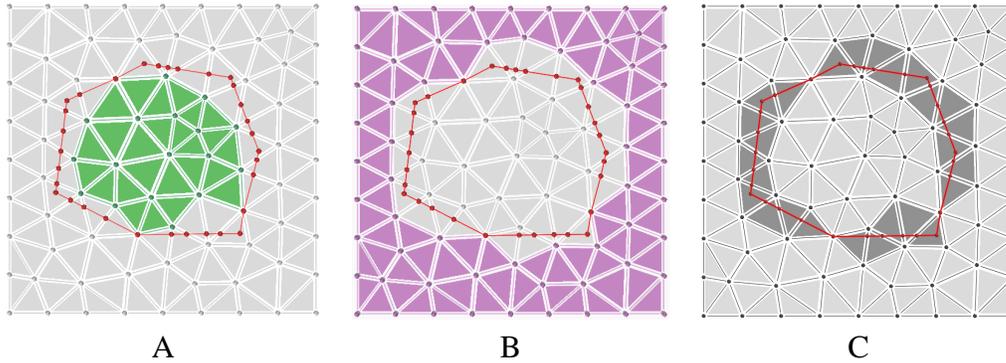


Figure 3.5: *Intérieur (A) et extérieur topologique (B) d'une ligne polygonale plongée dans une surface triangulée. En (C), sont affichées les cellules de la surface traversées par la ligne.*

méridien ou d'un parallèle d'un tore ne le sépare pas en deux parties (cf. figure 3.4B).

- Plus généralement, un tore à  $n$ -trous est une surface de genre  $n$  (cf. figure 3.4C).

Le genre d'une surface  $S$  connexe et orientable peut être calculé à l'aide des invariants topologiques que nous avons définis précédemment. Si  $\chi(S)$  est sa caractéristique d'Euler-Poincaré et  $b(S)$  son nombre de bords, son genre  $g(S)$  est alors obtenu par la formule suivante :

$$g(S) = 1 - \frac{\chi(S) + b(S)}{2}$$

Une courbe fermée tracée sur une surface de genre supérieur à 1 ne correspondra pas forcément à une frontière entre deux domaines. L'algorithme que nous allons proposer dans les sections suivantes ne tient pas compte actuellement de ces cas particuliers. Une analyse de la liste des cellules de la surface successivement traversées par la ligne devra être utilisée pour détecter ces configurations.

### 3.2.2 Définition du problème

Soit  $L$  une ligne polygonale fermée, correctement plongée dans une surface polygonale  $S$ .  $L$  et  $S$  sont respectivement décrites par une 1-G-Carte  $\mathcal{G}_L$  et par une 2-G-Carte  $\mathcal{G}_S$ . Nous supposons que cette ligne ne s'auto-intersecte pas et qu'elle est orientée tout comme la surface  $S$ . Nous admettrons aussi que la ligne  $L$  subdivise bien la surface  $S$  en deux sous-domaines correspondant à son intérieur et à son extérieur, condition qui sera toujours vérifiée si la surface  $S$  est de genre 0. Nous aimerions autant que possible retrouver l'intérieur et l'extérieur de  $L$  d'une manière combinatoire en utilisant les relations topologiques associant la ligne avec la surface.

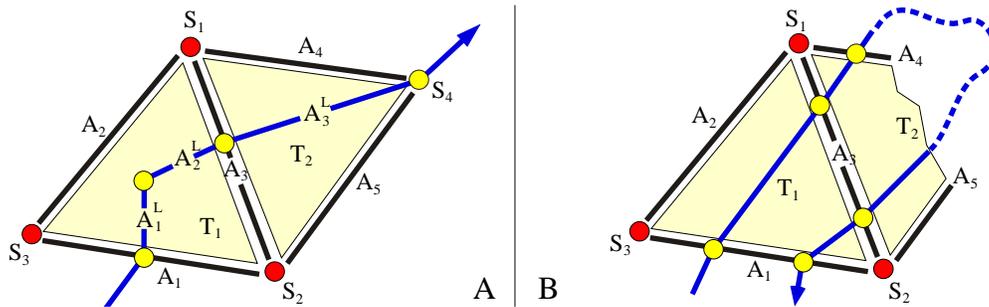


Figure 3.6: Analyse du parcours de deux lignes dans une surface triangulée.

Une cellule de la surface  $S$  (un sommet, une arête ou un polygone) pourra aussi bien se retrouver :

- Dans le domaine intérieur de la ligne si tous ses points appartiennent à cette région. Nous appellerons intérieur topologique de  $L$ , l'ensemble des cellules de  $S$  qui sont dans cette situation (cf. figure 3.5A).
- Dans le domaine extérieur de  $L$ , si tous ses points sont contenus dans cette région. Nous appellerons extérieur topologique de  $L$ , l'ensemble des cellules de  $S$  qui sont dans cette situation (cf. figure 3.5B).
- À cheval entre ces deux domaines si elle est traversée par la ligne (cf. figure 3.5C). Elle est alors subdivisée en plusieurs parties connexes qui appartiennent soit à l'intérieur soit à l'extérieur de  $L$ .

Pour construire l'intérieur et l'extérieur de la ligne  $L$ , il suffit de rechercher dans un premier temps, son intérieur et son extérieur topologiques. Il reste alors à subdiviser chaque cellule de  $S$  traversée par la ligne  $L$  et d'attribuer les portions d'arête et de polygone ainsi construites au bon domaine. Nous consacrerons les deux sections suivantes à la résolution de ces deux problèmes.

### 3.2.3 Intérieur et extérieur topologiques d'une ligne

Dans cette section, nous allons définir un algorithme générique pour parcourir les cellules de l'intérieur et de l'extérieur topologiques d'une ligne polygonale simple fermée, tracée sur une surface polygonale. Nous reprenons les notations de la section précédente à savoir  $L$ ,  $S$  et  $\mathcal{G}_S$  pour la ligne, la surface et sa Toile respectivement.

#### Données initiales

En supposant que le plongement topologique de chaque cellule de la ligne  $L$  est connu, nous pouvons aisément construire en parcourant la ligne suivant son sens positif, la

liste des cellules de la surface  $S$  qui sont successivement traversées par  $L$ . Ces informations nous serviront à déterminer l'intérieur et l'extérieur de la ligne  $L$ .

Considérons l'exemple montré sur la figure 3.6A, d'une portion de ligne plongée dans une surface triangulée et composée de trois arêtes  $A_1^L$ ,  $A_2^L$  et  $A_3^L$ .  $A_1^L$  part de l'arête  $A_1$ , se termine dans le triangle  $T_1$  et est plongée dans  $T_1$ .  $A_2^L$  commence dans le triangle  $T_1$ , se termine sur l'arête  $A_2$  et est plongée dans  $T_1$ . Enfin,  $A_3^L$  part de  $A_2$ , se termine sur le sommet  $S_4$  et est plongée dans le triangle  $T_2$ . La liste des cellules traversées par cette portion de ligne est donc  $\{\dots, A_1, T_1, A_2, T_2, S_4, \dots\}$ . Si la ligne est fermée, le premier élément de cette liste sera égal au dernier. Une cellule donnée de la surface peut être traversée plusieurs fois par la même ligne : elle se retrouvera alors autant de fois dans la liste comme c'est le cas pour l'exemple de la figure 3.6B. La liste obtenue  $\{\dots, A_1, T_1, A_3, T_2, A_4, \dots, T_2, A_3, T_1, A_1, \dots\}$  contient deux fois les cellules  $A_1$ ,  $A_3$ ,  $T_1$  et  $T_2$ .

Cette liste étant constituée de cellules de dimensions hétérogènes, elle n'est pas directement exploitable pour déterminer l'intérieur et l'extérieur topologiques de la ligne  $L$ . Nous utiliserons donc pour cela une autre représentation.

### Vers une approche de parcours de graphe

Réalisons maintenant la triangulation barycentrique de la surface  $S$ , mais en nous focalisant cette fois-ci sur les sommets et les arêtes plutôt que sur les triangles :

- Chaque sommet est remplacé par un sommet numéroté (0).
- Au milieu de chaque arête, est inséré un sommet numéroté (1). Ce sommet est relié à ses deux voisins numérotés (0).
- Au barycentre de chaque polygone est inséré un sommet numéroté (2). Ce sommet est ensuite relié à ses voisins numérotés (0) et (1) pour trianguler le polygone.

Nous obtenons un graphe numéroté où chaque nœud correspond à une cellule de  $S$  : un sommet est représenté par un nœud numéroté (0), une arête par un nœud numéroté (1) et un polygone par un nœud numéroté (2). Les relations de bords entre ces cellules sont décrites par les arcs du graphe. Un nœud  $n_i$  associé à une  $i$ -cellule  $c_i$  est relié à un nœud  $n_k$  associé à une  $k$ -cellule  $c_k$  par un arc  $(i, k)$  si et seulement si :

$$\left| \begin{array}{l} i > k \text{ et } c_k \text{ est incluse dans le bord de } c_i \\ i < k \text{ et } c_k \text{ est incluse dans l'étoile de } c_i \end{array} \right.$$

Connaissant la liste des cellules de  $S$   $\{c_1, \dots, c_k, \dots, c_N\}$  successivement traversées par la ligne  $L$  et les nœuds du graphe  $\{n_1, \dots, n_k, \dots, n_N\}$  correspondant à ces cellules, nous pouvons aisément transcrire le cheminement de  $L$  par une chaîne  $C$  orientée

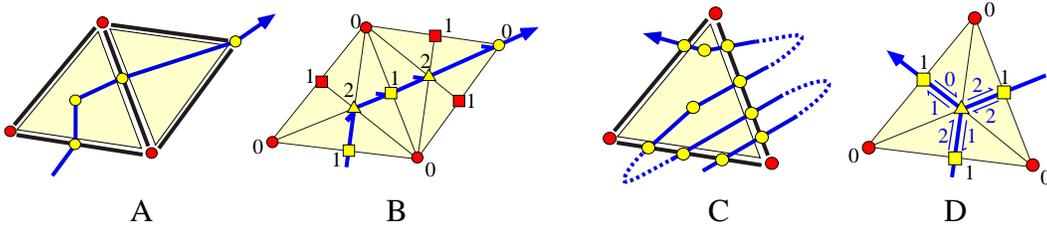


Figure 3.7: Le plongement d'une ligne polygonale dans une surface triangulée est décrit par un chemin orienté dans le graphe construit à partir de la triangulation barycentrique de la surface. Un arc polygonal peut être traversé plusieurs fois : deux compteurs sont associés à chaque arc pour comptabiliser le nombre de passages dans les deux sens.

dans le graphe. Cette chaîne est formée d'une séquence alternée  $\{n_1, a_1, n_2, \dots, n_{N-1}, a_{N-1}, n_N\}$  des nœuds  $n_k$  et des arcs  $a_k$  qui les relient (cf. figure 3.7). La ligne  $L$  étant fermée, nous avons  $n_1 = n_N$ .

Contrairement à la ligne  $L$ , la chaîne  $C$  n'est pas forcément simple. Si le tracé géométrique de la ligne  $L$  sur la surface  $S$  peut se faire avec une précision limitée seulement par le codage des nombres réels par les ordinateurs, la résolution de sa représentation topologique dans le graphe est en revanche contrôlée par la taille des cellules de  $S$ . Quand une cellule de la surface est traversée plusieurs fois par la ligne, le nœud qui lui est associé est répété autant de fois dans la chaîne. La chaîne  $C$  contient alors plusieurs cycles qui sont autant de sous-chaînes fermées et simples. Chaque cycle pris individuellement subdivise l'ensemble des nœuds du graphe en deux sous-ensembles correspondant respectivement à son intérieur et à son extérieur.

- L'intérieur topologique de  $L$  s'obtient alors facilement en réalisant l'union des intérieurs de chaque cycle de  $C$ .
- L'ensemble des cellules de  $S$  intersectées par la ligne  $L$  est donné par définition par les nœuds de la chaîne  $C$ .
- Enfin, l'extérieur topologique de  $L$  correspond au complémentaire de ses deux derniers ensembles.

Pour des raisons similaires, un arc numéroté pourra être traversé plusieurs fois dans une même chaîne, et ce, dans les deux sens comme pour l'exemple montré sur la figure 3.7C. Deux compteurs  $k_{i,j}$  et  $k_{j,i}$  sont donc associés à chaque arc  $(i, j)$  afin de dénombrer les passages dans le sens  $(i, j)$  et dans le sens  $(j, i)$  respectivement (cf. figure 3.7D). Les valeurs que pourront prendre ces compteurs ne sont pas quelconques :

- Un arc  $(0,1)$  et un arc  $(1,0)$  correspondent à une portion de ligne plongée dans une arête de la surface  $S$  et débutant d'un sommet (respectivement, se terminant sur un sommet) de cette arête (cf. figures 3.8A et 3.8B). La ligne  $L$  étant

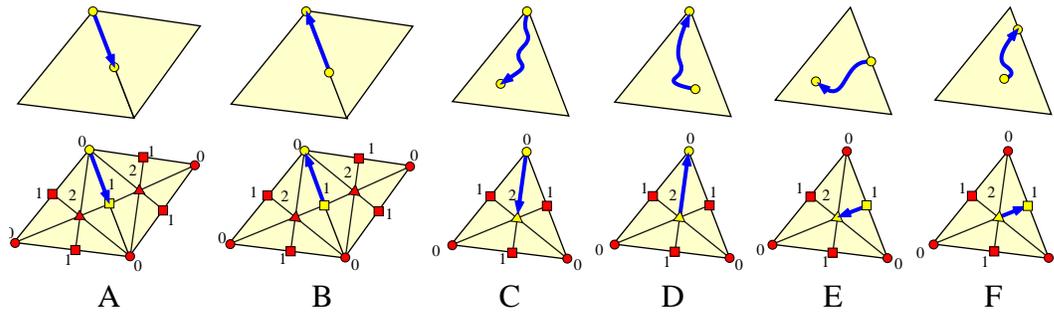


Figure 3.8: Chaque arc orienté dans le graphe est une représentation d'une portion de ligne passant d'une cellule à une autre. Sur cette figure sont représentées de gauche à droite les six configurations possibles : sommet-arête, sommet-triangle, arête-sommet, arête-triangle, triangle-sommet, triangle-arête.

supposée simple, de tels arcs ne peuvent être traversés qu'une seule fois. Leurs compteurs respectifs ne prendront que des valeurs égales à 0 ou à 1, et ce, exclusivement : si un compteur est égal à 1, l'autre est égal à 0.

- Un arc  $(0,2)$  et un arc  $(2,0)$  correspondent à une portion de ligne plongée dans un polygone de la surface  $S$  et débutant d'un sommet (respectivement, se terminant sur un sommet) de ce polygone (cf. figures 3.8C et 3.8D). La ligne  $L$  étant supposée simple, un sommet de la surface  $S$  ne peut être traversé qu'une seule fois. Les compteurs associés à ces arcs ne prendront que des valeurs égales à 0 et à 1. Un arc  $(0-2)$ , à la différence d'un arc  $(0-1)$ , pourra être parcouru deux fois de suite, dans un sens puis immédiatement dans l'autre : cette configuration décrit une portion de ligne plongée dans un unique polygone et tangentant un des sommets de ce polygone.
- Un arc  $(1,2)$  et un arc  $(2,1)$  correspondent à une portion de ligne plongée dans un polygone de la surface  $S$  et partant d'une arête (respectivement se terminant sur une arête) de ce polygone (cf. figures 3.8E et 3.8F). Cette arête peut être traversée plusieurs fois par la ligne  $L$ , de même que les arcs  $(1,2)$  et  $(2-1)$  qui lui sont associés. Si la ligne  $L$  subdivise la surface  $S$  en deux domaines distincts, nous pouvons appliquer le théorème de Jordan relativement à cette arête. Les deux sommets appartiennent :
  - tous les deux au même domaine, si elle est traversée un nombre pair de fois, et ce, autant de fois dans un sens que dans l'autre (cf. figure 3.9A).
  - l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur, si le nombre de passages est impair. L'arête est alors traversée une fois de plus dans un sens que dans l'autre (cf. figure 3.9A).

En faisant le bilan des portions de lignes qui arrivent ou qui sortent de part et d'autre de l'arête (extrémités exclues), nous pouvons déterminer les valeurs

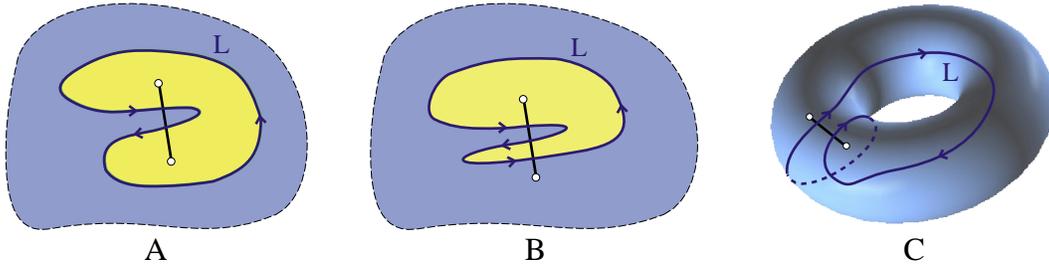


Figure 3.9: Les extrémités d'un segment appartiennent au même domaine, s'il est traversé un nombre pair de fois (autant de fois dans un sens que dans l'autre) par la courbe de Jordan (A) et à deux domaines différents, s'il est traversé un nombre impair de fois (une fois de plus dans un sens que dans l'autre) (B). La courbe en (C) n'est pas une courbe de Jordan. Le segment peut être traversé deux fois de suite dans le même sens par la ligne : notre règle sur les compteurs n'est pas applicable.

relatives prises par les compteurs associés aux arcs (1-2) et (2-1). La différence  $k_{1,2} - k_{2,1}$  ne peut être égale qu'à 0 (autant de lignes entrantes que sortantes), 1 ou -1 (une ligne de plus dans un sens que dans l'autre).

En résumé, la différence  $k_{i,j} - k_{j,i}$  entre les deux compteurs associés à un arc  $(i, j)$  ne peut prendre que des valeurs égales à -1, 0 ou 1. Nous utiliserons cette différence pour situer l'intérieur de la ligne  $L$  relativement à un arc  $(i, j)$  donné :

- $k_{i,j} - k_{j,i} = -1$  : l'arc est traversé une fois de plus dans le sens  $(i, j)$  que dans le sens  $(j, i)$ . L'intérieur de la ligne  $L$  se trouve à sa gauche.
- $k_{i,j} - k_{j,i} = 0$  : l'arc est traversé autant de fois dans le sens  $(i, j)$  que dans le sens  $(j, i)$ . Le même domaine se trouve de part et d'autre de l'arc. Seul le contexte permettra de déterminer si c'est l'intérieur ou l'extérieur.
- $k_{i,j} - k_{j,i} = 1$  : l'arc est traversé une fois de plus dans le sens  $(j, i)$  que dans le sens  $(i, j)$ . L'intérieur de la ligne  $L$  se trouve à sa droite.

Intéressons nous maintenant aux triangles. Chaque cycle de la chaîne  $C$  délimite deux ensembles de triangles adjacents deux à deux par leurs arêtes (0,1), (0,2) et (1,2). Chaque arc  $(i, j)$  de la chaîne appartient au bord d'un ou deux triangles dont nous pouvons déterminer le domaine d'appartenance avec la méthode que nous venons de présenter. Connaissant pour tous les triangles incidents à un arc de la chaîne leur domaine d'appartenance, nous pouvons aisément retrouver celui des triangles restants en suivant ces trois règles :

- deux triangles incidents à un arc ne faisant pas partie de la chaîne  $C$  appartiennent au même domaine ;
- deux triangles incidents à un arc traversé un nombre pair de fois appartiennent au même domaine ;

- deux triangles incidents à un arc traversé un nombre impair de fois appartiennent à deux domaines différents.

Nous ne travaillerons pas avec la représentation simpliciale de  $S$  mais directement sur sa Toile  $\mathcal{G}_S$  en faisant jouer les relations d'équivalence entre les simplexes de cette représentation et les orbites de  $\mathcal{G}_S$ . Pour rappel, tout simplexe construit lors de la triangulation barycentrique de la surface  $S$  peut être mis en correspondance avec une orbite de la G-Carte  $\mathcal{G}_S$  qui la décrit :

- chaque triangle numéroté  $(0, 1, 2)$  correspond à un brin de  $\mathcal{G}_S$  ;
- chaque arête numérotée  $[0, 2] - i$  correspond à une orbite  $\langle \alpha_i \rangle$  de  $\mathcal{G}_S$  ;
- chaque sommet numéroté  $(i)$  correspond à une orbite  $\langle \phi_i \rangle$  de  $\mathcal{G}_S$ .

Les deux ensembles de triangles adjacents deux à deux par des arêtes  $(0,1)$ ,  $(0,2)$  et  $(1,2)$  que nous venons d'identifier, ont pour équivalents deux ensembles de brins reliés deux à deux par des involutions  $\alpha_2$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_0$  respectivement. Nous avons donc ici tous les éléments pour définir notre algorithme.

### Algorithme de parcours de l'intérieur topologique d'une ligne

Cet algorithme dérive de l'algorithme générique de parcours d'orbite présenté dans la section 2.3.1, page 54. Il permet de retrouver les cellules d'une dimension donnée appartenant à l'intérieur topologique de  $L$ .

La ligne  $L$  est parcourue une première fois suivant son sens positif pour analyser le plongement topologique de chacune de ses cellules. Pour chaque couple (sommet, arête) et (arête, sommet) incidents deux à deux, nous pouvons rencontrer les deux configurations suivantes :

- Le sommet et l'arête sont plongés dans la même cellule de la surface  $S$ . Cette situation correspond à un chemin élémentaire stationnaire dans le graphe. Le couple suivant est analysé.
- L'arête est plongée dans une  $i$ -cellule  $c_i$  et le sommet dans  $j$ -cellule  $c_j$  du bord de  $c_i$ . Cette configuration est transcrite sous la forme d'un chemin élémentaire dans le graphe composé d'un arc  $(i, j)$  reliant les deux nœuds numérotés  $(i)$  et  $(j)$  respectivement associés aux cellules  $c_i$  et  $c_j$ .

Chaque chemin élémentaire  $(i, j)$  correspond au(x) brin(s) d'une orbite  $\langle \alpha_k \rangle$ ,  $k \in [0, 2] - \{i, j\}$  de la G-Carte  $\mathcal{G}_S$ . Ce ou ces brins peuvent être identifiés en réalisant l'intersection des deux orbites  $\langle \phi_i \rangle$  et  $\langle \phi_j \rangle$  qui définissent respectivement les cellules  $c_i$  et  $c_j$ . Nous devons ensuite déterminer si ces brins sont internes ou externes sachant qu'un arc peut être traversé plusieurs fois. La surface  $S$  étant par hypothèse

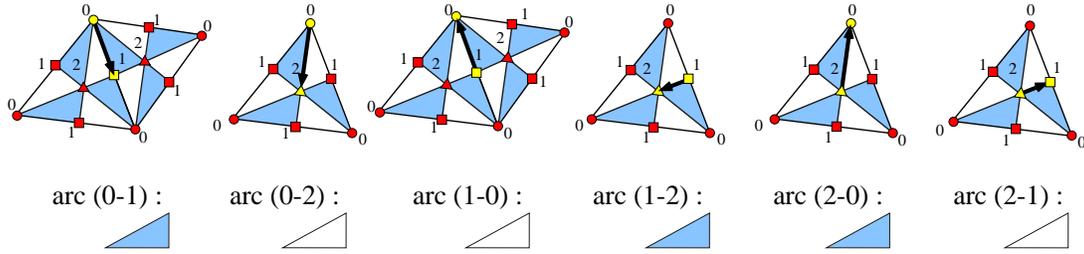


Figure 3.10: L'orientation d'une  $G$ -Carte  $\mathcal{G}$  s'effectue par marquage de ses brins deux à deux. Les brins non marqués sont représentés par des triangles peints en gris, les brins non marqués en blanc. Tout arc dans la représentation simpliciale de  $\mathcal{G}$  est associé à une orbite  $\langle \alpha_k \rangle$  dont les brins correspondent aux triangles de son étoile. Un brin, s'il est marqué, est interne pour les arcs  $(0,1)$ ,  $(1,2)$  et  $(2,0)$  et externe pour les arcs  $(0,2)$ ,  $(1,0)$  et  $(2,1)$ .

orientable, les brins de sa Toile  $\mathcal{G}_S$  peuvent être marqués de manière à respecter la règle magnétique établie dans la section 2.3.2 page 57. En particulier, pour toute orbite  $\langle \alpha_i \rangle$ ,  $i \in [0, 2]$  de  $\mathcal{G}_S$  contenant deux brins, l'un sera marqué, l'autre non. Un brin marqué est interne pour les chemins élémentaires  $(0,1)$ ,  $(1,2)$  et  $(2,0)$  et externe pour les chemins  $(1,0)$ ,  $(2,1)$  et  $(0,2)$  (cf. figure 3.10). Il nous reste plus qu'à compter le nombre de passages en chaque arc. Pour cela, nous marquons/démarquons les brins avec un autre booléen dédié à cet effet. Le marquage des brins se fait comme suit à chaque passage :

- Le brin externe est marqué.
- Le brin interne est démarqué si les deux brins le sont déjà.

Considérons un exemple avec un arc  $(i, j)$  auquel sont associés un brin  $b_1$  à sa gauche et un brin  $b_2$  à sa droite. Après un premier passage dans le sens  $(i, j)$ , le brin  $b_2$  est marqué :  $b_1$  est interne et  $b_2$  externe. Après un deuxième passage dans le sens  $(j, i)$ , le brin  $b_1$  est marqué :  $b_1$  et  $b_2$  sont tous les deux marqués et ont un statut indéterminé, le nombre de passages étant pair. Après un troisième passage dans le sens  $(i, j)$ , le brin  $b_1$  est démarqué :  $b_1$  est interne et  $b_2$  externe.

Une fois la ligne parcourue entièrement, tous les brins externes ou de statut indéterminé et associés à la ligne ont été marqués. Un deuxième parcours de la ligne est alors effectué pour retrouver les brins internes et les stocker dans une pile.

Une fois, les brins internes et les brins externes associés à la ligne  $L$  identifiés, il nous reste à déterminer le statut des autres brins. L'ensemble des brins internes est formé des brins reliés directement ou indirectement par des involutions  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  aux brins internes qui ont été déjà identifiés, et ce, dans les limites des brins externes. Cet ensemble de brins peut être traversé en adaptant l'algorithme de parcours générique

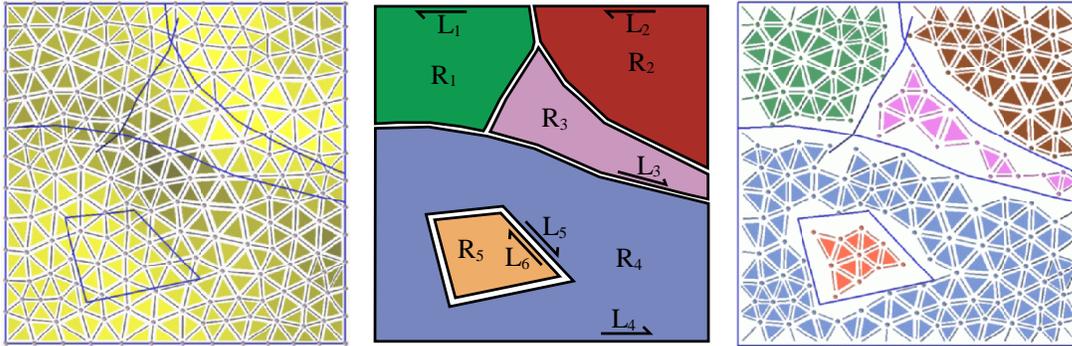


Figure 3.11: *L'algorithme de parcours peut être aussi utilisé pour détecter l'intérieur topologique d'une région délimitée par plusieurs bords à condition qu'ils soient correctement orientés.*

d'orbite. Les brins sont marqués au fur et à mesure de la progression à l'aide du même booléen que celui employé pour marquer les brins externes. La progression s'arrête ainsi dès qu'un brin marqué est rencontré. Suivant l'ordre de parcours des involutions,  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ ,  $(\alpha_0, \alpha_2, \alpha_1)$  ou  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_0)$ , l'algorithme donne respectivement l'accès à un brin par polygone, à un brin par arête ou à un brin par sommet à chaque itération. Les deux premières involutions sont utilisées pour parcourir les brins de la cellule et la dernière pour accéder à un brin des cellules adjacentes. Les étapes de l'algorithme sont résumées en annexe à la fin de ce chapitre.

Le temps de calcul de l'intérieur topologique d'une ligne croît linéairement avec le nombre de brins de la ligne et le nombre de brins de la surface :

- La ligne polygonale est parcourue deux fois pour l'analyse de son plongement dans la surface ;
- La surface est traversée au pire deux fois, une première fois pour rechercher les brins internes et identifier les cellules de l'intérieur topologique de la ligne et une deuxième pour démarquer ses brins afin de la préparer à un parcours ultérieur.

Nous pouvons aussi utiliser cet algorithme pour retrouver l'extérieur de  $L$ . Il suffit d'inverser le principe de marquage des brins : les brins internes et de statut indéterminé sont marqués et les brins externes ne le sont pas. L'ensemble des brins externes est constitué des brins reliés directement ou indirectement par des involutions  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  aux brins externes associés à la ligne, et ce, dans les limites imposées par les brins internes.

De même, l'intérieur d'une région peut être défini comme l'intersection de l'intérieur de sa frontière externe et l'intérieur de ses frontières internes. Il peut être alors directement déterminé en initialisant l'algorithme non plus avec une seule ligne, mais avec l'ensemble des frontières de la région (cf. figure 3.11).

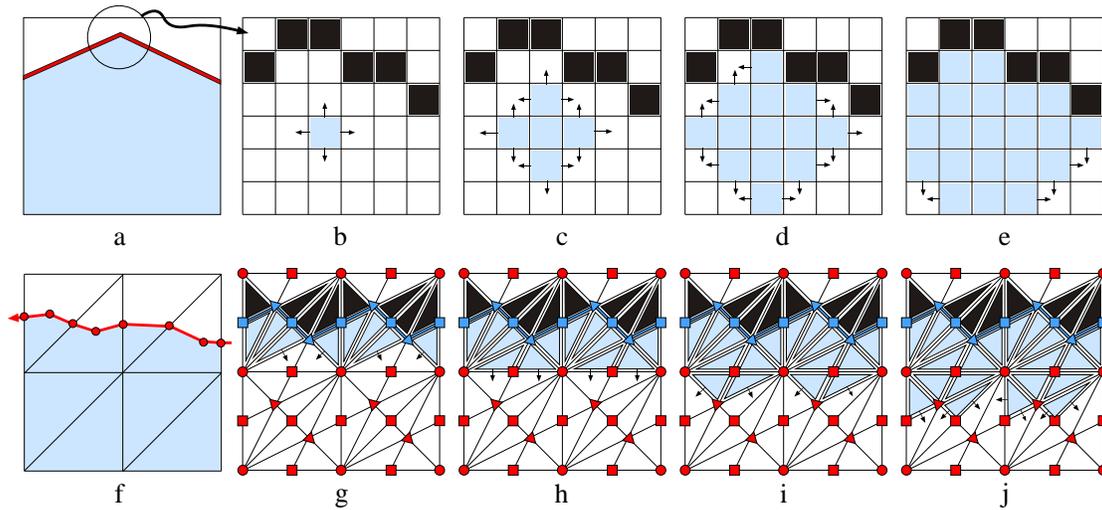


Figure 3.12: Comparaison entre un algorithme de remplissage d'un polygone utilisé dans les logiciels de dessin et notre algorithme de parcours des brins internes d'une ligne plongée dans une surface. Le bord d'un polygone (a) est représenté par un ensemble de pixels jointifs (b). Le remplissage se fait par propagation explosive de pixels en pixels adjacents par leurs arêtes à partir d'un germe (b, c, d, e). Le parcours des brins internes se fait d'une manière similaire, si nous assimilons chaque brin à un triangle : les pixels ne sont plus des rectangles, mais des triangles. La frontière entre l'intérieur et l'extérieur peut être représentée soit par des triangles jointifs (en noir, approche pixel) ou par une suite d'arêtes deux à deux adjacentes (en gris foncé, approche interpixel).

### Analogie avec l'approche interpixel [Fio95]

Le principe de cet algorithme est similaire dans son principe à celui utilisé dans les logiciels de dessins pour le coloriage de polygones. Le bord d'un polygone est défini par un ensemble de pixels d'une certaine couleur et jointifs par leurs arêtes ou leurs sommets. Le remplissage de l'intérieur du polygone se fait par propagation "explosive" à partir d'un pixel germe appartenant à l'intérieur du polygone. La propagation se fait de pixels en pixels adjacents par leurs arêtes et s'arrête dès qu'un pixel du bord ou de la couleur de remplissage est rencontré<sup>1</sup> (cf. figures 3.12 a, b, c, d, et e). Ici, les pixels ne sont pas des rectangles mais des triangles, chaque triangle correspondant à un brin de la G-Carte  $G$ . Le principe de la propagation et les conditions d'arrêt sont similaires (cf. figures 3.12 f, g, h, i, j). La propagation se fait de triangles en triangles adjacents par leurs arêtes (1,2), (0,2) et (0,1), c'est-à-dire de brins de en brins reliés respectivement par des involutions  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Elle s'arrête quand un triangle du bord ou un triangle déjà traversé est rencontré (c'est-à-dire dès qu'un brin marqué est rencontré).

<sup>1</sup>D'autres méthodes plus efficaces que la propagation explosive sont en fait utilisées dans les logiciels de dessins. Le remplissage du polygone se fait plutôt par balayage, ligne de pixels après ligne de pixels.

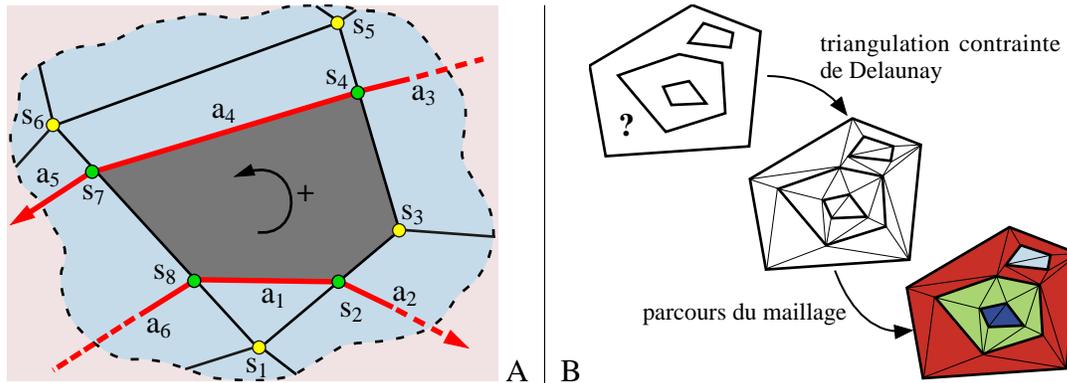


Figure 3.13: A : Principe de la construction d'une portion de polygone traversé par une ou plusieurs lignes. B : quand plusieurs lignes sont plongées exclusivement dans un seul et unique polygone, la triangulation contrainte de Delaunay peut être utilisée pour identifier chaque portion de polygone.

La frontière séparant l'intérieur de l'extérieur de la ligne  $L$  a deux représentations différentes :

- Elle est décrite par un ensemble de pixels/triangles jointifs par leurs arêtes ou leurs sommets. C'est cette représentation qui est utilisée par l'algorithme de parcours de l'intérieur et de l'extérieur d'une ligne polygonale.
- Elle est décrite par une suite d'arêtes adjacentes deux à deux. Cette suite forme une ligne circulant entre les pixels/triangles. Cette représentation est similaire à celle utilisée par Fiorio avec la méthode interpixel utilisée pour l'analyse d'images [Fio95]. Cette représentation se construit "à la volée" en parcourant la ligne  $L$  suivant son sens positif et en analysant le plongement topologique de chacune de ses cellules.

### 3.2.4 Construction des polygones

À ce stade, nous sommes capables de déterminer l'intérieur topologique d'une région. Il ne nous reste plus maintenant qu'à construire les portions de polygones intersectées par sa ou ses frontières. Nous utiliserons là encore, les relations topologiques reliant les lignes à la surface.

Considérons un exemple illustré sur la figure 3.13A, avec un polygone traversé par deux portions de lignes que nous supposons appartenir aux frontières de la même région. Construisons maintenant la partie de polygone associée à l'arête orientée  $a_1 = (s_8, s_2)$  et qui est peinte en gris foncée sur la figure. Dans un premier temps, les sommets des lignes plongés dans le bord du polygone sont triés suivant le sens positif, sommets du polygone inclus. Nous obtenons alors la liste fermée des sommets  $\{s_1, s_2, \dots, s_8, s_1\}$ . L'arête suivante de la ligne,  $a_2$ , n'est pas plongée dans le

polygone. Dans ce cas, nous recherchons le sommet qui suit immédiatement  $s_2$  dans la liste, soit  $s_3$ . La ou les ligne(s) ne passe(nt) pas par ce sommet, nous allons donc au sommet suivant :  $s_4$ . De ce sommet partent deux arêtes,  $a_3$  et  $a_4$ .  $a_4$  est plongée dans le polygone contrairement à  $a_3$  :  $a_4$  est donc choisie. L'arête suivante,  $a_5$ , n'est pas plongée dans le polygone. Le sommet qui suit immédiatement le sommet  $s_7$  dans la liste, c'est-à-dire  $s_8$ , est donc sélectionné. Comme  $s_8$  est notre point de départ, l'algorithme s'arrête. Nous avons obtenu le polygone  $(s_2, s_3, s_4, s_7, s_8)$ .

Ce polygone devra éventuellement être retriangulé pour répondre aux besoins de certains algorithmes qui ne manipulent que des triangles. Un algorithme de "découpage d'oreilles" ou de triangulation de Delaunay contrainte pourront être utilisés à cet effet [Kum96].

Une ligne peut dans certains cas être plongée dans un seul et unique polygone. Elle correspond au bord externe d'un polygone, si elle est orientée positivement ou au bord interne d'un polygone troué, si elle est orientée négativement. Nous pouvons aisément construire ces deux polygones si une seule ligne est en jeu. En revanche, il n'existe pas de solutions simples quand les lignes sont nombreuses et imbriquées les unes dans les autres. Si nous réalisons une triangulation du polygone contrainte par les arêtes des lignes, nous pouvons identifier chaque portion de polygone en nous appuyant sur le maillage ainsi construit (cf. figure 3.13B).

### 3.3 Implantation des Trimmed-TSurfs

Nous avons implanté le concept de Trimmed-TSurfs dans le modèleur basé sur les H-G-Cartes développé par Lévy et Conreux [Lev99, Con01]. Nous nous sommes limités à des surfaces triangulées pour des raisons purement pratiques : les algorithmes utilisés en amont pour la construction des Trimmed-TSurfs, comme par exemple le calcul des intersections entre deux surfaces, manipulent des simplexes et non des polygones quelconques. Il en est de même des algorithmes qui seront appliqués en aval. En effet, contrairement à un polygone de forme quelconque, un triangle est toujours plan et convexe. Ces deux propriétés diminuent considérablement la complexité des algorithmes de manipulation de surfaces au bénéfice d'une plus grande robustesse.

#### 3.3.1 Description de la structure

Une Trimmed-TSurf est définie par trois niveaux emboîtés de G-Cartes complétant ainsi la structure des H-G-Cartes de Lévy par un troisième niveau pour pouvoir décrire les *trimming-curves*.

La décomposition de la surface triangulée en cellules est décrite par une 2-G-Carte que nous appellerons Toile, reprenant ainsi la notation de Lévy pour les H-G-Cartes.

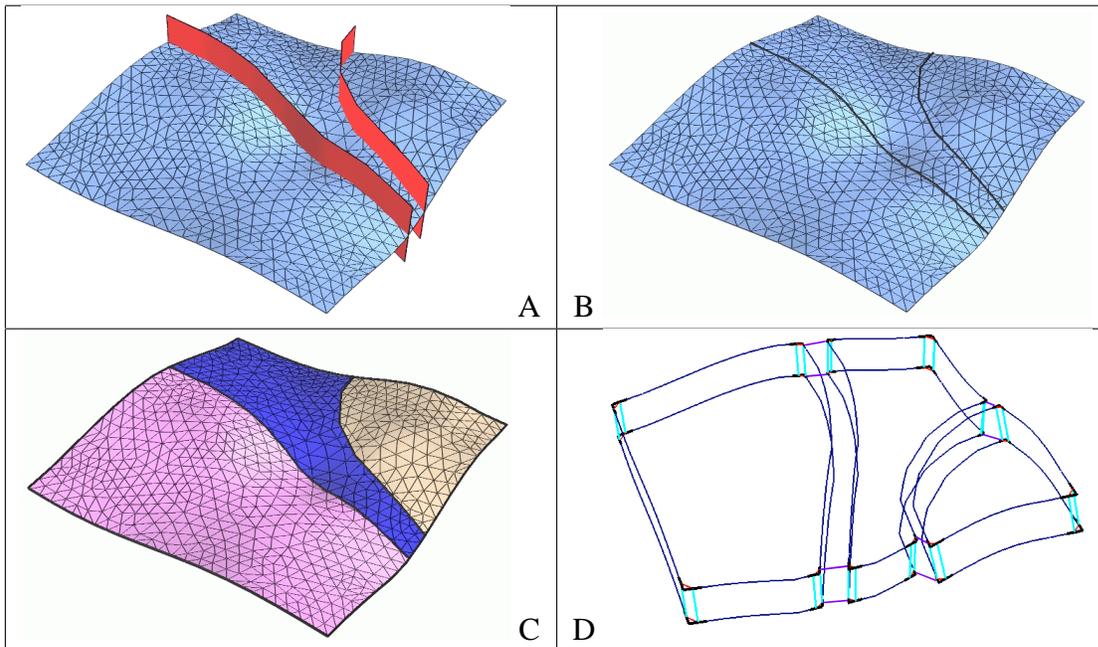


Figure 3.14: Construction de la Trimmed-TSurf associée à un horizon coupé par deux failles (A). La Trimming-Line est construite à partir des lignes d'intersection de l'horizon avec les failles (B). Elle est composée de trois polygones dont les bords subdivisent la Trimmed-TSurf en trois régions (C). Son Cadre est constitué de trois sous unités soudées par des liens  $\alpha_2$  (D). Du point de vue du Cadre, cette surface a été coupée en trois parties alors que sa triangulation n'a pas été modifiée.

C'est à ce niveau que le plongement de la Trimmed-TSurf est défini, c'est à dire sa géométrie ainsi que toutes les propriétés pétrophysiques qui lui sont attachées.

La partition de la surface en régions est décrite par sa Trimming-Line. Contrairement à ce que son nom laisserait à penser, la Trimming-Line est un objet analogue à une surface et est donc représentée par une 2-G-Carte. Elle peut être vue comme un modèle 2D plongé dans la surface triangulée. Elle fait la synthèse de toutes les relations topologiques (contact au niveau des bords, intersections) que peut partager la surface avec les autres surfaces d'un modèle donné. En conséquence, chaque cellule de la Trimming-Line est plongée géométriquement et topologiquement dans une cellule donnée de la Toile. Le plongement de la Trimming-Line sera donc défini relativement au plongement de la Toile. Elle est formée de 2-cellules jointives dont les bords sont autant de courbes polygonales simples et fermées qui seront utilisées comme *trimming-curves* pour subdiviser la surface en régions.

Enfin, le Cadre est une représentation de l'espace tridimensionnel dans lequel sont plongées chacune des régions de la Trimmed-TSurf. C'est une 3-G-Carte dont chaque 2-cellule est en correspondance avec une région donnée. Il est similaire au Cadre d'une

surface qui aurait été découpée le long des différentes *trimming-curves*, à la différence près que ses 2-cellules sont jointives. Du point de vue du Cadre, une Trimmed-TSurf est découpée virtuellement en sous-parties correspondant aux régions alors que sa triangulation reste inchangée. Chaque brin du Cadre connaît un brin de la Trimming-Line : le plongement du Cadre est délégué à la Trimming-Line et indirectement à la Toile au travers des relations topologiques reliant la Trimming-Line à la surface triangulée.

Pour illustrer ce concept, considérons un exemple avec un horizon recoupé par deux failles et construisons la Trimmed-TSurf qui lui est associée (cf. figure 3.14A). Sa Trimming-Line est construite à partir des deux lignes d'intersection de l'horizon avec les failles et de son bord. C'est une 2-G-Carte composée de trois 2-cellules dont les bords subdivisent la Trimmed-TSurf en autant de régions (cf. figure 3.14C). Son Cadre est lui-même composé de trois sous-unités reliées par des liens  $\alpha_2$  (cf. figure 3.14D). Si l'horizon avait été découpé le long des failles, les Cadres des trois surfaces résultantes auraient été identiques à ces trois sous-Cadres aux liens  $\alpha_2$  près. De même, leurs bords auraient été identiques aux bords des cellules de la Trimming-Line. Du point de vue de son Cadre, l'horizon a été subdivisé en trois parties distinctes alors que son maillage n'a pas été modifié.

### 3.3.2 Analogie avec les modèles 2D

Les Trimmed-TSurfs présentent plusieurs points communs avec les modèles 2D. Un modèle 2D est une partition d'un espace bidimensionnel en régions par un ensemble de lignes ouvertes ou fermées (cf. figure 3.15A). Dès que plus de deux lignes se rejoignent en un point, nous nous retrouvons dans une configuration non-variété. La structure des H-G-Cartes permet de décrire un modèle 2D comme un objet 2-variété en munissant chaque ligne d'un Cadre. Une fois les Cadres assemblés et les problèmes de régions internes réglés, la topologie d'un modèle est entièrement décrite par une 2-G-Carte. La liste des régions de ce modèle s'obtient alors en parcourant les 2-cellules de la G-Carte : à chaque polygone correspond une région. Une Trimmed-TSurf est une partition d'une surface triangulée, c'est-à-dire un objet 2D plongé dans un espace tridimensionnel, en régions par un ensemble de lignes fermées (cf. figure 3.15B). Chacune de ces lignes correspond au bord d'un polygone de la Trimming-Line. Le Cadre d'une Trimmed-TSurf est une 3-G-Carte dont les polygones ont leurs équivalents dans la Trimming-Line.

La construction d'un modèle 2D se fait par assemblage des Cadres d'un ensemble fini de lignes au niveau de leurs points de jonction. De même, la Trimming-Line d'une Trimmed-TSurf est construite à partir des bords de la surface triangulée qui lui est associée et les lignes d'intersection avec les surfaces voisines. Les problèmes liés à la construction d'une Trimming-Line seront donc proches de ceux rencontrés lors de l'assemblage d'un modèle 2D.

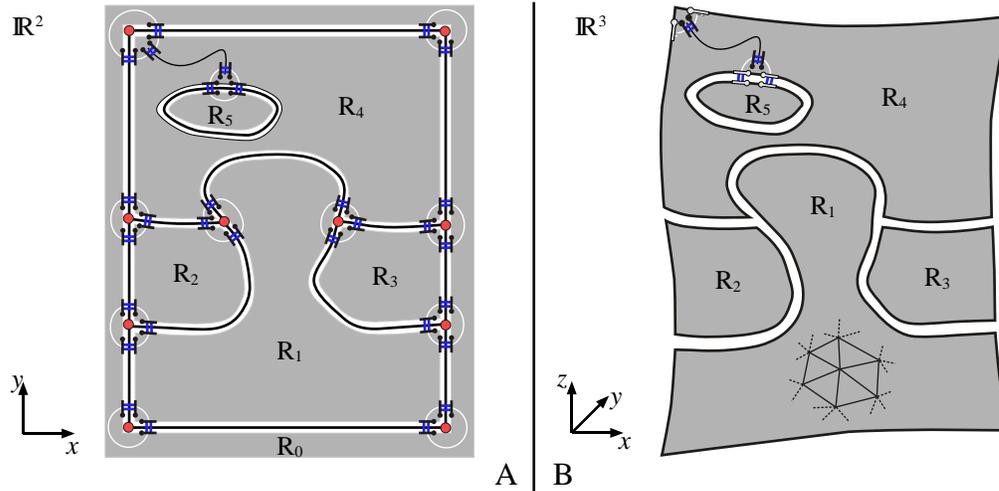


Figure 3.15: Comparaison d'un modèle 2D avec une Trimmed-TSurf. A : Un modèle 2D est une partition d'un domaine 2D en régions par un ensemble fini de lignes. Dans la structure des H-G-Cartes, un modèle 2D est décrit par une 2-G-Carte dont chaque polygone définit une région du modèle. B : Une Trimmed-TSurf est une partition d'une surface triangulée en régions par un ensemble fini de lignes fermées. Chaque ligne est en fait le bord d'un polygone d'une 2-G-Carte plongée dans la surface : la Trimming-Line. Afin de représenter une région avec des bords internes comme  $R_4$  par un polygone, des brins virtuels sont ajoutés.

La 2-G-Carte qui décrit la topologie d'un modèle 2D ou la Trimming-Line d'une Trimmed-TSurf peut être composée de plusieurs composantes connexes. Dans une telle situation, certaines régions possèdent une ou plusieurs frontières internes. Sur la figure 3.15, la région  $R_4$ , a un bord interne et ne peut être représentée directement par un polygone, aussi bien pour le modèle 2D à gauche que pour la Trimmed-TSurf à droite. Des brins virtuels sont donc ajoutés pour relier le bord interne de  $R_4$  à son bord externe. Ces brins ne sont pas plongés géométriquement et ne seront donc pas pris en considération par les algorithmes géométriques. Nous verrons plus loin dans ce chapitre, comment déterminer si une frontière est interne ou non et dans le cas échéant, comment identifier la région qu'elle borde.

La différence principale entre ces deux objets réside dans le fait qu'une Trimmed-TSurf est un objet 2D plongé dans un espace tridimensionnel contrairement au modèle 2D qui est défini dans un plan. Cette dimension supplémentaire va jouer un rôle très important dans le processus de construction et d'identification des régions d'une Trimmed-TSurf. Si les différentes phases de ce processus sont similaires à celles suivies lors de la construction d'un modèle 2D, les algorithmes qui les traitent, sont en revanche différents. Chaque sous-problème traité est un problème 3D pour la première et 2D pour le second. Les solutions qui sont utilisées pour construire un modèle 2D

ne peuvent donc pas être transposées pour la construction d'une Trimmed-TSurf. Une paramétrisation de la surface [LM98] aurait cependant permis l'utilisation des algorithmes de construction de modèles 2D, en transposant le problème dans le domaine paramétrique, c'est-à-dire dans un espace bidimensionnel. Mais cette paramétrisation n'est pas possible sur une surface close, sauf localement.

### 3.4 Construction d'une Trimmed-TSurf

Un modèle 2D décrit dans la structure des H-G-Cartes est construit par assemblage des Cadres d'un nombre fini de lignes au niveau de leurs points de jonction. La 2-G-Carte ainsi obtenue représente la partition du domaine plan en régions par les lignes. Il en est de même de la Trimming-Line d'une Trimmed-TSurf appartenant à un modèle géologique donné. Elle est assemblée à partir des bords de la surface et des lignes d'intersection avec les autres surfaces du modèle. C'est une 2-G-Carte qui correspond aux bords de la surface si elle avait été découpée par les autres surfaces du modèle et qui la subdivise en sous-parties virtuelles. La construction d'une Trimming-Line va donc suivre les mêmes étapes que la construction d'un modèle 2D :

- calcul des lignes ;
- préparation des lignes de manière à respecter la condition de non-intersection (cf. section 1.1, page 12) et certaines relations topologiques ;
- recherche des configurations non-variétés où plusieurs lignes se rencontrent au niveau du même point géométrique ;
- tri géométrique des lignes autour des points de jonction qui ont été détectés ;
- assemblage des lignes pour former les 2-cellules de la Trimming-Line ;
- identification et construction des régions.

Dans les sections suivantes, nous allons aborder certaines de ces étapes en détail.

#### 3.4.1 Construction des lignes

La Trimming-Line d'une Trimmed-TSurf fait la synthèse de toutes les relations topologiques (intersections et contacts) que cette surface peut partager avec les autres surfaces d'un modèle donné. Considérons un exemple avec un modèle géologique très simple composé d'un horizon  $H$  et de trois failles  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$  (cf. figure 3.16A). L'horizon  $H$  se termine sur la faille  $F_1$  et est recoupé de part en part par les deux failles  $F_2$  et  $F_3$ . La faille  $F_2$  se termine sur la faille  $F_1$  et les failles  $F_2$  et  $F_3$  s'intersectent. Construisons maintenant la Trimming-Line associée à l'horizon  $H$ .

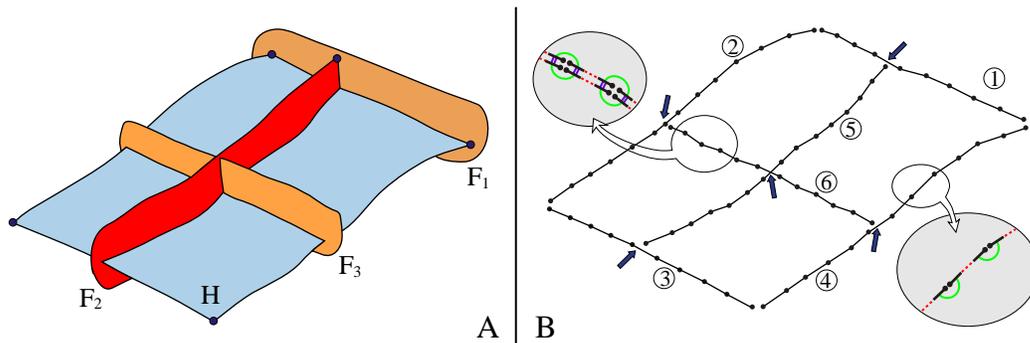


Figure 3.16: Construction de la Trimming-Line associée à un horizon coupé par plusieurs failles. A : le modèle surfacique initial. B : La Trimming-Line est construite à partir d'un ensemble de lignes d'origine diverse : par projection des bords contraints sur leur surface cible, comme pour la ligne ① ; par transcription des bords libres, comme pour les lignes ②, ③ et ④ ; par calcul de l'intersection avec les autres surfaces du modèle, comme pour les lignes ⑤ et ⑥. Les lignes ⑤ et ⑥ sont dédoublées car elles correspondront à une frontière entre deux régions, une fois la Trimming-Line assemblée. Pour garantir la condition de non-intersection, ces lignes doivent être ensuite découpées au niveau des flèches.

Cet horizon possède quatre bords logiques délimités par quatre nœuds bornes (les ronds noirs situés en chaque coin de la surface). Un bord pourra être libre ou contraint. L'extraction des lignes sera faite différemment selon le statut des bords :

- Un des bords de l'horizon est contrôlé par la faille  $F_1$  à l'aide d'une contrainte de type *Bord Contre Surface* pour garantir la cohérence du modèle. De cette relation de bord est extraite la ligne ①. Cette ligne est construite par projection du bord contraint sur la faille  $F_1$  à l'aide de l'algorithme de découpage contraint en s'arrêtant à l'étape du calcul de la ligne d'intersection.
- Les lignes ②, ③ et ④ sont construites à partir des 3 bords libres de l'horizon. Elles sont une simple transcription des sommets et des arêtes de ces bords.

Les lignes associées aux bords logiques d'une surface sont simples. Elles correspondront, une fois assemblées, à la frontière d'une seule et unique région de la Trimmed-TSurf associée à cette surface.

Les lignes ⑤ et ⑥ sont construites à partir des lignes d'intersection de l'horizon avec les failles  $F_2$  et  $F_3$  respectivement. Ces lignes correspondront chacune à la frontière entre deux régions différentes de la Trimmed-TSurf associée à l'horizon  $H$  et sont donc dédoublées. Elles sont composées de deux demi-lignes orientées soudées par des liens  $\alpha_2$  (cf. figure 3.16B).

L'opération suivante consiste à calculer les intersections entre les lignes que nous venons de construire, afin de respecter la condition de non-intersection et de garantir

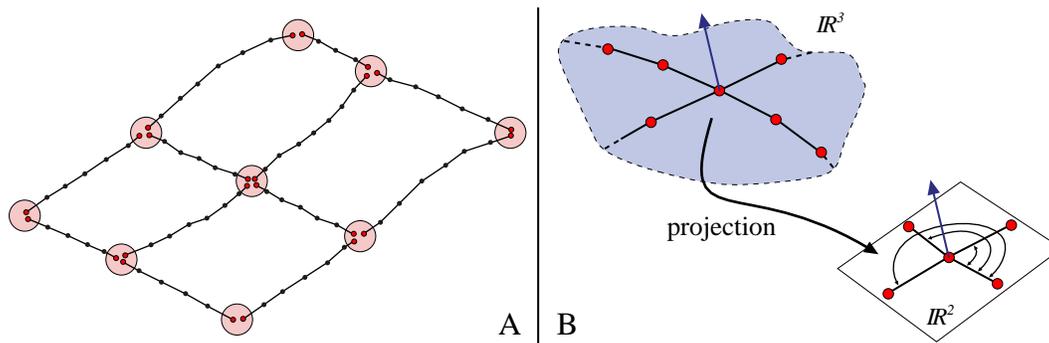


Figure 3.17: *Construction de la Trimming-Line associée à un horizon coupé par plusieurs failles (suite). A : Détection des configurations non-variétés où plusieurs lignes se rejoignent au niveau du même point géométrique (points entourés par un cercle). B : Tri des lignes au niveau d'un point de jonction. Les segments à trier sont projetés dans le plan défini par la normale à la surface au niveau du point de jonction. Le tri se fait suivant l'angle formé par rapport à un segment de référence.*

la cohérence du modèle. Un sommet est ajouté pour tout point d'intersection détecté (points soulignés par des flèches sur la figure 3.16B). Il faut entre autre s'assurer que la ligne ⑤ se termine bien sur la ligne ①. Les contraintes du type *Bord contre Surface* et *Nœud Borne Contre Bord* sont utilisées à cet effet, pour indiquer les relations topologiques associant les lignes.

Actuellement, nous ne prenons en compte que les intersections franches entre surfaces. L'algorithme de découpage contraint et les contraintes géométriques sur les bords n'ont pas encore été implantés dans le modelleur basé sur les G-Cartes.

### 3.4.2 Assemblage des lignes

Une fois les lignes calculées, nous devons les assembler le long des points de jonction pour construire les 2-cellules de notre Trimming-Line. Dès que plus de deux lignes se rejoignent au niveau du même point géométrique, nous devons les trier, si nous voulons obtenir des cellules cohérentes. Ces lignes étant plongées dans  $\mathbb{R}^3$ , nous ne pouvons pas trier directement les segments.

Mariez dans sa thèse [Mar98] propose la méthode suivante pour construire un modèle 2D à partir d'un ensemble de lignes plongées dans  $\mathbb{R}^3$ . Il associe un vecteur à chaque point de jonction. Ce vecteur définit un plan sur lequel sont projetés les segments à classer. Ces derniers peuvent alors être triés suivant l'angle algébrique formé avec un segment de référence (le sens du tri est donné par la direction du vecteur). Pour que le modèle final soit cohérent, les lignes doivent toutes être triées suivant le même sens : les vecteurs normaux doivent donc être orientés d'une manière consistante. Mariez utilise le plan moyen formé par les segments à classer pour calculer

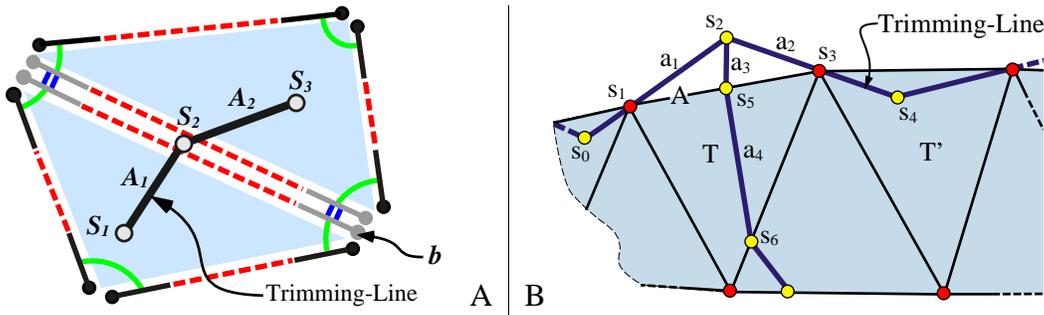


Figure 3.18: A : description du plongement topologique des cellules d'une Trimming-Line. B : problème des bords contraints. Les cellules de la Trimming-Line associées à un bord contraint ne sont pas toujours plongées dans leur surface d'origine.

ses vecteurs. Cette méthode ne garantit pas une orientation cohérente des vecteurs, l'utilisateur doit alors lever les incertitudes sur leur orientation. Dans notre problème, les lignes s'appuient sur une surface. Nous pouvons donc utiliser la normale à cette surface comme vecteur, ce qui nous permet de résoudre les problèmes d'orientation des vecteurs rencontrés par Mariez (cf. figure 3.17B).

### 3.4.3 Description du plongement

Afin d'identifier et de construire les régions d'une Trimmed-TSurf, nous devons connaître le plongement topologique de toutes les cellules de sa Trimming-Line.

Considérons un modèle géologique  $M$  et une Trimmed-TSurf  $\mathcal{T}$  associée à une surface triangulée  $S$  de  $M$  et subdivisée par une Trimming-Line  $L$ . Par construction, tout sommet et toute arête de  $L$  sont plongés géométriquement dans la surface  $S$ , s'ils sont issus d'une intersection ou d'un bord libre de  $S$  ou bien dans une autre surface de  $M$  s'il sont issus de la projection d'un bord contraint de  $S$  sur cette surface.

Le plongement topologique d'un sommet ou d'une arête de  $L$  dans une cellule de  $S$  est entièrement déterminé si nous connaissons un brin et la dimension de cette cellule. Par exemple, sur la figure 3.18A, le sommet  $S_2$  est plongé dans l'arête commune aux deux triangles. Les brins de cette arête sont traversés en parcourant l'orbite  $\langle \varphi_1 \rangle (b)$ , où  $b$  est un de ses brins et 1, sa dimension. De même, l'arête  $A_1$  est plongée dans le triangle de gauche qui peut être décrit par l'orbite  $\langle \varphi_2 \rangle (b)$ , où  $b$  est un de ses brins et 2, sa dimension. Cette information topologique est stockée comme toute autre propriété attachée à une G-Carte. Elle est redondante car le plongement d'une arête peut être déduit du plongement de ses deux extrémités. Pour des raisons d'optimisation, le plongement des arêtes sera tout de même stocké en mémoire. Inversement, toujours pour des raisons d'optimisation, chaque cellule de la surface triangulée connaît la liste des sommets et des arêtes de la Trimming-Line  $L$  qui y sont plongés.

La description du plongement topologique des sommets et des arêtes de  $L$  associées à un bord contraint de  $S$  est plus délicat. Ces cellules résultent de la projection du bord contraint sur sa surface cible  $S'$ . Elles sont toutes plongées géométriquement et topologiquement dans la surface  $S'$ , mais pas forcément dans leur surface d'origine  $S$  (cf. figure 3.18B). Dans notre exemple, les arêtes  $a_1$  et  $a_2$  ainsi que les sommets  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$  sont issus de la projection de l'arête  $A$  sur la surface cible  $S'$ , qui n'est pas représentée sur la figure. Ces cellules sont toutes plongées dans la surface  $S'$  mais pas dans la surface  $S$ , sauf les sommets  $s_1$  et  $s_3$ . De même, le plongement de l'arête  $a_3$ , prolongement de l'arête  $a_4$  jusqu'à la surface  $S'$ , n'est pas non plus défini par rapport à la surface  $S$ . Pour identifier les régions de la Trimmed-TSurf  $\mathcal{T}$ , nous devons exprimer le plongement topologique des cellules de la Trimming-Line relativement à la surface  $S$ . La solution la plus simple consiste à considérer que les cellules  $a_1$ ,  $a_2$  et  $s_1$  sont plongées dans leur arête d'origine, c'est-à-dire l'arête  $A$ . Pour des raisons de consistance, l'arête  $a_3$  et le sommet  $s_5$  doivent alors être plongés topologiquement dans le triangle  $T$ . Le plongement des cellules qui ne posent pas de problèmes particuliers comme l'arête  $a_4$  et le sommet  $s_4$  (respectivement dans les triangles  $T$  et  $T'$ ), n'a pas besoin d'être modifié.

### 3.4.4 Identification des régions

Une fois la Trimming-Line d'une Trimmed-TSurf construite, nous devons ensuite identifier les différentes régions de cette Trimmed-TSurf.

#### Orientation des trimming-curves

Une région de Trimmed-TSurf est délimitée par une frontière externe définie par le bord d'une 2-cellule orientée positivement et par une ou plusieurs frontières internes définies par le bord de 2-cellules orientées négativement. Une Trimming-Line peut être composée de plusieurs parties disjointes. Nous devons orienter correctement les polygones des différentes composantes connexes de la Trimming-Line pour définir des régions cohérentes. Suivant les caractéristiques topologiques de la surface dans laquelle est plongée la Trimming-Line, nous devons avoir :

- **pour une surface ouverte simplement connexe** : la composante connexe en relation avec le bord de la surface doit avoir tous ses polygones orientés positivement. Les autres composantes connexes doivent avoir un polygone orienté négativement et les polygones restants orientés positivement. La Trimming-Line représentée sur la figure 3.19A est composée de trois composantes connexes. La composante  $\{c_0, c_1\}$ , associée au bord de la surface est formée de deux polygones  $c_0$  et  $c_1$  qui doivent être orientés positivement. Les deux autres composantes connexes  $\{c_2, c_3, c_4, c_5\}$  et  $\{c_6, c_7\}$  doivent avoir un de leurs polygones orienté négativement ( $c_5$  et  $c_7$ ) et les polygones restants orientés positivement ( $c_2, c_3, c_4$  et  $c_6$ ). Cette orientation des polygones permet de délimiter la région

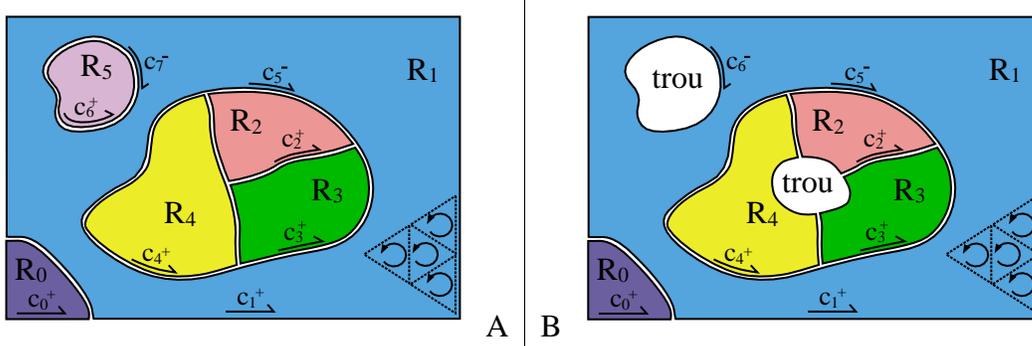


Figure 3.19: Orientation des cellules d'une Trimming-Line. A : cas d'une surface ouverte. La composante connexe associée au bord doit avoir toutes ses cellules orientées positivement  $\{c_0^+, c_1^+\}$  et les composantes connexes restantes, avoir une cellule orientée négativement et les autres positivement  $\{c_2^+, c_3^+, c_4^+, c_5^-\}$  et  $\{c_6^+, c_7^-\}$ . B : cas d'une surface trouée. La composante connexe associée au bord de référence, ici le bord externe, doit avoir tous ses polygones orientés positivement  $\{c_0^+, c_1^+\}$  et les autres composantes connexes, avoir une cellule orientée négativement et les autres positivement  $\{c_2^+, c_3^+, c_4^+, c_5^-\}$  et  $\{c_6^-\}$ .

$R_1$  avec le bord de  $c_1$  comme frontière externe et le bord de  $c_5$  et de  $c_7$  comme frontières internes.

- **pour une surface trouée :** chaque trou peut être vu comme une région particulière de la Trimméd-TSurf. Un bord de la surface est choisi comme bord de référence. La composante connexe associée à ce bord doit avoir toutes ses cellules orientées positivement. Le bord extérieur de la surface de la figure 3.19B a été désigné comme bord de référence. La composante connexe de la Trimming-Line qui lui est associée  $\{c_0, c_1\}$  doit avoir ses deux polygones  $c_0$  et  $c_1$  orientés positivement. Les deux autres composantes connexes  $\{c_2, c_3, c_4, c_5\}$  et  $\{c_6\}$  doivent avoir un de leurs polygones orienté négativement ( $c_5$  et  $c_6$ ) et les polygones restants orientés positivement ( $c_2, c_3, c_4$ ). Cette orientation particulière permet de délimiter la région  $R_1$  avec le bord de  $c_1$  comme frontière externe et le bord de  $c_5$  et de  $c_6$  comme frontières internes.
- **pour une surface fermée :** une composante connexe est désignée comme référence. Toutes ses 2-cellules sont arbitrairement orientées positivement. C'est le cas de la composante connexe  $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$  de la figure 3.20A. Les autres composantes connexes, ici  $\{c_5, c_6\}$  doivent avoir un de leurs polygones ( $c_6$ ) orienté négativement et les polygones restant orientés positivement ( $c_5$ ). Cette orientation permet de délimiter la région avec le bord de  $c_1$  comme frontière externe et avec le bord de  $c_6$  comme frontière interne.

En résumé, l'orientation des polygones d'une Trimming-Line doit être la suivante : une composante connexe doit avoir toutes ses 2-cellules orientées positivement et les composantes connexes restantes avoir un seul polygone orienté négativement.

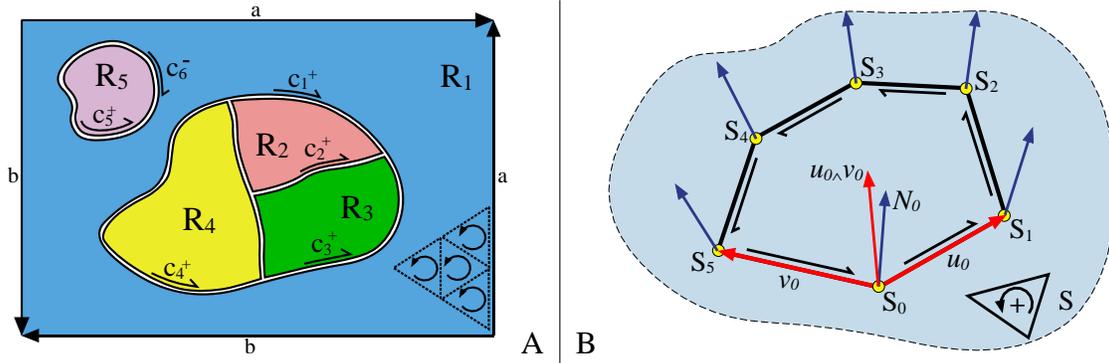


Figure 3.20: *Orientation des cellules d'une Trimming-Line. A : cas d'une surface fermée, ici une sphère. Toutes les composantes connexes de la Trimming-Line doivent avoir une de leurs cellules orientée négativement et les autres orientées positivement  $\{c_5^+, c_6^-\}$ , sauf une qui doit avoir toutes ses cellules orientées positivement  $\{c_1^+, c_2^+, c_3^+, c_4^+\}$ . B : détermination de l'orientation d'une ligne fermée.*

Pour orienter correctement les cellules d'une composante connexe d'une Trimming-Line, nous devons déterminer leur orientation relative à la surface et l'inverser si nécessaire. Nous avons choisi d'utiliser l'heuristique suivante : soit une ligne polygonale fermée  $L$  définie par la suite de sommets  $\{S_0, \dots, S_i, \dots, S_n\}$  et plongée dans une surface triangulée  $S$  (cf. figure 3.20). En chacun de ses sommets  $S_i$ , nous pouvons estimer la normale à la surface  $N_i$  que nous normalisons, ainsi que les deux vecteurs  $\mathbf{u}_i = S_{(i+1)\%n} - S_i$  et  $\mathbf{v}_i = S_{(i-1)\%n} - S_i$ . Pour chaque sommet, nous calculons le volume élémentaire défini par le produit mixte  $\mathbf{u}_i \wedge \mathbf{v}_i \cdot N_i$ . La courbe est orientée positivement si la somme de ces volumes élémentaires est positive et elle est orientée négativement si cette somme est négative.

### Construction des régions et identification des frontières internes

Les régions d'une Trimmed-TSurf sont délimitées par le bord d'une cellule orientée positivement et par le bord d'une ou plusieurs cellules orientées négativement. Une région est donc créée pour toute cellule orientée positivement. Il reste alors à identifier les frontières internes des régions nouvellement créées, si celles-ci existent.

Dans le cas des modèles 2D, la méthode de lancé de rayons est utilisée comme pour le tri des frontières internes des régions d'un modèle 3D (cf. section 1.4.3, page 34). Un changement de repère est effectué pour mettre le domaine plan sur lequel s'appuie le modèle 2D à la verticale. Chaque frontière interne est ensuite classée par altitude croissante de son point géométrique le plus bas. Un rayon vertical dirigé vers le bas est ensuite tiré de chacun de ces points. La région qui contient cette frontière est déterminée en fonction de la première frontière intersectée par le rayon.

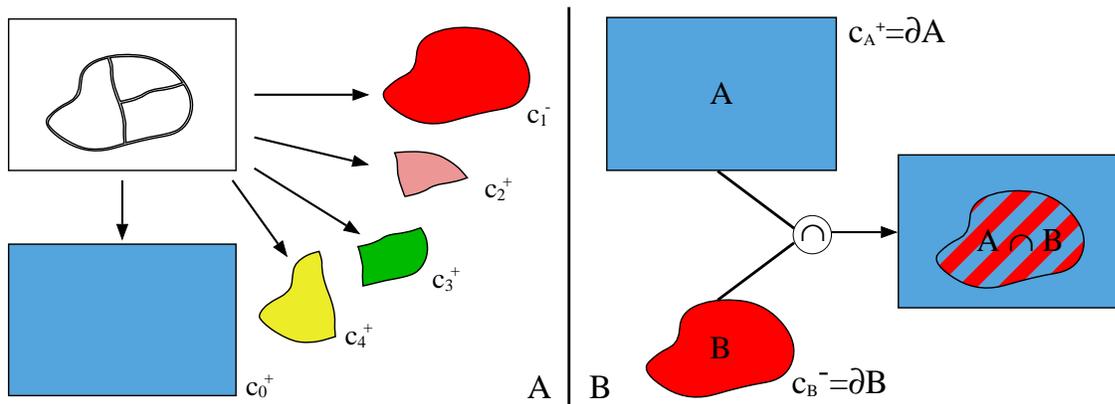


Figure 3.21: Identification des frontières internes des régions d'une Trimmed-TSurf. A : Elle se fait en comparant l'intérieur des courbes orientées positivement ( $c_0, c_2, c_3, c_4$ ) et l'extérieur des courbes orientées négativement ( $c_1$ ). B : Une région ayant pour frontière externe la courbe  $c_A$  a comme frontière interne la courbe  $c_B$  si et seulement si l'intérieur de  $c_A$  est le plus petit domaine contenant l'extérieur de  $c_B$ .

Cette méthode n'est pas applicable aux Trimmed-TSurfs. En effet, les courbes fermées extraites de la Trimming-Line ne sont pas plongées dans un plan, mais dans une surface de géométrie quelconque. Cette surface n'est pas toujours homéomorphe à un domaine plan, ce qui n'autorise pas de travailler dans le domaine paramétrique et ainsi passer d'un problème 3D à un problème 2D. Nous utiliserons donc une méthode combinatoire basée sur la comparaison de l'intérieur et de l'extérieur des courbes pour déterminer les relations d'inclusion entre régions et identifier les frontières internes de chaque région.

Pour chaque courbe orientée positivement, nous recherchons son intérieur topologique et pour chaque cellule orientée négativement, son extérieur topologique (voir la figure 3.21A). Une courbe  $c_B$  orientée négativement est une frontière interne d'une région ayant pour frontière externe une courbe  $c_A$ , si et seulement si (voir la figure 3.21B) :

- son extérieur  $B$  est inclus dans l'intérieur  $A$  de la courbe  $c_A$  ;
- $A$  est le plus petit domaine qui contient  $B$ .

Cette méthode est mise en échec dans les configurations suivantes :

- Quand deux lignes parcourent la même liste de cellules, leur intérieur et leur extérieur sont identiques (cf. figure 3.22A). Pour lever cette indétermination, il suffit de considérer une arête orientée d'un triangle traversée par les deux lignes. Les relations d'inclusion entre les domaines circonscrits par les deux lignes sont données par leur position relative le long de cette arête.

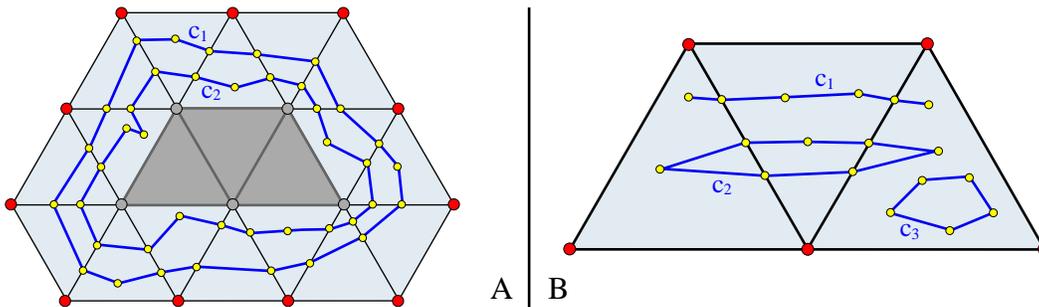


Figure 3.22: Causes d'échec de la méthode. A : domaines identiques (cellules en gris foncé). B : domaines vides.

- L'intérieur ou l'extérieur d'une courbe peut être vide quand :
  - la courbe est dégénérée avec plusieurs segments confondus, comme la courbe  $c_1$  de la figure 3.22B ;
  - la courbe n'englobe aucune cellule de la surface, comme par exemple la courbe  $c_2$  de la figure 3.22B ;
  - la courbe est plongée dans un seul et unique triangle comme la courbe  $c_3$  de la figure 3.22B.

Plusieurs stratégies sont possibles suivant les cas rencontrés. Nous pouvons utiliser par exemple, l'ensemble des cellules traversées par la ligne à la place de son intérieur/extérieur pour les tests d'inclusion. Si deux lignes traversent la même arête de la surface, nous pouvons déterminer les relations d'inclusion entre leurs domaines respectifs, en fonction de leur position relative le long de cette arête. Enfin, quand plusieurs lignes sont plongées dans le même triangle, nous ne pouvons plus utiliser les informations de plongement. En réalisant la triangulation contrainte de Delaunay de ce triangle (cf. figure 3.13B), nous pouvons déterminer les relations d'inclusion entre ces lignes en nous appuyant sur le maillage ainsi construit.

Ces problèmes peuvent être rencontrés si la densité des lignes est élevée par rapport à la taille des triangles de la surface.

### Remarque

Une fois la frontière externe et les frontières internes identifiées pour chacune des régions, nous pouvons relier ces dernières aux premières par une arête composée de 4 brins virtuels, comme nous l'avons déjà suggéré dans la section 3.3.2, page 92 et sur la figure 3.15B. La Trimming-Line résultante est composée d'une seule et unique composante connexe et ses polygones sont tous orientés positivement. Nous pouvons alors définir chaque région par un polygone de la Trimming-Line.

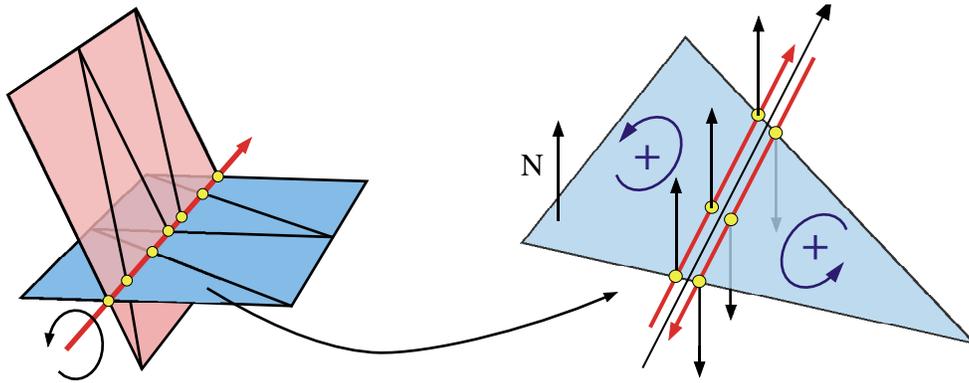


Figure 3.23: Tri de régions de Trimmed-TSurf au niveau d'une frontière commune.

## 3.5 Applications

Les Trimmed-TSurfs ont été conçues à l'origine pour définir et construire des modèles 3D plus facile à modifier. D'autres applications peuvent être cependant envisagées dans le domaine de la modélisation.

### 3.5.1 Construction de modèles 3D

Le Cadre d'une Trimmed-TSurf présente de fortes similitudes avec le Cadre d'une surface composée de plusieurs parties :

- Le Cadre d'une surface polygonale connexe est une 3-G-carte composée de deux polygones soudés par des involutions  $\alpha_3$ . Son plongement géométrique est délégué à la Toile de la surface. Un modèle 3D décrit dans la structure des H-G-Cartes se construit en assemblant les Cadres d'un nombre fini de surfaces qui se partagent géométriquement un ou plusieurs bords. Un tel modèle est défini une 3-G-Carte et ses régions par une 3-cellule de cette G-Carte.
- Le Cadre d'une Trimmed-TSurf est composé d'une ou plusieurs sous-unités équivalentes chacune à un Cadre de surface et reliées entre elles par des involutions  $\alpha_2$ . Le plongement géométrique de chaque sous-unité est délégué à une région de la Trimmed-TSurf. Chaque région peut être considérée comme une sous-partie virtuelle d'une surface possédant son propre Cadre et être manipulée comme telle. Nous pouvons donc envisager sans aucun problème de construire un modèle 3D en assemblant des Cadres de Trimmed-TSurfs.

En raison des similitudes que nous venons d'évoquer, la construction d'un modèle volumique suivra le même processus quel que soit le type de surfaces employé au départ :

- La première étape consiste à identifier les configurations non variétés. Une région de Trimmed-TSurf est composée d'un ensemble de triangles et de portions de triangles délimité par une ou plusieurs lignes closes. Chacune de ces lignes est composée d'arêtes et de sommets qui peuvent être partagés géométriquement avec d'autres bords de région. Si tel est le cas, nous nous retrouvons dans une configuration non-variété où plusieurs régions se rencontrent le long d'une ligne commune.
- Quand trois régions ou plus se joignent le long de la même portion de ligne, nous devons les trier avant d'assembler leur Cadre. Une erreur dans l'ordre d'assemblage des Cadres aboutit presque toujours à la construction d'un modèle non-cohérent. Nous avons défini pour le tri de surfaces triangulées adjacentes par un bord, un critère basé sur la répartition statistique des triangles incidents à une arête de ce bord. Ce critère n'est pas applicable pour le tri de régions de Trimmed-TSurfs adjacentes par un bord. En effet, ce bord est composé de segments qui traversent de part et d'autre les triangles des surfaces. Ces segments ne sont que rarement plongés dans une arête : il ne sera donc pas toujours possible de trouver des triangles incidents à une arête de la ligne de jonction pour trier les régions. En revanche, nous pouvons estimer en chaque sommet d'une Trimming-Line, la normale à la surface dans laquelle elle est plongée. Nous allons donc utiliser ces vecteurs normaux pour trier les régions. Si nous parcourons une ligne de jonction entre plusieurs régions d'une extrémité à l'autre suivant un sens donné, les frontières de régions étant des lignes orientées, certaines frontières seront traversées selon leur sens positif, d'autres selon leur sens négatif (cf. figure 3.23 à droite). Nous prendrons la normale à la surface dans le premier cas et son opposée dans le second : deux régions adjacentes et appartenant à la même surface, seront ainsi associées à des vecteurs de direction opposée. C'est la répartition statistique de ces vecteurs normaux que nous utiliserons comme critère de tri.
- Une fois les Cadres des Trimmed-TSurfs correctement assemblés, il suffit de parcourir la 3-G-Carte du modèle pour identifier ses régions et leurs frontières. Le bord de chacune de ses 3-cellules correspond à la frontière d'une région. Une région donnée pourra être délimitée par plusieurs frontières, une frontière externe et une ou plusieurs frontières internes. Nous devons déterminer pour toute frontière identifiée si elle est externe ou interne et pour chaque région construite ses frontières internes. Nous utiliserons pour cela les algorithmes employés pour la construction des régions d'un modèle composé de surfaces triangulées (cf. section 1.4.3).

Les figures 3.24A, 3.24B, 3.24C et 3.24D montrent un exemple de construction d'un modèle volumique à partir d'un ensemble de Trimmed-TSurfs.

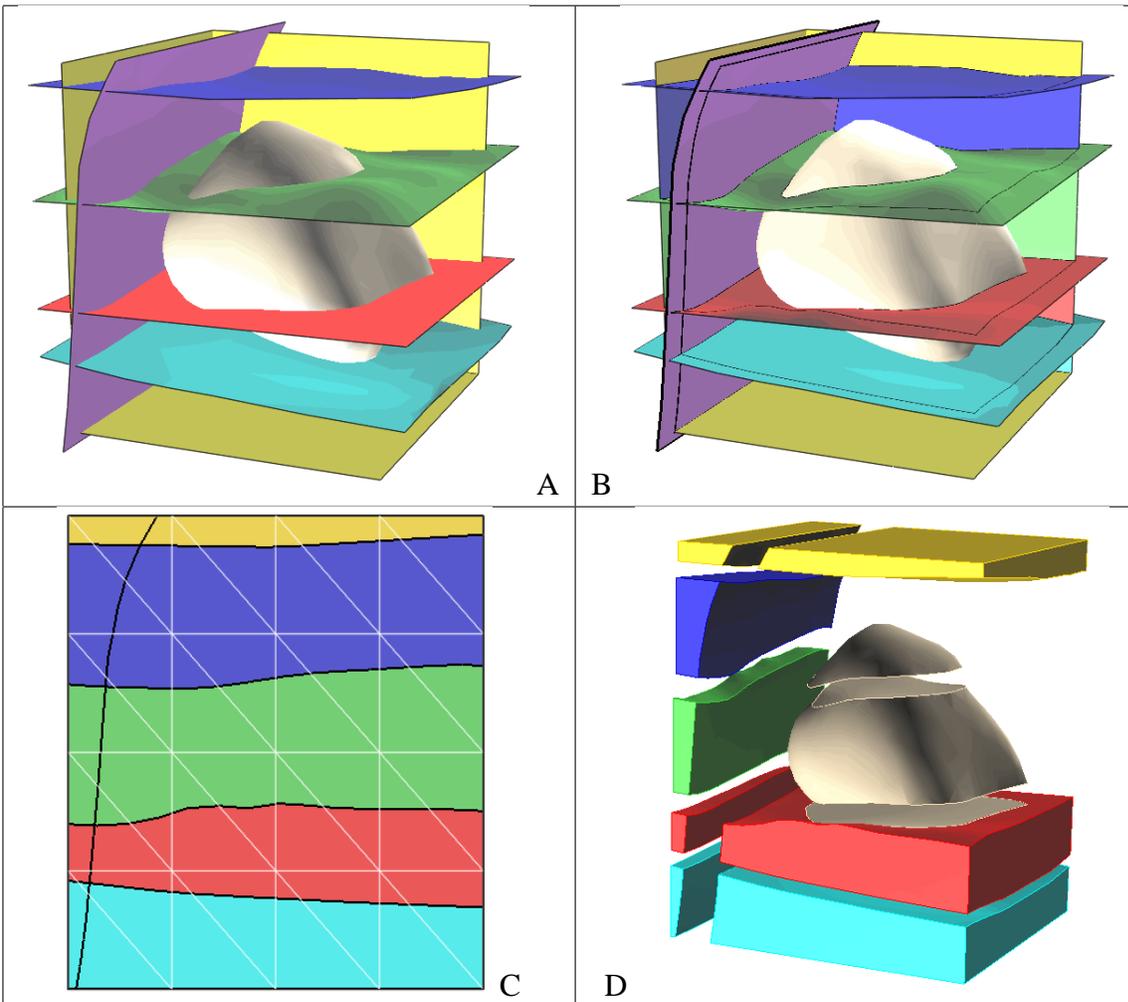


Figure 3.24: Construction d'un modèle à partir de Trimmed-TSurfs. A : Modèle surfacique initial composé de quatre horizons, d'une faille et d'une bulle de sel. B : Le même modèle surfacique, mais décrit avec des Trimmed-TSurfs. Les lignes qui sont apparues sont dues aux intersections entre les surfaces. La frontière du domaine n'est pas montrée. C : Détail sur une Trimmed-TSurf de la boîte englobante. Elle est subdivisée en 10 régions, 5 régions de part et d'autre de la faille alors que la triangulation de la surface reste inchangée. D : Vue explosée du modèle volumique final.

les relations topologiques qui associent les surfaces d'un modèle entre elles, comme par exemple des relations de contact *bord contre surface* ou des intersections franches, sont décrites par leur Trimming-Line. Ces Trimming-Lines subdivisent les surfaces en sous-parties virtuelles qui sont utilisées pour définir les frontières des régions du modèle. Après chaque modification effectuée sur le modèle, nous devons mettre à jour les relations topologiques entre les surfaces (un passage obligé de toute façon, car nous devons recalculer les lignes d'intersections entre les surfaces du modèle avant de le reconstruire) et donc reconstruire les Trimming-Lines. Nous ne sommes plus en

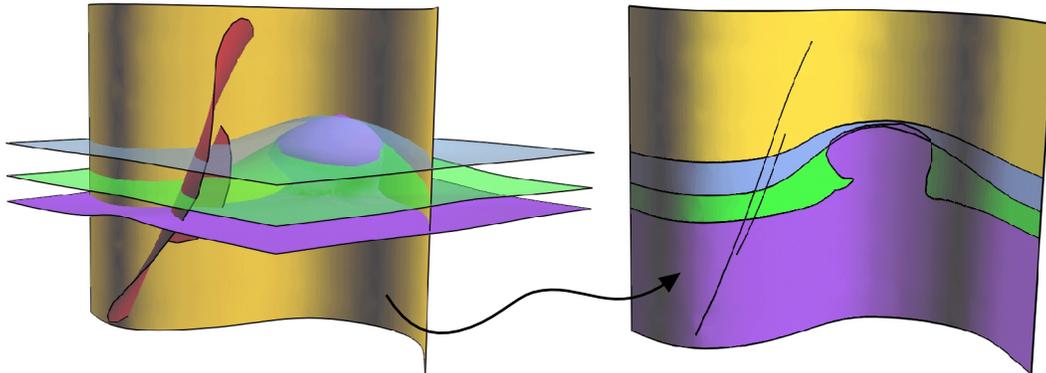


Figure 3.25: *Construction d'une coupe géologique s'appuyant sur une surface de forme quelconque.*

revanche obligés de passer par les étapes de retrait de cicatrices et de découpage des surfaces comme dans [Eul99].

### 3.5.2 Construction de modèles 2D plongés sur une surface gauche

Une Trimmed-TSurf est une surface triangulée subdivisée en plusieurs sous-domaines surfaciques par un ensemble de lignes closes définies comme les bords des polygones de sa Trimming-Line. La Trimming-Line d'une Trimmed-TSurf fait la synthèse des relations topologiques partagées par la surface avec les autres surfaces d'un modèle et en particulier les intersections. Les Trimmed-TSurfs sont donc tout à fait indiquées pour réaliser des coupes sur un modèle volumique. Ces sections ne seront pas limitées à des surfaces planes verticales, mais pourront être effectuées suivant une surface de géométrie et de topologie quelconques pour définir :

- des coupes géologiques en calculant l'intersection d'un modèle géologique 3D par des surfaces sub-verticales (cf. figure 3.25) ;
- des cartes géologiques en réalisant l'intersection d'un modèle géologique avec la surface topographique ;
- des cartes d'Allan en faisant la synthèse de toutes les traces des horizons qui se terminent sur une faille donnée pour en analyser le rejet.

### 3.5.3 Manipulation interactive d'un modèle 3D

Les Trimmed-TSurfs pourront être aussi utilisées à terme pour modifier interactivement un modèle 3D, par l'intermédiaire de coupes géologiques. La Trimming-Line

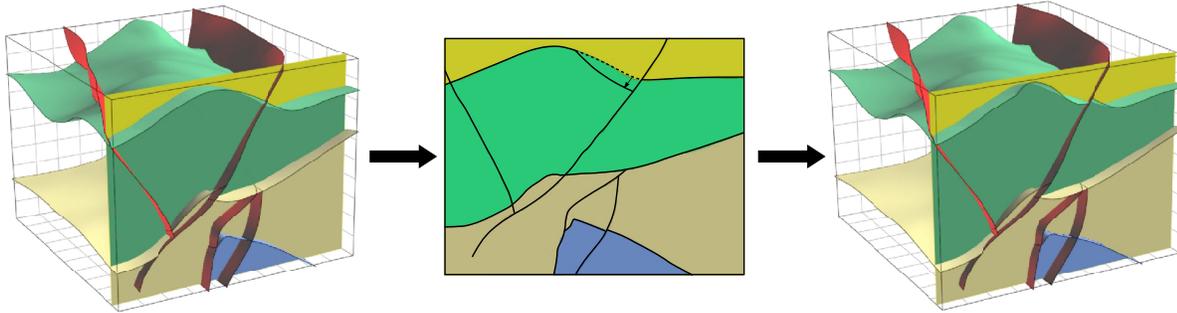


Figure 3.26: *Modification interactive d'un modèle géologique 3D par l'intermédiaire d'une coupe.*

d'une Trimmed-TSurf fait la synthèse des intersections et des contacts que partage cette surface avec les autres surfaces de ce modèle. Elle décrit ainsi leur trace sur la surface.

Un outil interactif de manipulation de Trimming-Lines pourrait être alors un moyen efficace pour modifier d'une manière cohérente un modèle géologique 3D. Chaque modification de la géométrie de la Trimming-Line peut être traduite sous la forme de contraintes géométriques interprétables par l'interpolateur DSI, pour reporter ces corrections sur les surfaces du modèle concernées par cette modification (cf. figure 3.26).

Notons toutefois qu'un modèle qui paraît cohérent sur une ou plusieurs coupes ne l'est pas forcément si il est considéré dans sa globalité : le déplacement d'un horizon peut engendrer de nouvelles intersections qui ne sont pas toujours visibles sur les coupes. Des contraintes géométriques supplémentaires, comme l'imposition d'une épaisseur de couche minimum par exemple, devront être utilisées pour prévenir ces intersections. Caumon dans ses travaux de thèse propose un outil similaire mais basé sur une approche différente [CMSB01, Cau02].

## 3.6 Conclusion

Nous venons de décrire dans ce chapitre une méthode purement combinatoire pour identifier l'intérieur ou l'extérieur d'une ligne polygonale simple et fermée tracée sur une surface polygonale. Seules les relations topologiques entre la ligne et la surface sont utilisées à cet effet. Cette méthode nous a permis de définir un nouveau type de surface, les Trimmed-TSurfs. Une Trimmed-TSurf est une surface triangulée subdivisée en plusieurs régions ou sous-parties virtuelles par un ensemble de lignes polygonales fermées regroupées dans une structure appelée Trimming-Line. La Trimming-Line d'une Trimmed-TSurf fait la synthèse des relations topologiques reliant cette surface avec les autres surfaces d'un modèle donné, comme des relations d'intersection ou de contact.

Les applications des Trimmed-TSurfs sont multiples :

- À partir d'un ensemble de Trimmed-TSurfs, nous pouvons construire un modèle géologique volumique dont les régions sont délimitées et décrites par une liste de sous-parties virtuelles de Trimmed-TSurfs. Un tel modèle sera plus facile à maintenir : seules les informations topologiques d'intersection ou de contact sont à redéfinir après chaque modification du modèle. Les opérations de découpage ou de retrait de cicatrices ne sont plus nécessaires.
- Elles peuvent être utilisées pour réaliser des coupes dans un modèle volumique donné. Ces coupes ne sont pas limitées à un domaine plan, elles peuvent s'appuyer sur une surface de géométrie et de topologie quelconques.
- Ces coupes peuvent ensuite servir d'interface pour un outil de manipulation interactive de modèles volumiques.

L'utilisation des Trimmed-TSurfs a cependant un coût par rapport à celle de surfaces découpées en plusieurs sous-surfaces :

- La Trimming-Line doit être stockée en mémoire ainsi que les relations topologiques la reliant à la surface.
- L'intérieur d'une région donnée doit être retrouvé à chaque requête sur cette région. L'intérieur topologique de la région doit être identifié et les portions de triangles traversées par ses frontières construites et parfois retriangulées. Pour des requêtes intensives sur les régions d'une Trimmed-TSurf, nous pouvons toutefois déterminer une fois pour toute la triangulation d'une région et la stocker dans une structure appropriée. Par exemple, l'algorithme de tracé de rayons, employé pour construire une sismique synthétique, utilise une structure de type arbre octal pour rechercher les triangles intersectés par un rai sismique. Une fois l'arbre octal mis en place, les différences de temps d'accès entre les Trimmed-TSurfs et les surfaces "classiques" disparaissent.

## Annexe : parcours de l'intérieur d'une ligne polygonale

**parcours\_des\_cellules\_internes**( cellule: Cellule, cell\_dim: Entier )

```

// Initialisation des deux ensembles de brins
P : Pile
Ensemble<Brin> I = rechercher_les_brins_internes( cellule ) ;
pour tous les Brins b de I
    empiler( P, b ) ;
fin pour

Ensemble<Brin> E = rechercher_les_brins_externes( cellule ) ;
pour tous les Brins b de E
    marquer( b ) ;
fin pour

// Propagation récursive de cellule en cellule dans les limites des brins externes.
tant que P n'est pas vide
    Brin brin_de_cellule = dépiler( P ) ;
    si non marqué( brin_de_cellule )
        marquer( brin_de_cellule ) ;
        Booléen : cellule_valide = vrai ;

        // traversée de l'orbite  $\langle \mathcal{G}_{cell\_dim} \rangle$ ( brin_de_cellule ), c'est-à-dire l'ensemble
        // des brins de la cellule de dimension cell_dim contenant brin_de_cellule
        pour tous les Brins b de brins_de_cellule( brin_de_cellule, cell_dim )
            si marqué( b )
                // La cellule courante est intersectée par une cellule de la ligne :
                // la cellule courante n'est pas interne.
                cellule_valide = faux ;
            sinon
                marquer( b ) ;
            fin si
        fin pour

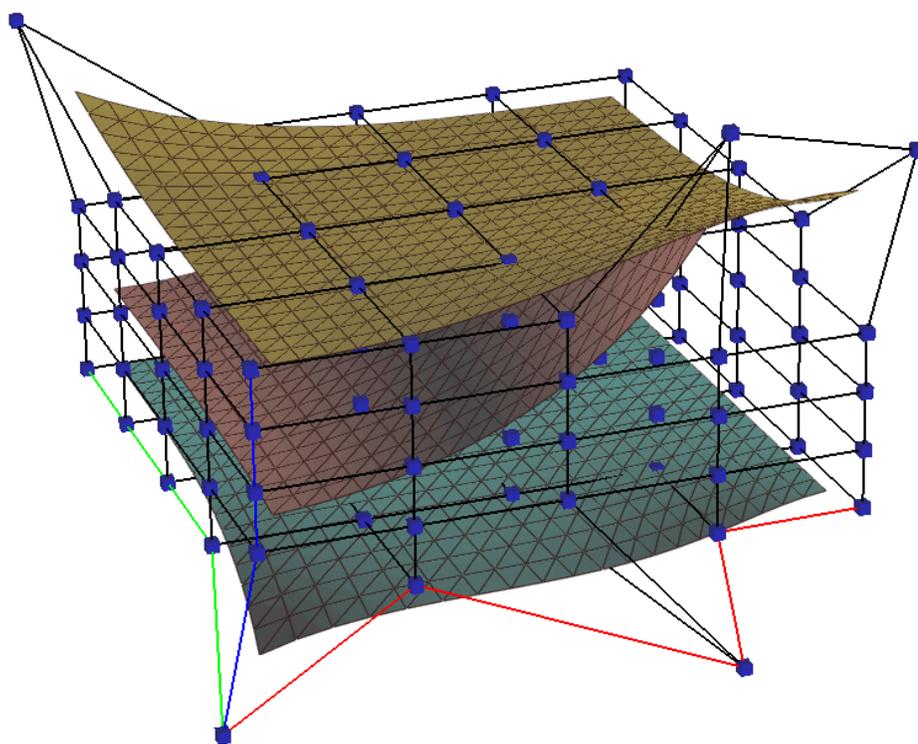
    si cellule_valide
        // La cellule courante est interne. Une action est exécutée sur cette cellule.
        ACTION( brin_de_cellule ) ;
    fin si
fin si
fin tant que
fin parcours_des_cellules_internes

```



## Chapitre 4

# Déformation continue d'un modèle géologique



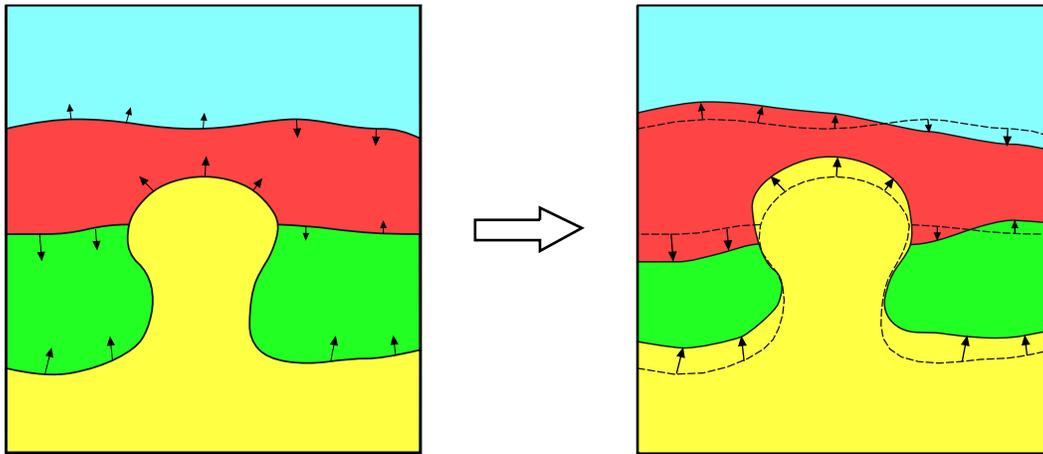


Figure 4.1: *Déformation d'un modèle géologique selon un nombre fini de vecteurs de perturbation.*

## 4.1 Introduction : Problème

Dans le chapitre précédent, nous avons défini une structure qui facilite la construction et la modification de la géométrie et de la topologie d'un modèle géologique. Dans ce chapitre, nous allons présenter une méthode de déformation répondant aux besoins spécifiques de CGG pour la mise à jour à topologie constante de leurs modèles de vitesse. Cette méthode pourra être facilement étendue à d'autres classes similaires de problèmes.

Considérons un modèle géologique décrit par un ensemble de surfaces triangulées. En certains points régulièrement répartis sur les surfaces sont connus des vecteurs de perturbation (cf. figure 4.1). Chaque vecteur indique la position que devra prendre son point d'origine après déformation. Nous aimerions modifier ce modèle de manière à ce que tous les vecteurs soient respectés au mieux. Cette déformation devra être continue pour préserver les contacts entre les surfaces. Elle devra être aussi injective pour éviter toute nouvelle intersection des surfaces.

Les techniques de déformation de formes libres introduites par Sederberg et Parry en 1986 [SP86] ainsi que leurs formes dérivées comme la déformation de formes libres par manipulation directe [HHK92], les SCODEF [BR94] ou encore DOGME [BB91] sont des techniques couramment utilisées dans le domaine de l'infographie pour déformer à topologie constante un objet. Certaines de ces techniques sont aussi utilisées pour la reconstruction d'objets tridimensionnels à partir d'un nuage de points : une forme initiale est créée puis déformée afin de minimiser l'écart avec les données. Un exemple de reconstruction d'objet géométrique appliqué à l'imagerie médicale est donné dans [BCA95]. Notre problème est similaire : connaissant la position finale

d'un nombre fini de points, nous voulons déformer continûment un modèle géologique initial, et ce, à topologie constante afin de préserver la cohérence du modèle.

Ce chapitre est consacré à une présentation non exhaustive des techniques de déformations spatiales et à leur utilisation possible pour construire des outils de manipulation interactive ou automatique de modèles géologiques. Il se subdivise en quatre grandes sous-parties.

- La première partie introduit le concept de déformation spatiale qui a donné naissance à toute une famille de techniques de manipulation d'objets géométriques.
- La deuxième partie est consacrée aux techniques de déformation de formes libres. Ces techniques nous ont permis de développer un premier outil de déformation interactive de modèles géologiques.
- La troisième partie décrit les différentes techniques de déformation spatiale par manipulation directe. Elles autorisent la construction d'outils de manipulation beaucoup plus intuitifs et la mise en place de méthodes de reconstruction automatique d'objets.
- Enfin la quatrième partie se concentre sur une de ces techniques, la déformation de formes libres par manipulation directe qui nous semble la plus adaptée pour résoudre notre problème.

## 4.2 Déformation spatiale

Les techniques de déformation spatiale sont une classe de méthodes utilisées pour manipuler des objets géométriques, des “formes libres” par distorsion de l'espace environnant. Borrel et Bechmann dans [BB91] définissent ainsi le principe de la déformation spatiale : l'espace originel  $\mathbb{R}^n$  et l'espace déformé  $\mathbb{R}^n$  sont deux projections différentes d'un espace  $\mathbb{R}^m$  avec  $m > n$ . La déformation  $d$  de l'espace est la composée d'une fonction d'extrusion  $F$  définie de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}^m$  et d'une projection  $T$  définie de  $\mathbb{R}^m$  vers  $\mathbb{R}^n$ . La déformation  $d$  associe à tout point  $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  de  $\mathbb{R}^n$  son déplacement  $\Delta\mathbf{X} = [\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n]^T$  :

$$\Delta\mathbf{X} = d(\mathbf{X}) = [d(x_1), d(x_2), \dots, d(x_n)]^T \quad (4.1)$$

Si  $M$  est la matrice associée à la projection  $T$ , alors nous avons :

$$d(\mathbf{X}) = M \cdot F(\mathbf{X}) \quad (4.2)$$

La figure 4.2 illustre ce concept avec la déformation d'une surface  $S_2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . La forme finale de la surface  $S_2$  (en haut à gauche) peut être vue comme une projection particulière dans  $\mathbb{R}^2$  de la surface  $S_3$  définie dans  $\mathbb{R}^3$ .  $S_3$  est construite par extrusion

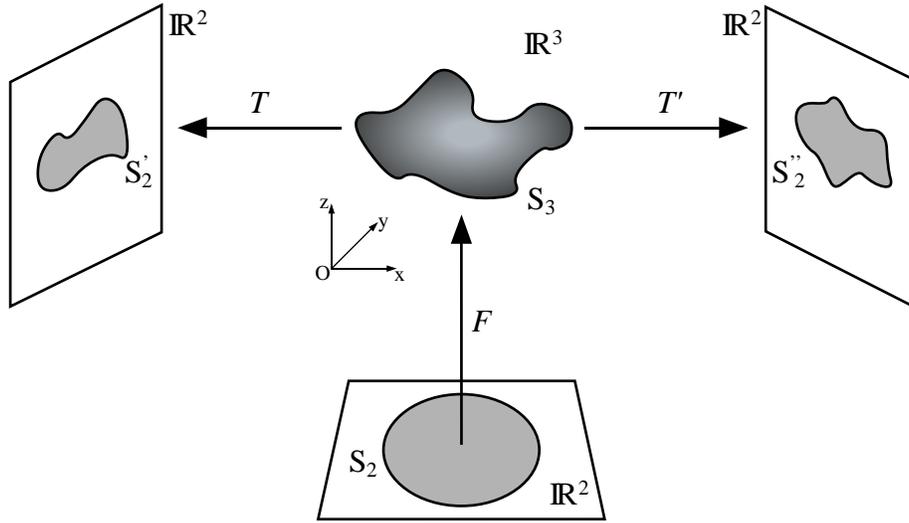


Figure 4.2: Principe des méthodes de déformation spatiale : exemple de déformation d'une surface dans  $\mathbb{R}^2$ . Une surface tridimensionnelle  $S_3$  est créée à partir de la surface initiale  $S_2$  en utilisant la fonction d'extrusion  $F$ . Deux surfaces déformées  $S'_2$  et  $S''_2$  sont ensuite construites en projetant différemment  $S_3$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

dans  $\mathbb{R}^3$  de la surface initiale (en bas) en utilisant la fonction  $F$ . D'autres déformées de  $S_2$  sont obtenues en projetant différemment la surface  $S_3$  dans  $\mathbb{R}^2$  (en haut à droite) ou en choisissant une autre fonction d'extrusion. Le concept de déformation spatiale a été défini dans un espace de dimension  $n$  quelconque. Nous nous placerons dans le cas où  $n = 3$  : nous voulons déformer un modèle géologique tridimensionnel. Les outils que nous avons implémentés peuvent être facilement transposés pour manipuler des coupes géologiques ( $n=2$ ).

Bechmann et Dubreuil [Bec92] ont été les premiers à exploiter  $\mathbb{R}^4$  pour réaliser des animations, c'est à dire déformer un objet à la fois dans l'espace et dans le temps. Une des propriétés caractéristiques des déformations spatiales est que la manipulation des objets se fait à topologie constante : une balle (équivalente à une sphère) ne pourra jamais se transformer en beignet (équivalent à un tore). Toutefois travailler dans  $\mathbb{R}^4$  autorise des opérations topologiques comme créer des trous ou encore diviser un objet en plusieurs sous-parties [AB97]. Il est ainsi possible de modifier la topologie d'un objet tridimensionnel par extrusion et déformation dans  $\mathbb{R}^4$ . Si la déformation se fait à topologie constante dans  $\mathbb{R}^4$ , ce n'est pas le cas de ses projections successives à temps constant dans  $\mathbb{R}^3$ . La figure 4.3 montre un exemple de modification topologique d'un objet bidimensionnel. Plus récemment, un modéleur 4D, STIGMA pour *Space-Time Interpolation for the Geometric Modeling of Animations*, basé sur les Cartes Généralisées [Lie94] pour la définition du noyau topologique et sur DOGME [BB91] pour la déformation et la manipulation des objets dans  $\mathbb{R}^4$ , a été élaboré par [BBB98,

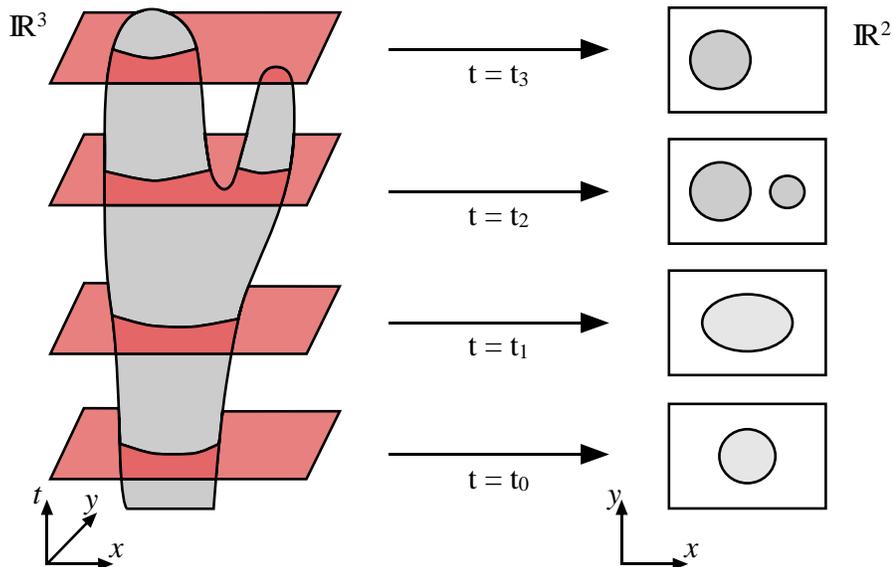


Figure 4.3: *Modification de la topologie d'un disque. À gauche : un cylindre est d'abord créé par extrusion du disque dans  $\mathbb{R}^3$  suivant l'axe des temps. La protubérance est ensuite construite par déformation du cylindre. À droite : en coupant l'objet ainsi obtenu aux instants  $t = (t_0, t_1, t_2, t_3)$ , il est possible de modifier progressivement la topologie du disque.*

Bra00]. Un tel modelleur permet de construire des modèles géologiques évoluant au cours du temps.

## 4.3 Déformation de Formes Libres

### 4.3.1 Principe

Le principe des techniques de déformation de formes libres référencées dans la littérature de langue anglaise sous le nom de *Free Form Deformation* (FFD) [SP86] est relativement simple. Il consiste à déformer un objet de forme quelconque par l'intermédiaire d'un maillage de contrôle. Ce maillage est généralement une grille tridimensionnelle dont les cellules sont des hexaèdres. Sabine Coquillart a étendu les outils de déformation de formes libres en utilisant des maillages de forme arbitraire (comme des sphères ou des cylindres) avec les méthodes *Extended Free Form Deformation* (EFFD) [Coq90]. Ces maillages sont obtenus en déformant une grille régulière et en fusionnant certains nœuds de contrôle. Ce n'est pas une opération topologique mais une simple opération géométrique, les nœuds fusionnés partageant en fait la même localisation géométrique. Par exemple, une forme cylindrique s'obtient en soudant deux faces opposées d'une grille parallélépipédique et en confondant tous les nœuds de l'axe du cylindre.

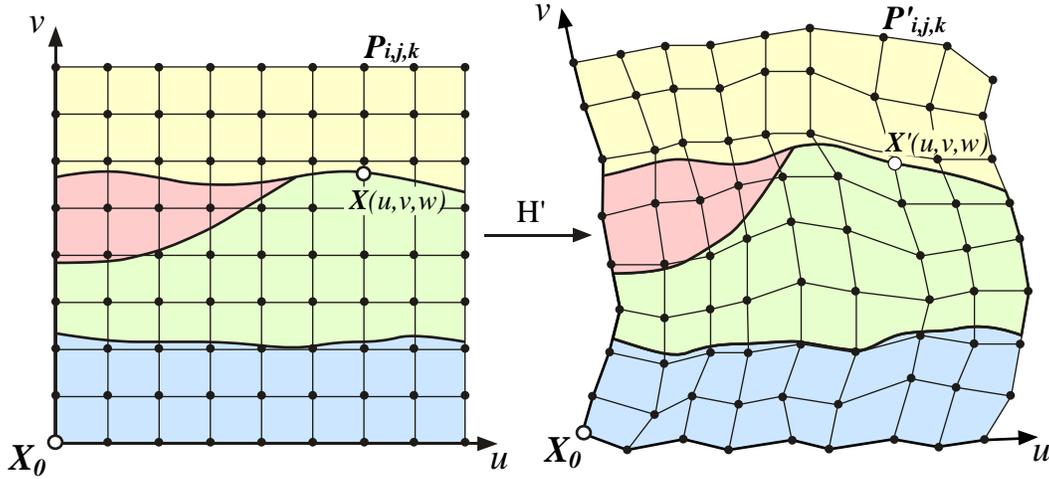


Figure 4.4: Principe des méthodes de déformation de formes libres. À gauche, un modèle géologique a été plongé dans l'espace paramétrique  $D = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ . À droite, toute modification du maillage de contrôle est répercutée sur le modèle qui se déforme.

Sederberg et Parry [SP86] résument le principe des FFD par la métaphore suivante : un objet flexible est déposé dans un moule dans lequel est versée de la gelée. Une fois la gelée prise, le bloc est démoulé. Toute déformation appliquée à ce bloc de gelée est transmise à l'objet qui se déforme passivement.

Dans les techniques de déformation de formes libres, le déplacement des points d'un objet donné est déterminé par la conformation spatiale d'un volume paramétrique  $V$  (le bloc de gelée de Sederberg et Parry) dans lequel il est plongé : toute déformation de ce volume par l'intermédiaire d'un maillage de contrôle entraîne une déformation conjointe de l'objet. Le volume  $V$  est défini par une application bijective et continue  $\mathbf{H}$  qui associe à tout point  $\mathbf{U} = (u, v, w)^T$  du domaine paramétrique tridimensionnel  $D = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ , un point  $\mathbf{X} = (x, y, z)^T$  de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \Leftrightarrow \exists \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in D : \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \mathbf{X}$$

$\mathbf{H}$  est généralement définie comme le produit tensoriel de trois fonctions dépendant respectivement des trois coordonnées paramétriques  $u$ ,  $v$  et  $w$  :

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}(u, v, w) = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} B_i^l(u) \cdot B_j^m(v) \cdot B_k^n(w) \cdot \mathbf{P}_{i,j,k} \quad (4.3)$$

où les points  $\mathbf{P}_{i,j,k}$  correspondent à la position des nœuds du maillage de contrôle.

Comme la fonction  $\mathbf{H}$  est bijective par définition, nous pouvons associer avant déformation du maillage à tout point  $\mathbf{X} = (x, y, z)^T$  d'un objet plongé dans  $V$  un point unique  $\mathbf{U} = (u, v, w)^T$  donné par l'inverse de  $\mathbf{H}$  :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{H}^{-1}} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{X})$$

Après déformation du maillage, la position finale  $\mathbf{X}' = (x', y', z')^T$  d'un point de  $V$  (ou d'un objet plongé dans  $V$ ) s'exprime en fonction de la nouvelle position des nœuds de contrôle  $\mathbf{P}'_{i,j,k}$  et de ses coordonnées paramétriques  $u, v, w$  sous la forme :

$$\mathbf{X}' = \mathbf{H}'(u, v, w) = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} B_i^l(u) \cdot B_j^m(v) \cdot B_k^n(w) \cdot \mathbf{P}'_{i,j,k} \quad (4.4)$$

et en fonction de sa position initiale  $\mathbf{X} = (x, y, z)^T$  de la manière suivante :

$$\mathbf{X}' = \mathbf{H}'(\mathbf{U}) = \mathbf{H}'(\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{X})) \quad (4.5)$$

Cette expression de la déformation est différente de la formulation générale des déformations spatiales de Borrel et Bechmann. Intéressons nous maintenant au déplacement  $\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X}' - \mathbf{X}$  des points de  $V$  plutôt qu'à leur position finale. Nous pouvons aisément exprimer  $\Delta\mathbf{X}$  en fonction du déplacement respectif  $\Delta\mathbf{P}_{i,j,k} = \mathbf{P}'_{i,j,k} - \mathbf{P}_{i,j,k}$  de chaque nœud du maillage de contrôle :

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{X} &= \mathbf{X}' - \mathbf{X} \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} B_i^l(u) \cdot B_j^m(v) \cdot B_k^n(w) \cdot \mathbf{P}'_{i,j,k} \\ &\quad - \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} B_i^l(u) \cdot B_j^m(v) \cdot B_k^n(w) \cdot \mathbf{P}_{i,j,k} \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} B_i^l(u) \cdot B_j^m(v) \cdot B_k^n(w) \cdot (\mathbf{P}'_{i,j,k} - \mathbf{P}_{i,j,k}) \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} B_i^l(u) \cdot B_j^m(v) \cdot B_k^n(w) \cdot \Delta\mathbf{P}_{i,j,k} \end{aligned}$$

Cette équation peut se réécrire sous la forme matricielle :

$$\Delta\mathbf{X} = \Delta P \cdot B(\mathbf{U}) \quad (4.6)$$

où  $\Delta P$  est une matrice de dimension  $3 \times n_p$  dont les colonnes correspondent aux coordonnées des déplacements des  $n_p$  nœuds de contrôle et  $B$  est un vecteur colonne de

dimension  $n_p$  défini par le produit tensoriel de trois fonctions polynômiales dépendant respectivement des coordonnées paramétriques  $u$ ,  $v$  et  $w$ . En posant  $M = \Delta P$  et  $F = B \circ H^{-1}$ , nous pouvons réécrire l'équation 4.6 sous la forme suivante :

$$\Delta \mathbf{X} = M.F(\mathbf{X})$$

Nous retrouvons ici la formulation de Borrel et de Bechmann des déformations spatiales.

Pour résumer, le fonctionnement d'un outil de déformation de formes libres se décompose en quatre étapes :

- L'utilisateur définit dans un premier temps, les différents paramètres du maillage de contrôle (position, orientation, extension de la grille et nombre de cellules dans les trois directions de l'espace).
- L'objet à déformer est ensuite plongé dans l'espace paramétrique défini par le maillage de contrôle. Des coordonnées paramétriques  $u$ ,  $v$ ,  $w$  sont calculées pour tous les points de l'objet situés dans les limites de la grille de contrôle. Les points situés à l'extérieur du maillage ne seront ultérieurement pas pris en compte. Leur position ne sera donc pas modifiée.
- L'utilisateur peut alors déformer le maillage de contrôle.
- Cette déformation est répercutée sur l'ensemble des points de l'objet grâce à la fonction  $\mathbf{H}'$ .

Ces deux dernières opérations pourront être répétées autant de fois jusqu'à l'obtention d'un objet de forme satisfaisante. Dans les deux sections suivantes, nous allons montrer comment calculer pour chaque point d'un objet ses coordonnées paramétriques  $u$ ,  $v$  et  $w$  et décrire quelques fonctions paramétriques utilisées dans les outils de déformation de formes libres.

### 4.3.2 Calcul des coordonnées paramétriques d'un point

Le calcul des coordonnées des points de l'objet dans le domaine paramétrique est immédiat si le maillage de contrôle est une grille parallélépipédique dont le pas est régulier suivant les trois axes  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . C'est le cas des maillages de contrôle couramment utilisés dans les techniques de déformation de formes libres. Une telle grille est entièrement déterminée par sept paramètres : son origine  $\mathbf{X}_0$ , trois vecteurs  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  et le nombre de cellules suivant les trois axes de la grille, respectivement  $n_u$ ,  $n_v$  et  $n_w$ . Cette grille définit un repère local  $(\mathbf{X}_0, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  dans lequel les coordonnées paramétriques  $u$ ,  $v$ ,  $w$  des points de l'espace initial sont calculées (voir figure 4.5). La

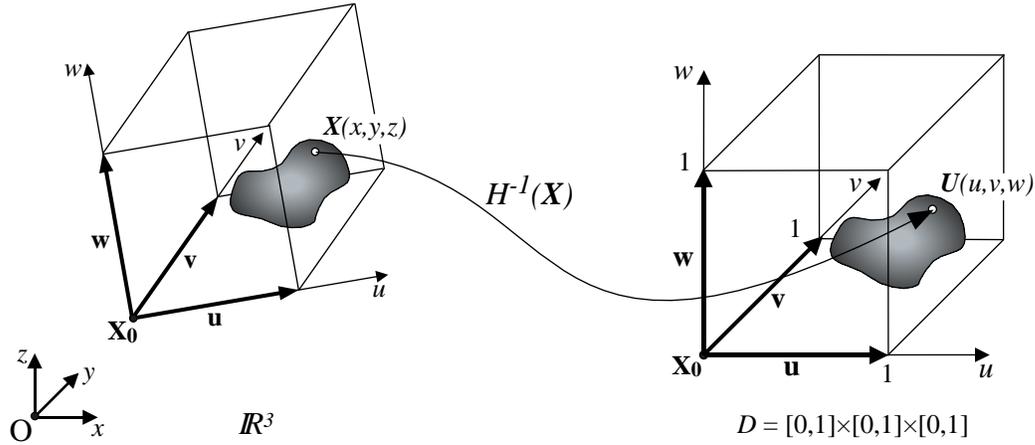


Figure 4.5: Calcul des coordonnées paramétriques d'un point  $\mathbf{X}$  de  $\mathbb{R}^3$ .

position d'un point  $\mathbf{X}$  exprimée en fonction de ses coordonnées paramétriques  $u, v, w$  est donnée par l'équation :

$$\mathbf{X}(u, v, w) = \mathbf{X}_0 + u \cdot \mathbf{u} + v \cdot \mathbf{v} + w \cdot \mathbf{w}$$

Il est alors facile de déduire de cette équation, les expressions de  $u, v$  et  $w$  :

$$u = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)}{\mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}}, \quad v = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{w} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)}{\mathbf{u} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}}, \quad w = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)}{\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}$$

Si  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  sont orthogonaux deux à deux, la définition des coordonnées  $u, v$  et  $w$  s'exprime plus simplement sous la forme :

$$u = \frac{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}, \quad v = \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}, \quad w = \frac{\mathbf{w} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}$$

Si l'objet manipulé est entièrement plongé dans la grille de contrôle, les coordonnées paramétriques  $u, v$  et  $w$  associées à chaque point de l'objet seront comprises dans les intervalles  $[0, 1]$ ,  $[0, 1]$  et  $[0, 1]$  respectivement. Nous nous placerons généralement dans cette configuration. En revanche, si des points de l'objet sont localisés en dehors du maillage de contrôle, leurs coordonnées paramétriques seront en dehors de ces intervalles. Ces points ne seront alors pas pris en compte par l'algorithme de déformation de formes libres et leur position restera inchangée.

Des fonctions de paramétrisation plus complexes peuvent être définies. C. Mugerin et R. Cognot dans [MC99, Cog01a, Cog01b] proposent une méthode de paramétrisation 3D contrainte par les structures géologiques. Sur la figure 4.6, la forme de trois surfaces isovaleurs  $u = 0$ ,  $u = 0.5$  et  $u = 1$  est contrainte par la géométrie des trois failles. Cette méthode permet la construction d'une grille de contrôle (et la définition de la fonction de paramétrisation associée) dont certains plans épousent la forme des failles et des horizons précisés par l'utilisateur.

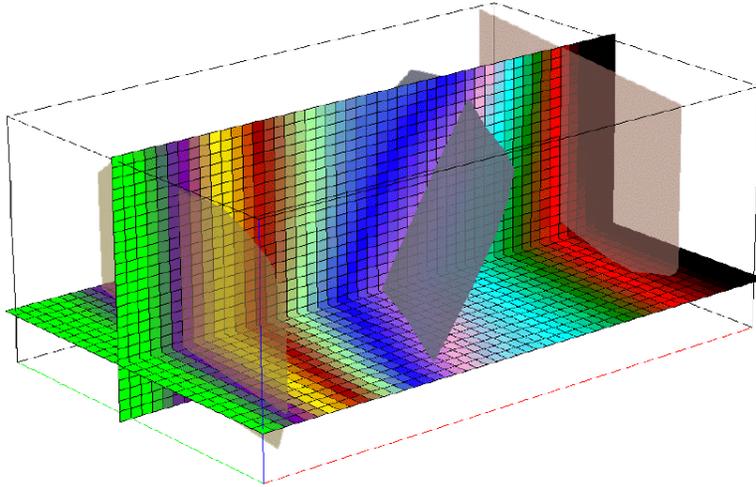


Figure 4.6: *Paramétrisation 3D contrainte par la géologie. La forme des surfaces isovaleurs  $u = 0$ ,  $u = 1$  est contrôlée par la géométrie des failles de gauche et de droite. Une surface isovaleur doit passer par la faille centrale.*

### 4.3.3 Fonctions paramétriques

Nous allons maintenant décrire dans cette section quelques fonctions paramétriques parmi celles utilisées pour définir les outils de déformation de formes libres.

#### Hyperpatch de Bézier

Historiquement, les outils de déformation de formes libres sont basés sur un hyperpatch de Bézier [SP86]. Un hyperpatch de Bézier est une extension naturelle des courbes et de surfaces de Bézier [Bez86] aux volumes. Une courbe de Bézier est définie comme une somme pondérée de  $l + 1$  points reliés en une ligne polygonale (cf. figure 4.7A) :

$$\mathbf{X} = H(u) = \sum_{i=0}^l B_l^i(u) \cdot \mathbf{P}_i$$

Chaque nœud de la ligne de contrôle est pondéré par le polynôme de Bernstein  $B_l^i(t)$  exprimé en fonction de la coordonnée paramétrique  $u \in [0, 1]$  associée à chaque point de la courbe.

$$B_l^i(u) = \sum_{i=0}^l \frac{l!}{(l-i)!i!} \cdot (1-u)^{l-i} \cdot u^i$$

Une surface s'obtient en balayant dans l'espace suivant l'axe  $v$ , une courbe définie en  $u$  et dont la forme évolue au fur et à mesure qu'elle se déplace. Mathématiquement

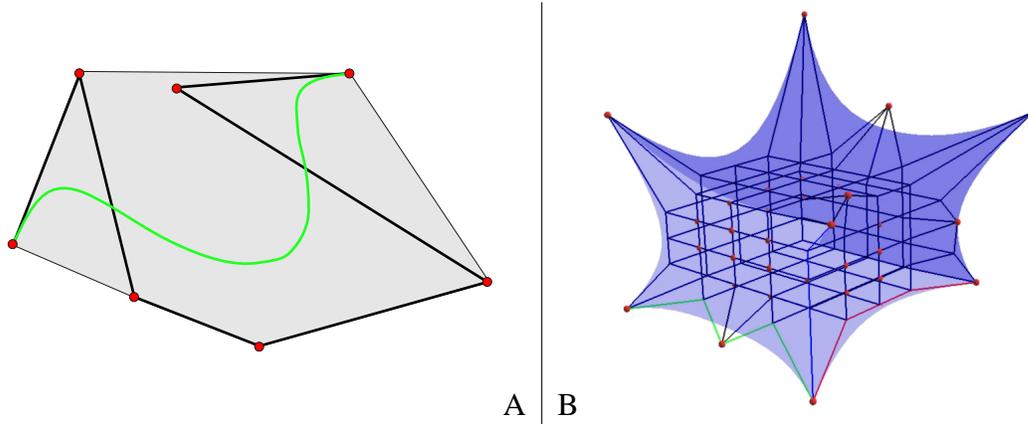


Figure 4.7: *Courbe et volume de Bézier. A : Courbe de Bézier. Elle est contenue dans l'enveloppe convexe de la ligne polygonale de contrôle. Seules les deux extrémités de cette ligne sont interpolées par la courbe de Bézier. B : Volume de Bézier. Il est contenu dans l'enveloppe convexe du maillage de contrôle. Seuls les 8 coins sont interpolés.*

parlant, une telle surface est définie par le produit tensoriel de deux fonctions de Bézier et est contrôlée par une grille de points de dimension  $(l + 1) \cdot (m + 1)$  :

$$\mathbf{X} = H(u, v) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m B_i^l(u) \cdot B_j^m(v) \cdot \mathbf{P}_{i,j}$$

Enfin, un volume s'obtient en balayant selon l'axe  $w$ , une surface définie en  $u$  et  $v$  et dont la forme change au fur et à mesure qu'elle se déplace. Un volume de Bézier est alors défini par le produit tensoriel de trois fonctions de Bézier :

$$\mathbf{X} = H(u, v, w) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n B_i^l(u) \cdot B_j^m(v) \cdot B_k^n(w) \cdot \mathbf{P}_{i,j,k}$$

Le volume paramétrique de Bézier est contrôlé par une grille tridimensionnelle de dimension  $(l + 1) \cdot (m + 1) \cdot (n + 1)$ . Il hérite tout comme les surfaces de Bézier des propriétés caractéristiques des courbes de Bézier [Far92] :

- Un volume de Bézier est contenu dans l'enveloppe convexe de sa grille de contrôle (voir figure 4.7B). Cette propriété rend cet outil de manipulation assez intuitif.
- La relation entre le volume et le maillage de contrôle qui le définit est invariante par transformation affine (translation, rotation, changement d'échelle). L'application d'une transformation affine sur le maillage de contrôle ou directement sur le volume de Bézier donne le même résultat dans les deux cas.

- Le volume de Bézier interpole les 8 coins du maillage de contrôle. Les faces du volume sont des surfaces de Bézier qui sont contrôlées par les bords du maillage de contrôle (ces bords sont des grilles 2D).

La position d'un point plongé dans le volume paramétrique de Bézier dépend de la position de l'ensemble des nœuds de la grille de contrôle. Tout déplacement d'un nœud de cette grille aura donc un impact global sur la géométrie de l'objet manipulé. L'utilisateur désire généralement modifier localement son objet et non dans sa globalité. C'est pourquoi, d'autres fonctions paramétriques ont été définies.

### Polygones rationnels de Bernstein

Davis dans [DB91] et Kalra dans [KMMTT92] ont proposé les polynômes rationnels de Bernstein comme base à leur outils de manipulation. L'équation du volume paramétrique s'écrit alors sous la forme :

$$\mathbf{X} = H(u, v, w) = \frac{\sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n B_i^l(u) \cdot B_j^m(v) \cdot B_k^n(w) \cdot w_{i,j,k} \cdot \mathbf{P}_{i,j,k}}{\sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n B_i^l(u) \cdot B_j^m(v) \cdot B_k^n(w) \cdot w_{i,j,k}}$$

Les poids  $w_{i,j,k}$  permettent de moduler l'influence des nœuds de contrôle. Par exemple, si ces poids augmentent au fur et à mesure que l'on se rapproche du nœud déplacé, ce nœud se comportera comme un point attracteur. Au contraire, si les poids diminuent au fur et à mesure que l'on se rapproche du nœud déplacé, ce nœud agira inversement en repoussant l'objet manipulé. Enfin, si tous ces poids sont égaux, le comportement de l'outil de manipulation se réduit à celui d'un outil basé sur l'hyperpatch de Bézier.

Le contrôle de la géométrie des objets reste global : la position d'un point dépend de la position de la totalité des nœuds du maillage même si les poids  $w_{i,j,k}$  permettent de moduler leur contribution à la déformation.

### B-Splines

Les courbes B-Spline ont été introduites pour pallier au manque de souplesse des courbes de Bézier [Far92]. En effet, il est difficile de représenter des lignes de forme complexe à l'aide d'une courbe de Bézier si ce n'est qu'au prix d'une augmentation du degré du polynôme et donc du nombre de points de contrôle. De telles lignes complexes peuvent être en revanche construites par morceaux à l'aide d'un nombre fini de courbes Bézier de degré inférieur (cf. figure 4.8A). Le concept de courbe B-Spline a été ensuite étendu aux surfaces (cf. figure 4.8B) puis aux techniques de déformation de formes libres par [Com89] ou encore [GP89]. La position d'un point de l'espace s'écrit en fonction de ces coordonnées paramétriques  $u$ ,  $v$  et  $w$  :

$$\mathbf{X} = H(u, v, w) = \sum_{i=0}^{a+l-1} \sum_{j=0}^{b+m-1} \sum_{k=0}^{n-c+l} B_i^l(u) \cdot B_j^m(v) \cdot B_k^n(w) \cdot \mathbf{P}_{i,j,k}$$

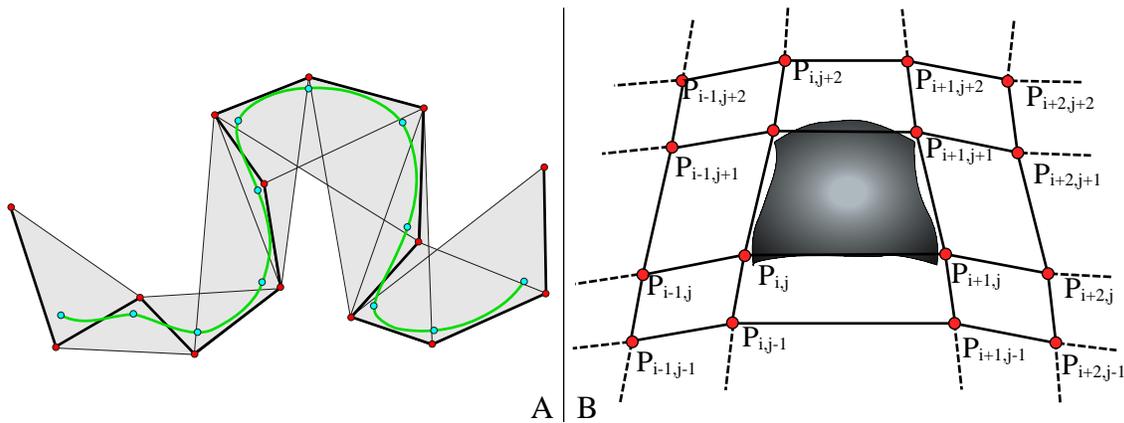


Figure 4.8: A : courbe B-Spline cubique. Chaque segment curviligne de la courbe est contrôlé par 4 nœuds de la ligne polygonale. La courbe est contenue dans l'union de l'enveloppe convexe des polygones de contrôle affichée en grisé. B : un patch de surface B-Spline est contrôlé par une grille bidimensionnelle composée de 16 nœuds.

Le volume paramétrique ainsi défini est composé de  $a \cdot b \cdot c$  cellules adjacentes de degré  $l$ ,  $m$ ,  $n$  en  $u$ ,  $v$  et  $w$  respectivement et dont la géométrie est contrôlée par  $(a + l) \cdot (b + m) \cdot (c + n)$  nœuds de contrôle. Les fonctions de bases B-Splines  $B_i^l$ ,  $B_j^m$  et  $B_k^n$  sont calculées récursivement en utilisant la formule de C. de Boor [Far92]. Les fonctions B-Splines couramment utilisées sont des fonctions B-Splines cubiques uniformes.

Les fonctions B-Splines ont plusieurs avantages par rapport aux autres fonctions :

- Le contrôle de la géométrie du volume paramétrique et donc de la géométrie des objets qui y sont plongés est local. La position d'un point  $X$  de l'Univers ne dépend que de la position de  $(l + 1) \cdot (m + 1) \cdot (n + 1)$  nœuds de contrôle soit  $4 \times 4 \times 4 = 64$  nœuds dans le cas d'une fonction B-Spline tri-cubique. Réciproquement, le déplacement d'un nœud de contrôle n'influencera que la position des points contenus dans les deux premières auréoles de cellules situées autour de ce nœud (soit  $8 + 56 = 64$  cellules).
- La mise à jour de la géométrie de l'objet manipulé se fait plus rapidement. Comme la déformation est locale, le calcul d'une nouvelle position n'est nécessaire que pour un nombre réduit de points et non pour la totalité. L'augmentation de la taille de la grille n'a pas non plus d'influence sur le temps de calcul pour la même raison.
- Le degré de continuité d'une B-Spline est donné par le degré de ses fonctions B-Spline de base. Une B-Spline de dimension  $l$  est  $C^{l-1}$  continue. De même, un volume paramétrique défini par le produit tensoriel de trois fonctions B-Spline

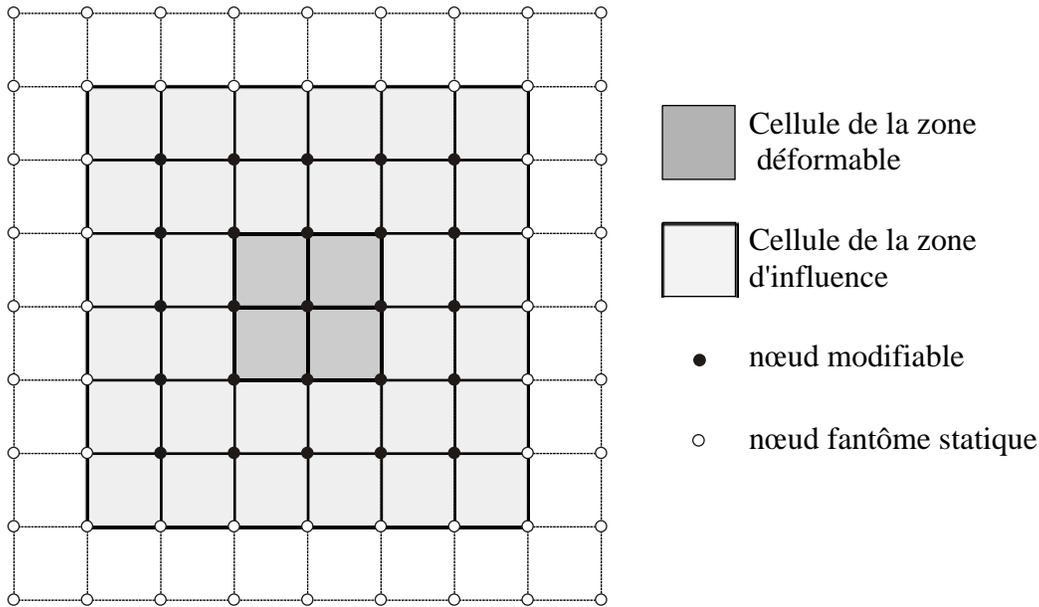


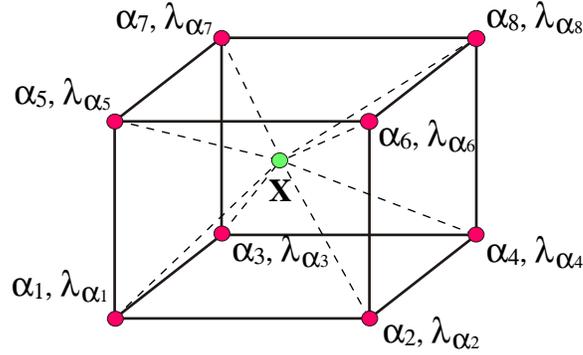
Figure 4.9: *Subdivision du maillage en deux sous-zones : une zone déformable dont les nœuds sont modifiables et une zone sous influence de la première et dont les nœuds sont statiques et invisibles à l'utilisateur.*

de dimension  $l$ ,  $m$  et  $n$  respectivement sera  $\mathcal{C}^k$  continu avec  $k = \min((l - 1), (m - 1), (n - 1))$ . Un outil de déformation de formes libres basé sur une fonction B-Spline tri-cubique permet de réaliser des transformations qui respectent la continuité des normales (continuité  $\mathcal{C}^1$ ) et la continuité des courbures (continuité  $\mathcal{C}^2$ ). La déformation d'un modèle avec un outil FFD basé sur des fonctions B-Splines cubiques n'aura pas ainsi de conséquences sur l'algorithme de tracé de rayons. Cet algorithme a besoin d'une estimation de la normale et des courbures pour chaque point d'impact d'un rai sismique avec une surface du modèle [Gro97]. Si la transformation n'est pas suffisamment "lisse", cette estimation est biaisée, ce qui n'est pas le cas avec les B-Splines tricubiques.

Le déplacement des nœuds situés en bordure du maillage est parfois lié à des problèmes de continuité de la déformation [BBB87]. Une des solutions généralement proposée est de subdiviser le maillage en deux zones (voir figure 4.9) :

- une zone déformable où les nœuds de contrôle sont autorisés à se déplacer ;
- une zone large de trois cellules (ou de trois nœuds) en bordure du maillage dont les nœuds de contrôle sont statiques.

Pour des raisons évidentes de commodité, les nœuds de la deuxième zone ne sont pas visibles à l'utilisateur.

Figure 4.10: *Interpolation Trilinéaire.*

### Interpolation trilinéaire

La position d'un point  $\mathbf{X}$  de l'espace est donnée par l'interpolation trilinéaire de la position des huit nœuds de la cellule d'indices  $i, j$  et  $k$  qui contient  $\mathbf{X}$  (cf. figure 4.10).

$$\mathbf{X} = H(u, v, w) = \sum_{i=1}^8 \lambda_{\alpha_i}(u, v, w) \cdot \mathbf{P}_{\alpha_i}$$

avec les points  $\mathbf{P}_{\alpha_i}$  :

$$\begin{array}{llll} \mathbf{P}_{\alpha_1} = \mathbf{P}_{i,j,k} & \mathbf{P}_{\alpha_2} = \mathbf{P}_{i+1,j,k} & \mathbf{P}_{\alpha_3} = \mathbf{P}_{i,j+1,k} & \mathbf{P}_{\alpha_4} = \mathbf{P}_{i+1,j+1,k} \\ \mathbf{P}_{\alpha_5} = \mathbf{P}_{i,j,k+1} & \mathbf{P}_{\alpha_6} = \mathbf{P}_{i+1,j,k+1} & \mathbf{P}_{\alpha_7} = \mathbf{P}_{i,j+1,k+1} & \mathbf{P}_{\alpha_8} = \mathbf{P}_{i+1,j+1,k+1} \end{array}$$

et les coefficients  $\lambda_{\alpha_i}$  :

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha_1} &= \bar{u}\bar{v}\bar{w} \\ \lambda_{\alpha_2} &= (1 - \bar{u}) \cdot \bar{v}\bar{w} \\ \lambda_{\alpha_3} &= (1 - \bar{v}) \cdot \bar{u}\bar{w} \\ \lambda_{\alpha_4} &= (1 - \bar{u}) \cdot (1 - \bar{v}) \cdot \bar{w} \\ \lambda_{\alpha_5} &= (1 - \bar{w}) \cdot \bar{u}\bar{v} \\ \lambda_{\alpha_6} &= (1 - \bar{u}) \cdot (1 - \bar{w}) \cdot \bar{v} \\ \lambda_{\alpha_7} &= (1 - \bar{v}) \cdot (1 - \bar{w}) \cdot \bar{u} \\ \lambda_{\alpha_8} &= (1 - \bar{u}) \cdot (1 - \bar{v}) \cdot (1 - \bar{w}) \end{aligned}$$

Les coordonnées  $\bar{u} \in [0, 1]$ ,  $\bar{v} \in [0, 1]$ ,  $\bar{w} \in [0, 1]$  correspondent respectivement aux coordonnées  $u \in [u_i, u_{i+1}]$ ,  $v \in [v_j, v_{j+1}]$  et  $w \in [w_k, w_{k+1}]$  exprimées dans le repère local défini par la cellule d'indices  $i, j, k$ .

$$\bar{u} = \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} \quad \bar{v} = \frac{v - v_j}{v_{j+1} - v_j} \quad \bar{w} = \frac{w - w_k}{w_{k+1} - w_k}$$

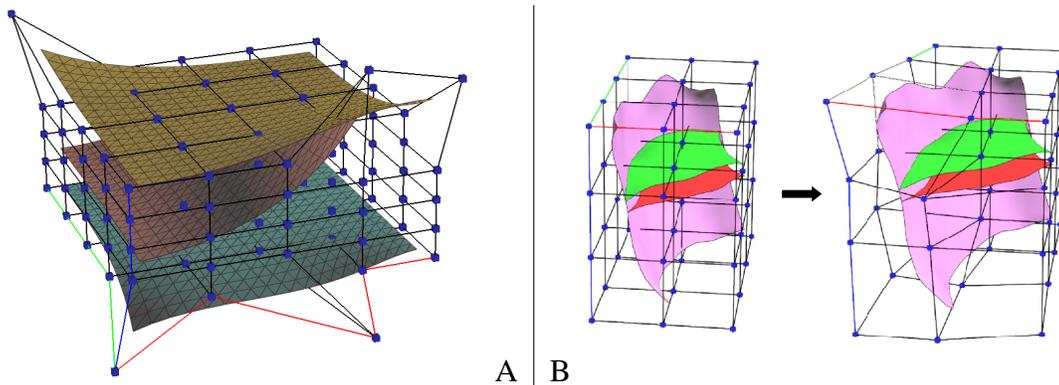


Figure 4.11: *Déformation d'un modèle synthétique (A) et d'un modèle faillé (B) à l'aide de notre outil de déformation de formes libres.*

Cette fonction paramétrique autorise tout comme les fonctions B-Splines un contrôle local de la manipulation d'objets. Si un nœud du maillage de contrôle est déplacé, seuls les points contenus par les 8 cellules adjacentes à ce nœud verront leur position modifiée. Cependant, cette fonction ne préserve que la continuité  $C^0$ . Seul un maillage de densité du même ordre de grandeur que la triangulation des surfaces du modèle garantit une déformation suffisamment lisse. En contrepartie, il n'est plus possible d'utiliser cet outil dans un mode interactif.

#### 4.3.4 Conclusion

Nous avons réalisé un outil de manipulation utilisant indifféremment les fonctions de Bézier, les B-Splines tricubiques et l'interpolation trilinéaire.

- Cet outil permet de déformer de manière interactive un modèle ou une surface isolée par l'intermédiaire d'un maillage de contrôle (voir figure 4.11). Les B-Splines offrent le meilleur compromis entre une déformation locale et une déformation lisse.
- Les contacts surface contre surface sont préservés : deux points confondus appartenant à une frontière commune ont des coordonnées paramétriques identiques. En conséquence, après déformation, ces deux points partagent la même position géométrique.
- L'outil de manipulation peut être contraint de telle manière à ce que les cellules ne s'intersectent pas deux à deux : un nœud ne peut se déplacer que dans le domaine formé par les huit cellules adjacentes. Cette contrainte suffisante mais non nécessaire garantit que les surfaces du modèle ne se coupent pas entre elles mais interdit en contrepartie un grand nombre de déformations possibles.

Un outil de déformation de formes libres souffre cependant de plusieurs défauts :

- Ce mode de manipulation n'est pas assez intuitif. L'utilisateur n'a aucune idée a priori du résultat qu'il va obtenir après déplacement d'un nœud de contrôle. Il devra donc procéder par tâtonnements avant d'obtenir une forme satisfaisante.
- Le nombre de degrés de liberté est trop élevé pour une utilisation agréable. Pour déplacer un point dans une direction donnée, l'utilisateur dispose de  $3.n_p$  degrés de liberté (un nœud peut être déplacé dans les trois directions de l'espace et le maillage compte  $n_p$  nœuds). Quand le nombre de nœuds devient trop élevé, la manipulation du maillage devient délicate : les nœuds situés au cœur de la grille sont difficilement accessibles et peuvent être cachés par des surfaces du modèle.
- Il est difficile de manipuler individuellement un horizon situé au cœur d'un modèle et donc de la grille de contrôle.

Pour une manipulation plus agréable et intuitive, il est préférable de modifier directement les objets : l'utilisateur définit des points par lesquels l'objet doit passer. Une déformation élémentaire est définie par un point et un vecteur de translation : c'est l'intérêt principal des méthodes de déformation spatiale par manipulation directe. Ces méthodes vont nous servir de base pour définir un outil qui sera utilisé pour déformer un modèle géologique selon un nombre prédéfini de vecteurs de perturbation.

## 4.4 Déformation spatiale par manipulation directe

Les outils de déformation spatiale par manipulation directe (ou déformations contraintes) ont été développés pour offrir à l'utilisateur des outils de manipulation beaucoup plus intuitifs. Au lieu de façonner un objet par l'intermédiaire d'un maillage, l'utilisateur fixe pour un nombre fini de points leur position finale. Chaque couple (point d'origine, point final) constitue une contrainte qui est utilisée pour définir la fonction de déformation  $d$ . Une fois la fonction de déformation déterminée, la nouvelle position des points non contraints peut alors être calculée.

Trois grandes familles de méthodes de déformation spatiale par manipulation directe sont représentées dans la littérature :

- les techniques de déformation de formes libres par manipulation directe (*Direct Manipulation Free Form Deformation* ou DMFFD) [HHK92] ;
- les techniques de déformation radiale (*Simple Radial Deformation*) dont dérivent les SCODEF *Simple Constrained Déformation* [BR94] ;
- DOGME (*Deformation of Geometric Models Editor*), c'est la méthode de déformation par contraintes la plus générale de toutes [BB91, BD93].

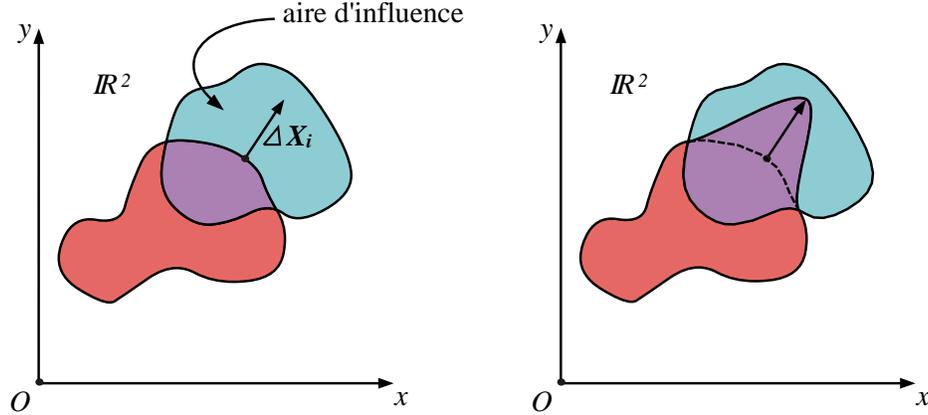


Figure 4.12: Principe de la déformation spatiale par manipulation directe.

Avant d'aborder ces trois méthodes de déformation, nous allons tout d'abord expliquer le principe général des déformations spatiales par manipulation directe.

#### 4.4.1 Principe des déformations contraintes [BB91]

La déformation est définie par un nombre fini  $n_c$  de contraintes. Chaque contrainte  $\mathcal{C}_i$  est décrite par un point de départ  $\mathbf{C}_i$ , un point d'arrivée  $\mathbf{C}'_i$  et sa zone d'influence : seuls les points situés dans les limites de cette zone d'influence seront modifiés (cf. figure 4.12). Le déplacement  $\Delta\mathbf{C}_i = \mathbf{C}'_i - \mathbf{C}_i$  associé à la contrainte  $\mathcal{C}_i$  s'exprime en fonction de la fonction de déformation  $d$  sous la forme :

$$\Delta\mathbf{C}_i = d(\mathbf{C}_i) = [d_1(\mathbf{C}_i), d_2(\mathbf{C}_i), \dots, d_n(\mathbf{C}_i)]^T$$

Pour rappel, l'image d'un point  $\mathbf{X}$  par la déformation  $d$  est donnée par l'équation :

$$d(\mathbf{X}) = M \cdot f(\mathbf{X})$$

Pour une fonction d'extrusion  $f$  donnée, la matrice  $M$  est calculée en résolvant le système de  $(n \times n_c)$  équations et à  $m$  inconnues :

$$d(\mathbf{C}_i) = M \cdot f(\mathbf{C}_i), \forall i \in [1, n_c] \quad (4.7)$$

Le système 4.7 peut être décomposé en  $n$  sous-systèmes à  $n_c$  équations en considérant chaque rangée  $M_j$  de la matrice  $M$  séparément. Le déplacement pour la  $j^{\text{eme}}$  coordonnée de la contrainte  $\mathcal{C}_i$  s'écrit alors sous la forme :

$$d_j(\mathbf{C}_i) = M_j \cdot f(\mathbf{C}_i) = f(\mathbf{C}_i)^T \cdot M_j^T \quad (4.8)$$

En considérant l'ensemble des  $n_c$  contraintes pour la  $j^{eme}$  coordonnée de l'espace, nous obtenons :

$$D_j = \begin{bmatrix} d_j(\mathbf{C}_1) \\ \vdots \\ d_j(\mathbf{C}_{n_c}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^T(\mathbf{C}_1) \\ \vdots \\ f^T(\mathbf{C}_{n_c}) \end{bmatrix} \cdot M_j^T = X \cdot M_j^T$$

$$\text{avec } X = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{C}_1) & \cdots & f_m(\mathbf{C}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(\mathbf{C}_{n_c}) & \cdots & f_m(\mathbf{C}_{n_c}) \end{bmatrix}$$

La résolution de ces  $n$  systèmes d'équations s'obtient par inversion de la matrice  $X$ . Dans la très grande majorité des cas, cette matrice de dimension  $n_c \times m$  n'est pas inversible. Selon les valeurs relatives de  $n_c$  et de  $m$ , nous avons les trois possibilités suivantes :

- Si  $n_c < m$ , alors le système est sous-contraint. Il possède plus d'inconnues que d'équations : il existe une infinité de solutions vérifiant l'équation 4.8.
- Si  $n_c = m = \text{rang}(X)$ , alors  $X$  est inversible : le système admet une seule et unique solution. Les contraintes définissent donc entièrement la déformation.
- Si  $n_c > m$ , alors le système est sur-contraint. Il n'existe pas de solution à l'équation 4.8. Une solution approximative respectant au mieux les contraintes pourra toutefois être calculée.

La résolution de ce système se fait en calculant la pseudo-inverse de la matrice  $X$ . La pseudo-inverse  $X^+$  d'une matrice  $X$  est définie de manière unique par les relations suivantes :

$$X^+ = XX^+X, \quad X = X^+XX^+, \quad (XX^+)^T = XX^+ \quad (X^+X)^T = X^+X$$

La meilleure approximation au sens des moindres carrés  $\tilde{M}_j^T$  de la solution à l'équation  $D_j = X \cdot M_j^T$  est définie par :

- $\|X \cdot \tilde{M}_j^T - D_j\| > \|X \cdot M_j^T - D_j\|$ .  $\tilde{M}_j^T$  respecte au mieux au sens des moindres carrés les contraintes quand le système est sur-contraint
- $\|X \cdot \tilde{M}_j^T - D_j\| = \|X \cdot M_j^T - D_j\|$  et  $\|\tilde{M}_j^T\| \geq \|M_j^T\|$ .  $\tilde{M}_j^T$  respecte les contraintes et minimise la norme de  $M_j^T$  quand le système est sous-contraint.

Cette approximation  $\tilde{M}_j^T$  se calcule à partir de la pseudo-inverse  $X^+$  de la matrice  $X$  en utilisant la relation suivante :

$$\tilde{M}_j^T = D_j X^+ \tag{4.9}$$

Le lecteur pourra se référer à [Gai00] pour une comparaison de l'efficacité des différentes méthodes de construction de la pseudo-inverse d'une matrice. Une solution générale au système d'équations 4.8 est donnée par la somme de la meilleure approximation  $\tilde{M}_j^T$  et d'un terme d'optimisation :

$$M_j^T = \tilde{M}_j^T + (1 - X^+X) \cdot \zeta_j \quad (4.10)$$

où  $I$  est la matrice identité et  $\zeta_j$  est un vecteur colonne de dimension  $m$ . Borrel et Bechmann exposent dans [BB91] comment utiliser et calculer ce vecteur  $\zeta_j$  d'une manière transparente pour l'utilisateur afin d'affiner le résultat de la déformation.

Enfin, une fois la matrice  $M$  construite rangée par rangée grâce à l'équation 4.10, le déplacement  $\Delta \mathbf{X}$  d'un point  $\mathbf{X}$  de l'espace initial après déformation se calcule en utilisant l'équation  $d(\mathbf{X}) = M.F(\mathbf{X})$

#### 4.4.2 Déformation de formes libres par manipulation directe

Les méthodes de déformation de formes libres par manipulation directe ont été introduites par Hsu [HHK92] pour pallier au manque d'intuitivité de la manipulation d'un objet avec un outil de déformation de formes libres classique. Le fonctionnement d'un outil DDFFD se décompose en trois étapes :

- L'utilisateur définit pour certains points de son objet leur nouvelle position. Chaque couple de points (point origine  $C_i$ , point final  $C'_i$ ) forme une contrainte  $C_i$ .
- Le maillage est ensuite déformé de telle manière à ce que chaque contrainte de déplacement  $C_i$  soit respectée au mieux.
- Une fois la meilleure conformation du maillage respectant les contraintes  $C_i$  estimée, la position des points non contraints se calcule comme pour tout outil de déformation libre en utilisant l'équation 4.4.

Le déplacement  $\Delta C_i$  du point  $C_i$  vers le point  $\Delta C'_i$  s'exprime en fonction des coordonnées paramétriques  $u$ ,  $v$ , et  $w$  sous la forme :

$$\Delta C_i = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} B_i^l(u) \cdot B_j^m(v) \cdot B_k^n(w) \cdot \Delta P_{i,j,k} \quad (4.11)$$

Cette équation relie la translation d'un point de l'objet au déplacement des nœuds du maillage de contrôle. Elle délimite la zone d'influence de la contrainte  $C_i$ . Dans le cas d'un volume paramétrique défini par le produit tensoriel de Bézier, la contrainte sera globale : la position d'un point dépend de la totalité des nœuds de la grille de

contrôle. Au contraire, avec un volume paramétrique basé sur des B-Splines tricubiques ou sur la fonction d'interpolation trilinéaire, les contraintes sont locales : la position d'un point n'est conditionnée que par la position de 64 et 8 nœuds respectivement. En prenant compte l'ensemble des  $n_c$  contraintes, cette équation peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\Delta \mathbf{C} = \Delta P.F(C) \quad (4.12)$$

Nous retrouvons le système d'équations 4.7. Il sera résolu de la même manière que dans la section précédente. Dans le cas où ce système est sous-déterminé, la solution  $\tilde{M}_j^T$ ,  $j = (1, 2, 3)$  donnée par l'équation 4.9 minimise la norme de  $M_j^T$  : c'est donc la solution parmi une infinité d'autres solutions qui minimise le déplacement des nœuds de la grille de contrôle.

### 4.4.3 Déformations radiales

Nous ne présenterons dans ce paragraphe que les contraintes radiales de type SCODEF (Simple Constrained Deformation) [BR94].

#### Définition d'une SCODEF

La déformation est définie par un nombre fini  $n_c$  de contraintes. Chaque contrainte  $\mathcal{C}_i$  est définie par un couple de points  $(\mathbf{C}_i, \mathbf{C}'_i)$  et par son rayon d'action  $R_i$ . L'influence de la contrainte  $\mathcal{C}_i$  se limite à la sphère de centre  $\mathbf{C}_i$  et de rayon  $R_i$  et diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne du point  $\mathbf{C}_i$ . Un point  $\mathbf{X}$  de l'espace  $\mathbb{R}^n$  ne sera modifié par la contrainte  $\mathcal{C}_i$  que si la distance  $\|\mathbf{C}_i - \mathbf{X}\|$  qui le sépare de  $\mathbf{C}_i$  est inférieure à  $R_i$ .

Le déplacement d'un point  $\mathbf{X}$  de  $\mathbb{R}^n$  est conditionné par les  $n_c$  contraintes qui définissent la SCODEF. Il est donné par la fonction de déformation  $d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  :

$$\Delta(\mathbf{X}) = d(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^{n_c} \mathbf{M}_i \cdot f_i(\mathbf{X}) = M.F(X)$$

$\mathbf{M}_i$  est un vecteur colonne de dimension  $n$  correspondant au vecteur de déplacement associé à la contrainte  $\mathcal{C}_i$  qui est réévalué pour tenir compte des contraintes avoisinantes.  $f_i$  est une fonction scalaire représentant la contribution de la contrainte  $\mathcal{C}_i$  au déplacement d'un point  $\mathbf{X}$ .

$$f_i(X) = B_i \cdot \left( \frac{\|\mathbf{X} - \mathbf{C}_i\|}{R_i} \right)$$

où  $B_i$  est une fonction de base B-Spline centrée en 0. La contribution de la fonction  $f_i$  est maximale quand la distance au centre  $\mathbf{C}_i$  est nulle ( $f_i = 1$ ) et nulle quand la distance au centre est supérieure au rayon d'action  $R_i$ .

Raffin [RNJ99] a étendu la notion de contraintes SCODEF en basant les fonctions  $f_i$  sur d'autres fonctions que les B-Splines et en généralisant la géométrie des zones d'influence à des formes géométriques quelconques.

### Calcul de la matrice $M$

Le calcul de la matrice  $M$  se fait de la même manière que dans la formalisation des déformations spatiales contraintes de Borrel et de Bechmann. Si nous considérons l'ensemble des  $n_c$  contraintes, nous avons à résoudre le système suivant :

$$d(\mathbf{C}_i) = M \cdot f_i(\mathbf{C}_i), \forall i \in [1, n_c]$$

Si nous ne considérons que la  $j^{\text{eme}}$  coordonnée de l'espace, ce système se réduit à :

$$D_j = \begin{bmatrix} d_j(\mathbf{C}_1) \\ \vdots \\ d_j(\mathbf{C}_{n_c}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^T(\mathbf{C}_1) \\ \vdots \\ f^T(\mathbf{C}_{n_c}) \end{bmatrix} \cdot M_j^T = X \cdot M_j^T \quad (4.13)$$

où  $X$  est la matrice carrée de dimension  $n_c$  :

$$X = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{C}_1) & \cdots & f_{n_c}(\mathbf{C}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n_c}(\mathbf{C}_{n_c}) & \cdots & f_{n_c}(\mathbf{C}_{n_c}) \end{bmatrix}$$

La calcul de la matrice  $M$  s'obtient directement par inversion de la matrice  $X$ .

### Influence entre contraintes

Une contrainte peut être sous l'influence d'autres contraintes et réciproquement. Prenons deux contraintes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  de centre  $\mathbf{C}_1$  et  $\mathbf{C}_2$  et de rayon d'action  $R_1$  et  $R_2$  respectivement. Trois cas sont alors possibles :

- $\|\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2\| > R_1 + R_2$  : les deux contraintes sont totalement disjointes (cf. figure 4.13A). Ces deux contraintes ne s'influencent pas mutuellement.
- $\max(R_1, R_2) < \|\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2\| \leq R_1 + R_2$  : les contraintes sont disjointes, mais leurs rayons d'action sont séquents (cf. figure 4.13B). Les points appartenant à l'intersection des volumes d'influence de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  seront sous le contrôle de ces deux contraintes.
- $\|\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2\| \leq \max(R_1, R_2)$  : les deux contraintes ne sont pas disjointes. Une des contraintes au moins influe sur l'autre.

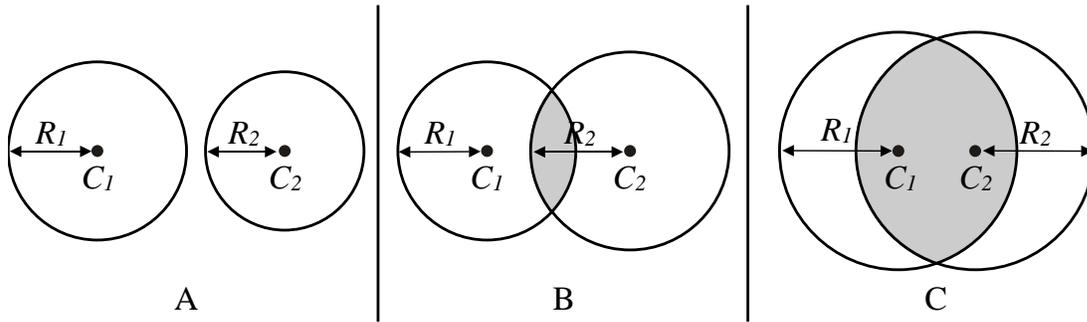


Figure 4.13: *Interrelation entre les contraintes radiales : deux contraintes totalement disjointes (A), partiellement disjointes (B), non-disjointes (C).*

Quand une contrainte  $\mathcal{C}_i$  est totalement indépendante vis à vis des autres contraintes c'est-à-dire quand elle est disjointe ou complètement disjointe par rapport aux  $n_c - 1$  contraintes restantes, le  $i^{\text{ème}}$  vecteur colonne  $M_i$  de la matrice  $M$  est égal au vecteur déplacement  $\Delta\mathbf{C}_i$  associé à la contrainte  $\mathcal{C}_i$ .

$$\Delta\mathbf{C}_i = d(\mathbf{C}_i) = \sum_{k=0}^{n_c} M_k \cdot f_k(\mathbf{C}_i) = M_i \quad (f_k(\mathbf{C}_i) = 1 \text{ si } k = i, 0 \text{ sinon})$$

Si toutes les contraintes sont indépendantes deux à deux, alors le calcul de  $M$  est trivial.  $M_i = \Delta\mathbf{C}_i, \forall i \in [1, n_c]$  et la fonction de déformation s'écrit sous la forme :

$$d(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^{n_c} \Delta\mathbf{C}_i \cdot f(\mathbf{X})$$

Quand deux contraintes ne sont pas disjointes, elles s'influencent l'une sur l'autre. Si une des deux contraintes est modifiée, elle affectera des points influencés par la seconde situés au delà de son rayon d'action. La déformation résultante est souvent peu intuitive et peut générer des distorsions de l'espace d'autant plus fortes que les centres des contraintes sont proches et que les vecteurs contraintes sont opposés (cf. figure 4.14). Borrel et Rappoport proposent de dupliquer les contraintes non disjointes : deux rayons sont associés à la même contrainte, un grand rayon pour fixer sa zone d'action et un petit rayon pour délimiter son influence vis à vis des autres contraintes. Le système d'équations définissant la déformation devient alors redondant et se résout en calculant la pseudo inverse  $X^+$  de la matrice  $X$ . Raffin [RN97] préfère séparer deux contraintes non-disjointes en deux contraintes disjointes en étendant la géométrie des zones d'influence à d'autres formes que des sphères. L'avantage évident de cette dernière méthode est que la fonction de déformation, n'étant définie que par des contraintes disjointes, nécessite très peu de calculs pour sa construction.

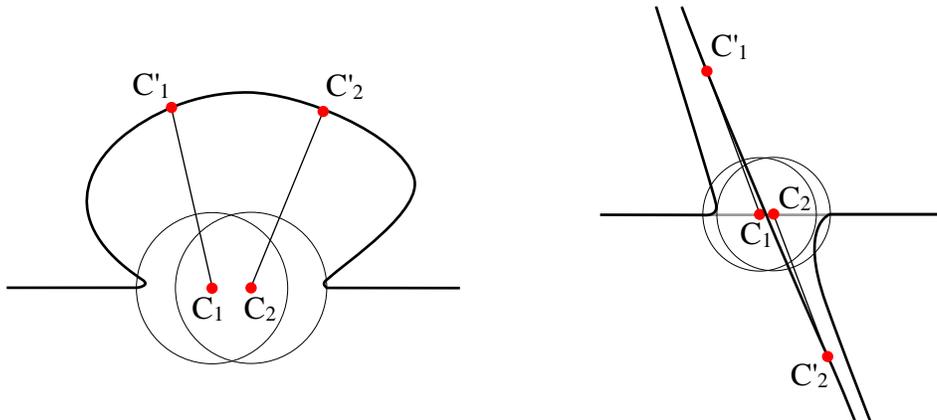


Figure 4.14: *Contraintes non disjointes : le résultat de la déformation devient de moins en moins intuitif au fur et à mesure que les centres des contraintes se rapprochent et génère de très fortes distorsions de l'espace quand les centres sont quasi confondus et les vecteurs contraintes opposés ( $\Delta\mathbf{X} \rightarrow \infty$ )*

#### 4.4.4 DOGME [Bec92]

C'est la méthode de déformation la plus générale. Elle englobe les outils de déformation de formes libres par manipulation directe et les SCODEF. Cette méthode s'appuie directement sur le formalisme de Borrel et de Bechmann des déformations spatiales contraintes. Une déformation est définie par des points et leur image dans l'espace déformé. À chaque contrainte est associée une zone d'influence qui peut être sphérique ou parallélépipédique. La forme de l'espace déformé est déterminée par une fonction d'extrusion  $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ . Diverses fonctions d'extrusion sont proposées à l'utilisateur.

- $F$  est définie par  $m$  fonctions  $f$ .  $F$  est alors appelée *fonction simple*. Les fonctions  $f$  déterminent un type de déformation pour chaque contrainte ( $n_c = m$ ) (voir figure 4.15A). Les SCODEF font partie de cette catégorie.
- $F$  est définie par  $m$  produits de  $n$  fonctions  $f$ .  $F$  est alors appelée *produit simple*. Un type de déformation est déterminé pour chaque contrainte ( $n_c = m$ ) et pour chaque dimension de l'espace (voir figure 4.15B).
- $F$  est un produit tensoriel  $n$ -aire de vecteurs de dimension  $p_1, p_2, \dots, p_n$  dont chaque coordonnée est une fonction  $f$ .  $F$  est appelée *produit tensoriel*. Un type de déformation est déterminé pour toutes les dimensions de l'espace. Le comportement de la fonction de déformation est proche de celui des outils de déformation de formes libres par manipulation directe.

Les fonctions  $f$  sont généralement des fonctions polynômiales ou B-Splines, mais toute autre fonction bijective et continue est utilisable.

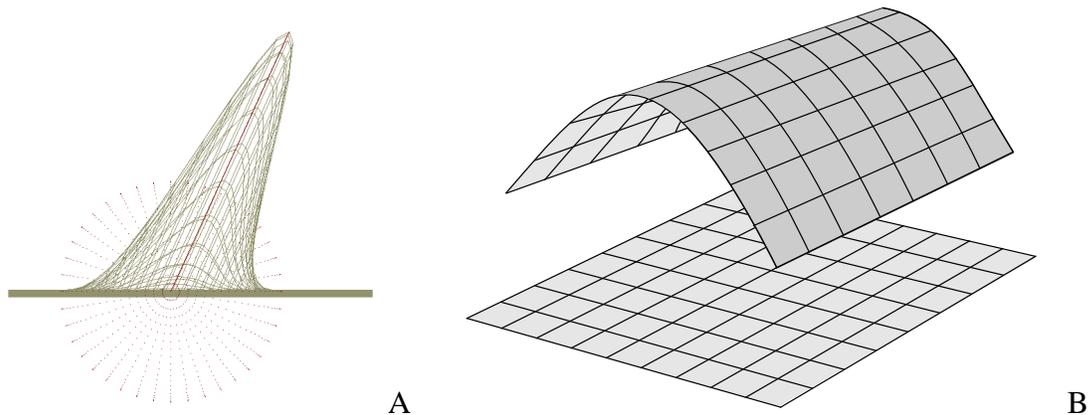


Figure 4.15: *Fonction d'extrusion. A : déformation d'une grille régulière par une fonction simple et une contrainte. B : déformation par produit simple de degré 1 sur un axe et de degré 3 selon l'autre.*

#### 4.4.5 La méthode choisie

Nous avons choisi d'utiliser les techniques de déformation de formes libres par manipulation directe comme base de notre outil de mise à jour automatique de modèles géologiques.

- Un modèle géologique est un domaine fini de  $\mathbb{R}^3$  subdivisé en régions et délimité par une boîte. Dans le logiciel GOCAD, il n'y a aucune restriction sur la géométrie de la boîte englobante. C'est un polyèdre dont les faces sont décrites par des surfaces triangulées parfaitement jointives en leurs bords. Dans le cadre de l'inversion tomographique, les modèles géologiques sont délimités par une boîte parallélépipédique rectangle dont l'extension et l'orientation sont déterminées par le cube sismique à migrer. Un outil de manipulation contrôlé par l'intermédiaire d'un maillage parallélépipédique tels les outils FFD nous semble donc bien adapté à notre problème : nous voulons déformer un volume dans sa globalité et non pas une surface isolée.
- Les vecteurs de perturbation sont régulièrement répartis sur les horizons du modèle suivant un schéma de grille. La déformée d'une surface plane par une SCODEF est une surface bosselée dont chaque mamelon (ou dépression) est centré sur une contrainte. Leur extension est déterminée par le rayon d'action des contraintes. Il en est de même pour les outils FFD. Nous voulons au contraire la déformation la plus lisse possible pour ne pas générer d'artefacts liés à la géométrie des horizons, lors du calcul du modèle de vitesse. De tels artefacts seraient identifiables par l'analyse de la carte des résidus (calcul des écarts par rapport aux données) : elle reproduirait alors le schéma de répartition des vecteurs de perturbation. Le maillage des outils FFD offre un support idéal pour

gérer la déformation dans sa globalité. Des contraintes sur la géométrie du maillage vont nous permettre de lisser le plus possible la déformation.

- Les déformations spatiales se font à topologie constante. Ainsi, un tore pourra se transformer en tasse mais pas en morceau de sucre homéomorphe à une sphère ou en théière (homéomorphe à un double tore). Cependant, elles ne garantissent pas que les objets ne se recoupent pas. Ces problèmes d'auto-intersection arrivent généralement quand deux contraintes sont trop proches et opposées. Des contraintes supplémentaires sur la géométrie du maillage vont nous permettre de régler ces problèmes.

## 4.5 Déformation contrainte d'un modèle géologique

### 4.5.1 Construction de la grille

Dans un outil de déformation de formes libres, la manipulation des objets se fait par déformation d'un volume paramétrique contrôlé par un maillage. Nous utilisons comme maillage initial, une grille 3D régulière orthogonale. Une grille régulière est entièrement déterminée par :

- son point origine  $X_0$  ;
- trois vecteurs  $U, V, W$  qui fixent à la fois les 3 axes de la grille et son extension dans les 3 directions de l'espace ;
- le nombre de cellules  $n_u, n_v$  et  $n_w$  dans les 3 directions de l'espace (le pas est constant dans le cas d'une grille régulière).

Le maillage de notre outil est dimensionné en fonction de la taille du modèle géologique que nous voulons déformer. Nous ferons en sorte que l'intégralité du modèle soit contenue dans la zone déformable contrôlée par le maillage. La totalité des nœuds des surfaces triangulées décrivant les horizons et les failles du modèle seront sous l'influence de l'outil FFD. Pour une utilisation dans un mode interactif, l'utilisateur pourra limiter la taille de sa grille à une zone particulière du modèle. La grille étant régulière et orthogonale, la paramétrisation des nœuds des surfaces du modèle est très rapide.

Le nombre de cellules dans les trois directions de l'espace est déterminé par la répartition et la densité des vecteurs de perturbation. Un maillage trop lâche n'est pas assez flexible pour satisfaire l'ensemble des contraintes. Un maillage trop fin au contraire assurera un respect des vecteurs de perturbation, mais le calcul de la nouvelle conformation du maillage sera en contrepartie coûteux en temps. Si le système 4.12 est sous-déterminé (si le maillage est suffisamment dense par rapport au nombre de contraintes), il existe une infinité de solutions satisfaisant les contraintes ce qui laisse

suffisamment de liberté pour affiner au mieux le résultat de la déformation. Au contraire, quand le système 4.12 est surdéterminé (le maillage est trop lâche par rapport à la densité des contraintes), il n'existe pas de solution vérifiant l'ensemble des contraintes. Seule une solution approximative au sens des moindres carrés pourra être donnée. La sous ou surdétermination dépend de la valeur relative de la dimension  $m$  de la fonction d'extrusion  $F$  et du nombre de contraintes. Selon le type de fonction paramétrique utilisée nous avons :

- Dans le cas d'un volume paramétrique construit à partir du produit tensoriel de trois fonctions de Bézier,  $m$  est égal au nombre de nœuds de contrôles. Le système sera surdéterminé si le nombre de contraintes dépasse le nombre de nœuds de contrôle.
- Dans le cas de l'interpolation trilineaire et des fonctions B-Splines, le volume paramétrique est composé de cellules curvilignes jointives dont la géométrie est contrôlée par 8 et 64 nœuds respectivement. Localement si plus de 8 (64) contraintes sont fixées à l'intérieur d'une cellule, ces contraintes ne pourront pas être satisfaites. Globalement le système est sur-contraint quand le nombre de contraintes dépasse le nombre de nœuds de contrôle, les nœuds contrôlant chaque cellule élémentaire du volume paramétrique n'étant pas indépendants.

La densité du maillage doit être un compromis entre le respect des contraintes et la rapidité du calcul. Dans le cadre d'une manipulation dans un mode interactif, le facteur temps est très important : la déformation doit se faire en temps réel. Pour notre problème, la déformation automatique d'un modèle géologique, ce facteur temps est moins important. Nous essaierons donc autant que possible de nous placer dans une configuration où le système 4.12 est sous-déterminé. Pour des raisons d'efficacité, il est préférable de ne pas utiliser le produit tensoriel de fonctions de Bézier quand le nombre de nœuds est trop élevé. Nous choisirons donc plutôt les B-Splines tricubiques et l'interpolation trilineaire comme fonctions paramétriques.

### 4.5.2 Résolution du système d'équations

La solution au système 4.12 donnée par la pseudo-inverse est celle qui minimise le déplacement des nœuds du maillage. Elle est très bien adaptée à la manipulation interactive des objets car elle autorise un contrôle local de la déformation. Nous voulons au contraire la déformation la plus lisse possible : les variations locales du champ de vecteurs de déplacement  $\Delta\mathbf{X}$  associé à la déformation doivent être les plus faibles possible. Cela peut être traduit dans une première approximation par une contrainte supplémentaire sur le déplacement des nœuds de contrôle. La valeur du déplacement  $\Delta\mathbf{P}_{i,j,k}$  mesurée au nœud d'indices  $i, j$  et  $k$  doit être sensiblement égale à la moyenne de celle mesurée en ses voisins.

$$\Delta\mathbf{P}_{ijk} \simeq \frac{1}{|\Lambda(P_{i,j,k})|} \cdot \sum_{\beta \in \Lambda(P_{i,j,k})} \Delta\mathbf{P}_{\beta}$$

où  $\Lambda(P_{i,j,k})$  est l'ensemble des nœuds connectés au nœud  $P_{i,j,k}$ . Cette contrainte sera respectée au sens des moindres carrés. nous devons donc chercher une solution qui minimise le critère suivant :

$$\sum_{P_{i,j,k}} \left\| \Delta \mathbf{P}_{i,j,k} - \frac{1}{|\Lambda(P_{i,j,k})|} \cdot \sum_{\beta \in \Lambda(P_{i,j,k})} \Delta \mathbf{P}_{\beta} \right\|^2$$

Ce terme correspond à la notion de rugosité sur laquelle repose la méthode DSI. Notre problème pourra donc être reformulé en terme de contraintes DSI.

### La méthode DSI (*Discrete Smooth Interpolation*)

DSI est une méthode d'interpolation au sens des moindres carrés qui permet d'estimer une propriété vectorielle  $\varphi$  sur un maillage  $\Omega$  moyennant le respect d'un nombre fini de contraintes  $\mathcal{C}$  sur  $\varphi$  et la minimisation d'un critère de rugosité [Mal92, Cog96]. Soit  $\mathcal{M}^n(\Omega, N, \varphi, \mathcal{C})$  un modèle discret défini par un ensemble  $\Omega$  de  $n_p$  nœuds connectés entre eux et sur lequel est connue une propriété vectorielle  $\varphi$ .

$$\alpha \in \Omega \xrightarrow{\varphi} \varphi(\alpha) = [\varphi^1(\alpha) \cdots \varphi^\nu(\alpha), \cdots \varphi^n(\alpha)]^T$$

Nous appellerons dans la suite du chapitre,  $\varphi^\nu$  et  $\varphi$  les vecteurs colonnes de dimension  $n$  et  $n \cdot n_p$  respectivement :

$$\varphi^\nu = \begin{bmatrix} \varphi^\nu(1) \\ \vdots \\ \varphi^\nu(\alpha) \\ \vdots \\ \varphi^\nu(n_p) \end{bmatrix} \quad \varphi = \begin{bmatrix} \varphi^1 \\ \vdots \\ \varphi^i \\ \vdots \\ \varphi^n \end{bmatrix}$$

Le critère de rugosité est une fonctionnelle exprimant la variation de la propriété vectorielle  $\varphi$  sur l'ensemble des nœuds du maillage. Localement, pour un nœud  $\alpha \in \Omega$ , la rugosité  $R(\varphi/\alpha)$  s'exprime sous la forme générale :

$$R(\varphi/\alpha) = \sum_{\nu=1}^n \left\{ \sum_{\beta \in N(\alpha)} v_\nu^\beta(\alpha) \cdot \varphi^\nu(\beta) \right\}^2$$

où  $N(\alpha) = \{\alpha\} \cup \Lambda(\alpha)$  est l'ensemble de nœuds formé par le nœud  $\alpha$  et son voisinage  $\Lambda(\alpha)$ . En pratique, les coefficients pondérateurs  $v_\nu^\beta(\alpha)$  sont choisis de telle manière à ce que la rugosité locale  $R(\varphi/\alpha)$  soit une mesure de l'écart entre la valeur de  $\varphi$  mesurée au nœud  $\alpha$  et sa moyenne  $\hat{\varphi}(\alpha)$  calculée sur le voisinage du nœud  $\alpha$ . Si  $\sigma(\alpha)$

est le nombre de voisins du nœud  $\alpha$ , nous avons :

$$\begin{aligned} R(\varphi/\alpha) &= \sum_{\nu=1}^n \left\{ \sigma(\alpha) \cdot \varphi^\nu(\alpha) - \sum_{\beta \in \Lambda(\alpha)} \varphi^\nu(\beta) \right\}^2 \\ &= \sigma^2(\alpha) \cdot \left\| \varphi(\alpha) - \frac{1}{\sigma(\alpha)} \cdot \sum_{\beta \in \Lambda(\alpha)} \varphi(\beta) \right\|^2 \\ &= \sigma^2(\alpha) \cdot \left\| \varphi(\alpha) - \widehat{\varphi}(\alpha) \right\|^2 \end{aligned}$$

Le terme de rugosité s'obtient en sommant les rugosités locales sur l'ensemble des nœuds.

$$R(\varphi) = \sum_{\alpha \in \Omega} \mu(\alpha) \cdot R(\varphi/\alpha) \text{ avec } \mu(\alpha) > 0$$

Une contrainte DSI  $c \in \mathcal{C}$  est exprimée sous la forme d'une relation linéaire reliant les valeurs de  $\varphi$  :

$$c \text{ est respectée} \Rightarrow A_c \cdot \varphi \simeq b_c$$

où  $A_c$  est un vecteur ligne de dimension  $n_p \cdot n$  et  $b_c$  un scalaire. Afin que la contribution de chaque contrainte soit équivalente, les contraintes sont normalisées : la norme du vecteur  $A_c$  doit être égale à 1. Les contraintes seront respectées au sens des moindres carrés. Le degré de violation d'une contrainte  $c \in \mathcal{C}$  est exprimée sous la forme :

$$\rho(\varphi/c) = \|A_c \cdot \varphi - b_c\|^2$$

et pour l'ensemble des contraintes :

$$\rho(\varphi) = \sum_{c \in \mathcal{C}} \varpi_c \cdot \rho(\varphi/c)$$

où  $\varpi_c$  sont des coefficients pondérateurs strictement positifs appelés coefficients de certitude qui permettent de moduler la contribution de chaque contrainte. On peut alors définir un critère de rugosité modifié qui prend en compte les contraintes sur  $\varphi$ .

$$R^*(\varphi) = R(\varphi) + (\phi \cdot \varpi) \cdot \rho(\varphi)$$

La solution de l'interpolation DSI est celle qui minimise ce critère de rugosité modifié. Notre problème revient à rechercher les valeurs de  $\varphi$  qui minimisent une fonctionnelle de la forme :

$$F(\varphi) = \|A \cdot \varphi - b\|^2$$

Il a été démontré dans [Mal02] que cette solution existe et qu'elle est unique. Elle est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\partial F(\varphi)}{\partial \varphi} = 0 \Leftrightarrow A^T \cdot A \cdot \varphi = A^T \cdot b$$

Nous en déduisons la valeur de  $\varphi$  :

$$\varphi = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot b \quad (4.14)$$

Dans l'implémentation actuelle du solveur DSI, la matrice inverse  $(A^T \cdot A)^{-1}$  n'est pas calculée directement. La résolution de l'équation 4.14 se fait par une méthode itérative de type Gauss-Seidel [Cog96, Mal02] ou plus récemment pour traiter une classe spécifique de problèmes par une méthode de type gradients conjugués [Lev01a]. Si la première méthode est plus lente à converger vers la solution, elle permet en revanche de prendre en compte un plus large éventail de contraintes, comme des contraintes *dynamiques* (dont la valeur du vecteur  $A_c$  varie à chaque itération) ou des contraintes *dures* (des contraintes inégalités, par exemple).

### Respect des contraintes de déplacement

Chaque contrainte  $\mathcal{C}_i$  est définie par un point  $\mathbf{C}_i$  et un vecteur de déplacement  $\Delta \mathbf{C}_i$ .  $\Delta \mathbf{C}_i$  est défini par une relation linéaire reliant les vecteurs de déplacements  $\Delta \mathbf{P}_{i,j,k}$  des nœuds du maillage de contrôle.

$$\Delta \mathbf{C}_i = \sum_{l=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} B_i^l(u) \cdot B_j^m(v) \cdot B_k^n(w) \cdot \Delta \mathbf{P}_{i,j,k}$$

Nos inconnues  $\varphi(\alpha)$  sont les valeurs des vecteurs de déplacement en chaque nœud  $P_\alpha$  d'indices  $i, j$  et  $k$  et nos données les vecteurs  $\Delta \mathbf{C}_i$ . Les trois composantes  $\Delta P_\alpha^x, \Delta P_\alpha^y, \Delta P_\alpha^z$  des vecteurs de déplacement étant indépendantes, nous utiliserons une contrainte par composante. En posant

$$B_\alpha(u, v, w) = B_i^l(u) \cdot B_j^m(v) \cdot B_k^n(w)$$

nous obtenons :

$$\Delta C_i^\nu = \sum_{\alpha \in \Omega} B_\alpha(u, v, w) \cdot \Delta P_\alpha^\nu = \sum_{\alpha \in \Omega} B_\alpha(u, v, w) \cdot \varphi^\nu(\alpha)$$

Cette équation peut être traduite sous la forme d'une contrainte DSI :

$$\sum_{\alpha \in \Omega} A_c^\nu(\alpha) \cdot \varphi^\nu(\alpha) = b_c^\nu \quad \text{avec } \nu = (x, y, z)$$

en posant :

$$\left| \begin{array}{l} A_c^\nu(\alpha) = \frac{B_\alpha(u, v, w)}{a_c} \\ b_c^\nu = \frac{\Delta C_i^\nu}{a_c} \\ a_c^2 = \sum_{\alpha \in \Omega} (B_\alpha(u, v, w))^2 \end{array} \right.$$

Si la fonction paramétrique utilisée est l'interpolation trilinéaire, nous retrouvons la définition de la contrainte *Fuzzy Control Point* [Mal02].

### 4.5.3 Problème des auto-intersections

#### Problème

Si la déformation se fait à topologie constante dans le sens où elle ne modifie pas la connectivité des nœuds des surfaces du modèle, elle ne garantit pas en revanche la non-intersection des surfaces. Certaines configurations de contraintes peuvent engendrer des intersections:

- Le vecteur déplacement sort de la zone d'influence de la contrainte. Des points sont déplacés dans une région qui n'est pas sous l'influence de la contrainte (cf. figure 4.16A) et pourront recouper des parties statiques du modèle.
- Les contraintes ne sont pas disjointes. Sur la figure 4.16B, les points origines des contraintes sont rapprochés et leurs vecteurs déplacement associés sont opposés. Une forte déformation du maillage de contrôle est nécessaire pour pouvoir interpoler le fort gradient résultant : des intersections sont alors possibles. Borrel et Rappoport ont été les premiers à étudier ce problème avec les SCODEF [BR94].
- Les contraintes sont conflictuelles entraînant une collision des cellules de maillage de contrôle et en conséquence des intersections (cf. figure 4.16C).

Dans le cadre du processus d'inversion tomographique, les vecteurs de perturbation sont régulièrement répartis le long des surfaces du modèle et sont généralement de faible amplitude. Nous ne devons pas a priori rencontrer de problèmes liés à des contraintes de trop forte extension (cas 1) ou non disjointes (cas 2). De plus, la minimisation de la rugosité agit comme un facteur de régularisation de la forme du maillage, ce qui réduit les risques d'intersection. Toutefois, dans des zones du modèles où les surfaces sont proches les unes des autres, des problèmes d'intersection liés à des contraintes contradictoires ne sont pas exclus. Nous devons ajouter une contrainte supplémentaire pour garantir une déformation injective (une fonction  $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  est injective si quels que soient  $x_1$  et  $x_2$  éléments de  $\mathbb{R}^n$ , leurs image  $x'_1 = F(x_1)$  et  $x'_2 = F(x_2)$  sont distinctes).

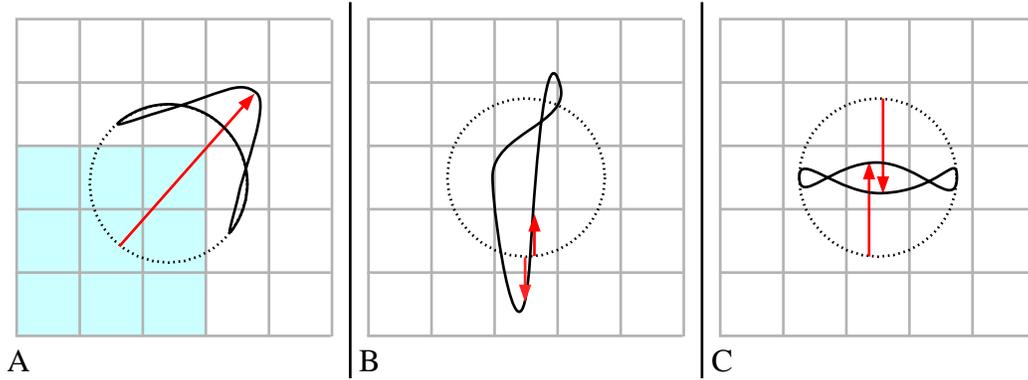


Figure 4.16: Différentes configurations de contraintes entraînant des intersections. A : Contrainte de trop grande extension. Le vecteur déplacement sort de la zone d'influence de la contrainte (en grisé). B : contraintes non disjointes dont les vecteurs déplacement ont une direction opposée. C : contraintes conflictuelles.

### Analyse de l'injectivité de la déformation

Le style de la déformation  $D$  est donné localement par la valeur que prend son déterminant Jacobien  $\det(J_D)$ . La fonction de déformation  $D$  associée à tout point  $\mathbf{X}(x, y, z)$  de l'espace origine  $\mathbb{R}^3$ , son point image  $\mathbf{X}'(x, y, z)$  de l'espace déformé  $\mathbb{R}^3$ .

$$\mathbf{X}'(x, y, z) = D(\mathbf{X}) = (D_x(x, y, z), D_y(x, y, z), D_z(x, y, z))$$

La matrice Jacobienne de la déformation  $J_D$  est égale à :

$$J_D = \begin{bmatrix} \frac{\partial D_x}{\partial x} & \frac{\partial D_x}{\partial y} & \frac{\partial D_x}{\partial z} \\ \frac{\partial D_y}{\partial x} & \frac{\partial D_y}{\partial y} & \frac{\partial D_y}{\partial z} \\ \frac{\partial D_z}{\partial x} & \frac{\partial D_z}{\partial y} & \frac{\partial D_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Le volume d'un élément infinitésimal est égal à  $dx \cdot dy \cdot dz$  avant déformation et est égal après déformation à  $\det(J_D(x, y, z)) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ . Selon les valeurs prises localement par ce déterminant, nous avons les possibilités suivantes :

- $\det(J_D) > 0$ , certaines parties du volume paramétriques se chevauchent occasionnant des intersections ;
- $0 < \det(J_D) < 1$ , la déformation correspond à une contraction du volume ;
- $\det(J_D) > 1$  la déformation correspond à une dilatation du volume.

Sederberg et Parry ont ainsi défini dans [SP86] une classe de déformations préservant les volumes : ce sont des déformations dont le Jacobien est continûment égal à 1. De même, une fonction est injective si en tout point son Jacobien est strictement positif. La fonction de  $D$  est la composée de deux fonctions, une fonction de paramétrisation  $P = H^{-1}$  et une fonction paramétrique  $H'$ .

Pour que la fonction  $D$  soit injective, il faut que le Jacobien de chacune de ces deux fonctions soit positif. Si les axes  $u$ ,  $v$ , et  $w$  de la grille de contrôle sont parallèles aux axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  respectivement, la matrice Jacobienne de la fonction de paramétrisation est une matrice diagonale dont les coefficients sont positifs. Son déterminant est donc positif. C'est le signe du Jacobien  $J'$  de la fonction de paramétrisation  $H'$  qui va donc déterminer si nous nous plaçons dans cette configuration, l'injectivité de la déformation.

$$J' = \begin{bmatrix} \frac{\partial H'_x}{\partial u} & \frac{\partial H'_x}{\partial v} & \frac{\partial H'_x}{\partial w} \\ \frac{\partial H'_y}{\partial u} & \frac{\partial H'_y}{\partial v} & \frac{\partial H'_y}{\partial w} \\ \frac{\partial H'_z}{\partial u} & \frac{\partial H'_z}{\partial v} & \frac{\partial H'_z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{dB_i^l(u)}{du} \cdot B_j^m(v) \cdot B_k^n(w) \cdot \mathbf{P}'_{i,j,k}$$

$$\frac{\partial H}{\partial v} = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} B_i^l(u) \cdot \frac{dB_j^m(v)}{dv} \cdot B_k^n(w) \cdot \mathbf{P}'_{i,j,k}$$

$$\frac{\partial H}{\partial w} = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} B_i^l(u) \cdot B_j^m(v) \cdot \frac{dB_k^n(w)}{dw} \cdot \mathbf{P}'_{i,j,k}$$

Cependant, le respect du signe du Jacobien ne peut pas être traduit sous la forme d'une contrainte DSI. En effet, l'expression du déterminant Jacobien ne s'écrit pas sous la forme d'une relation linéaire du déplacement des nœuds de contrôle.

### Régularisation du maillage de contrôle

Le respect du signe du Jacobien n'étant pas transposable en terme de contrainte DSI, nous utiliserons une condition plus restrictive pour garantir l'injectivité de la déformation. Une condition suffisante mais non nécessaire consiste à empêcher les cellules du

maillage de se recouper (cette condition n'est pas nécessaire car un maillage dont les cellules s'entrecoupent ne conduit pas forcément à une intersection).

La minimisation du critère de rugosité contribue déjà à la régularisation du maillage en réduisant au mieux les variations des déplacements des nœuds du maillage de contrôle. Cependant, ce critère de rugosité ne s'applique pas à la position  $\mathbf{X}'$  des nœuds après déformation mais à leur déplacement  $\varphi = \Delta \mathbf{X}$ . Nous devons donc plutôt chercher à minimiser pour chaque nœud  $\alpha$  du maillage, le terme :

$$R(\mathbf{X}'/\alpha) = \sigma^2(\alpha) \cdot \|\mathbf{X}'(\alpha) - \frac{1}{\sigma(\alpha)} \cdot \sum_{\beta \in \Lambda(\alpha)} \mathbf{X}'(\beta)\|^2$$

où, pour rappel,  $\Lambda(\alpha)$  est l'ensemble des nœuds connectés au nœud  $\alpha$  et  $\sigma(\alpha) = \text{card}(\Lambda(\alpha))$ . Pour cela, nous pouvons définir pour chaque nœud  $\alpha$  trois contraintes, une contrainte par composante  $X^{\nu'}(\alpha)$ ,  $\nu = (x, y, z)$  de son vecteur position  $\mathbf{X}'(\alpha)$ , telles que :

$$X^{\nu'}(\alpha) - \frac{1}{\sigma(\alpha)} \cdot \sum_{\beta \in \Lambda(\alpha)} X^{\nu'}(\beta) \simeq 0$$

$$X^{\nu}(\alpha) + \varphi^{\nu}(\alpha) - \frac{1}{\sigma(\alpha)} \cdot \sum_{\beta \in \Lambda(\alpha)} X^{\nu}(\beta) + \varphi^{\nu}(\beta) \simeq 0$$

$$\varphi^{\nu}(\alpha) - \frac{1}{\sigma(\alpha)} \cdot \sum_{\beta \in \Lambda(\alpha)} \varphi^{\nu}(\beta) \simeq \frac{1}{\sigma(\alpha)} \cdot \sum_{\beta \in \Lambda(\alpha)} X(\beta) - X^{\nu}(\alpha)$$

Toute contrainte DSI s'écrivant sous la forme  $\sum_{\alpha \in \Omega} A_c^{\nu}(\alpha) \cdot \varphi^{\nu}(\alpha) = b_c^{\nu}$ , nous avons :

$$\left| \begin{array}{l} A_c^{\nu}(\beta) = \begin{cases} \frac{1}{a_c} & \text{si } \beta = \alpha \\ \frac{-1}{a_c \cdot \sigma(\alpha)} & \text{si } \beta \in \Lambda(\alpha) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \\ b_c^{\nu} = \frac{1}{a_c} \cdot \left\{ \frac{1}{\sigma(\alpha)} \cdot \sum_{\beta \in \Lambda(\alpha)} X(\beta) - X^{\nu}(\alpha) \right\} \\ \\ a_c^2 = \frac{\sigma(\alpha) + 1}{\sigma(\alpha)} \end{array} \right.$$

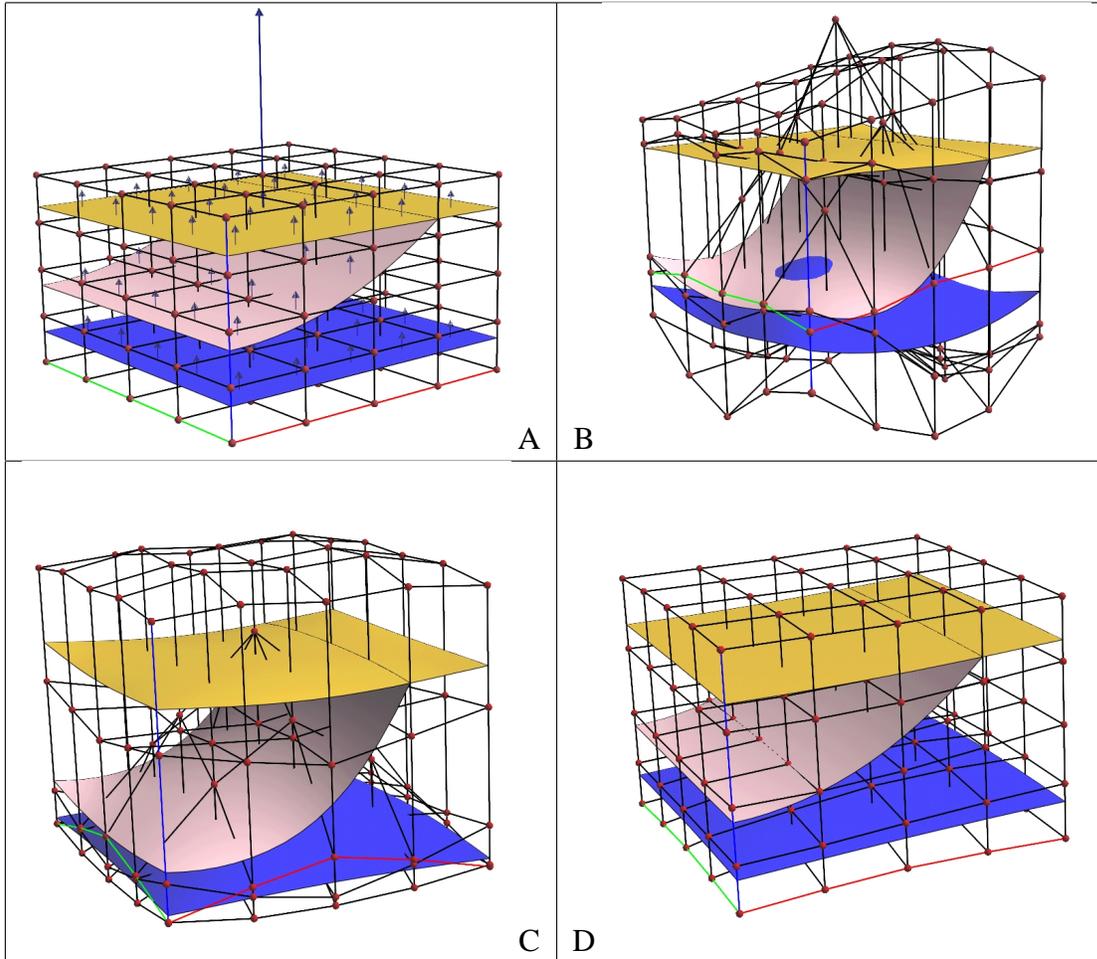


Figure 4.17: A : Déformation d'un modèle synthétique composé de trois surfaces  $S_1 : z = 0$ ,  $S_2 : z = -5 + 0.25.x^2$  et  $S_3 : z = -8$ . Des vecteurs de déformation sont attachés à ces trois surfaces pour les déplacer verticalement de 10, 6 et 8 respectivement. Le point milieu de la surface  $S_3$  est contraint à se déplacer verticalement de 20. B : Après déformation, la surface  $S_2$  recoupe la surface  $S_3$ . C : Le même modèle après application de la contrainte de régularisation (le poids relatif de la contrainte est égal à 20) ou d'homogénéité (le poids relatif de la contrainte est égal à 1 pour les trois axes de la grille). En fixant le poids de cette dernière contrainte à 40, nous obtenons une grille quasiment régulière mais au détriment du respect des vecteurs de déformation.

Remarquons que si la grille initiale est régulière (les pas selon les directions  $u$ ,  $v$  et  $w$  de la grille sont constants), alors le terme  $b_c^v$  de la contrainte est nul. Pour éviter des effets de bords, nous n'appliquerons cette contrainte de régularisation que sur les nœuds internes de la grille dont le voisinage contient 6 nœuds.

Nous pouvons modifier cette contrainte en limitant le voisinage  $\Lambda(\alpha)$  de chaque nœud  $\alpha$  à ses deux voisins selon l'axe  $u$ ,  $v$  ou  $w$  du maillage de contrôle. Cette nou-

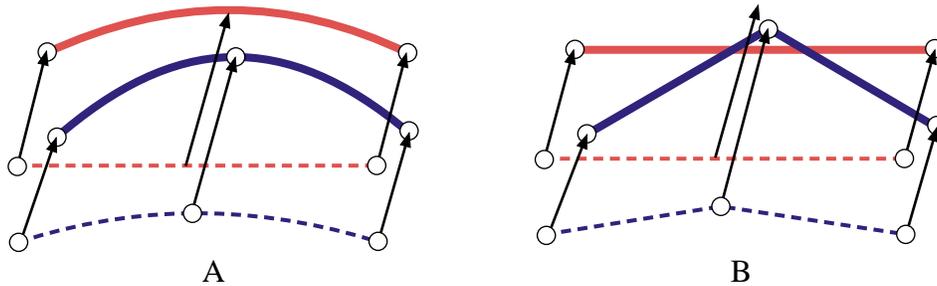


Figure 4.18: Une déformation injective pour un modèle lisse peut engendrer des intersections si elle est appliquée à un modèle discret dont le maillage est trop grossier.

velle contrainte est similaire à la contrainte d'*homogénéité* introduite par Mugerin pour la construction de grilles faillées [MC99]. Cette contrainte peut être utilisée quand les vecteurs de déformation sont orientés globalement selon une direction de la grille de contrôle. C'est le cas, par exemple, des vecteurs de perturbation calculés à chaque itération de l'algorithme d'inversion tomographique de la CGG : ces vecteurs sont tous verticaux. En installant trois contraintes d'homogénéité avec un facteur de certitude différent, une contrainte pour chaque axe de la grille, nous pouvons aussi moduler la régularisation en privilégiant un axe de la grille par rapport aux deux autres.

Les figures 4.17A, 4.17B, 4.17C et 4.17D illustrent les effets des contraintes de régularisation et d'homogénéité sur un maillage.

### Remarque

La condition de non-intersection est valide pour un modèle lisse dont la densité du maillage est infinie. Si la triangulation des surfaces du modèle est trop grossière, nous pouvons obtenir des intersections alors que la déformation est a priori injective (cf. figure 4.18). Une solution possible à ce problème consiste à densifier le maillage dans les zones de forte courbure après déformation, comme le fait par exemple [Gai00].

## 4.5.4 Autres contraintes

D'autres contraintes peuvent être ajoutées pour contrôler au mieux la déformation. Cette liste n'est pas exhaustive, la souplesse de l'interpolateur DSI permettant de prendre en compte un grand nombre de contraintes, même contradictoires <sup>1</sup>.

### Respect des limites du modèle

Nous aimerions autant que possible que la déformation du modèle se fasse dans les limites de sa boîte englobante. Au pire, nous voulons que les extensions latérales du

<sup>1</sup>Elles seront alors dans ce cas respectées au mieux dans le sens des moindres carrés.

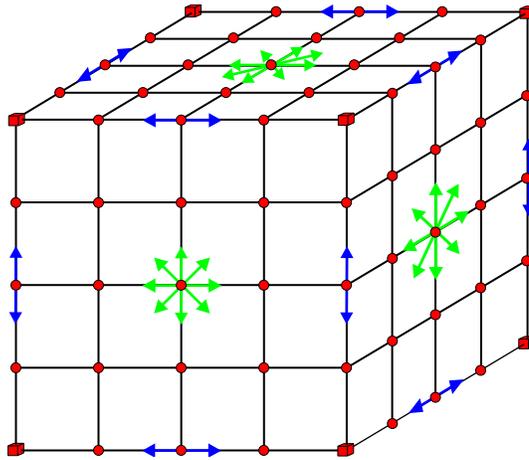


Figure 4.19: *Respect des limites de la boîte englobante : les nœuds des faces sont contraints à se déplacer dans un plan, les nœuds des arêtes sont contraints à se déplacer le long d'une droite et les nœuds des coins sont fixés.*

modèle soient préservées. La boîte est généralement un parallélépipède rectangle dans le cadre de l'inversion tomographique. Une fonction de Bézier (ou B-Spline) interpolant une grille plane par un plan, une ligne polygonale par une droite, il est alors possible de contraindre les nœuds en bordure du maillage à se déplacer le long des faces et des arêtes de la boîte englobante (cf. figure 4.19).

Si les axes  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont parallèles aux axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ , la définition des contraintes est triviale. Il suffit simplement de fixer une composante (pour un déplacement le long d'une face), deux composantes (pour un déplacement le long d'une arête) ou trois composantes (pour fixer un nœud des coins) des vecteurs de déplacement.

Si la boîte englobante n'est pas orientée le long des axes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , il est possible d'utiliser des contraintes planaires et directionnelles, deux types de contraintes DSI déjà implémentés dans le logiciel GOCAD. Elles font partie d'une classe particulière de contraintes appelées contraintes *dures*. Le vecteur de déplacement est tout simplement projeté après chaque itération de DSI sur le plan ou la ligne correspondante.

### Respect de la géométrie d'une faille

Le géologue peut choisir de ne pas modifier la géométrie d'une ou plusieurs failles quand :

- ces failles ont été construites avec une autre méthode que celle utilisée pour assembler les autres surfaces du modèle et le géologue est certain de leur géométrie ;
- elles sont sub-verticales et n'ont pas besoin d'être modifiées ;

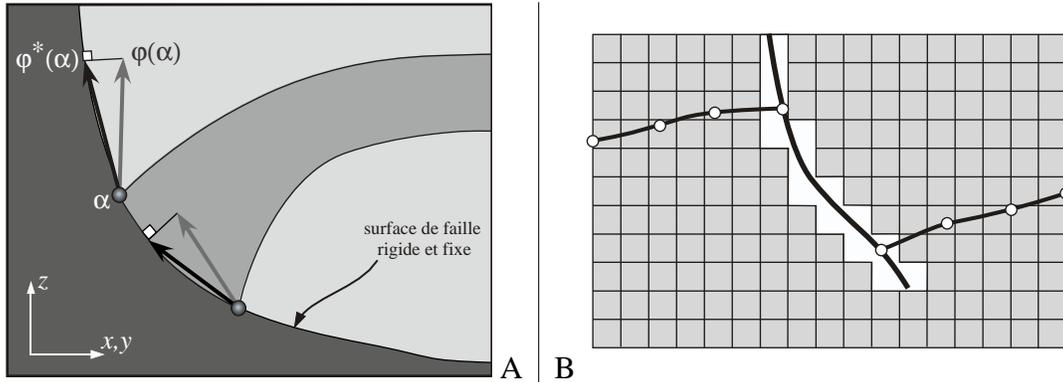


Figure 4.20: A : Le glissement des horizons le long de failles fixes peut être assuré en projetant les vecteurs de déplacement  $\varphi(\alpha)$  sur la surface de faille. B : Le déplacement de part et d'autre d'une faille fixe peut être rendu discontinu en éliminant les cellules traversées par la faille.

- le géologue veut simuler un glissement de couche le long de ces failles.

Pour préserver la cohérence du modèle, les horizons en contact avec ces failles doivent y rester collés après déformation du modèle. Il serait alors intéressant de contraindre la déformation de manière à simuler le glissement de ces horizons le long des failles fixes. Les vecteurs de déformation calculés au niveau des nœuds en contact avec les failles fixes, doivent être corrigés de manière à garantir un déplacement des nœuds le long de ces failles (cf. figure 4.20A) :

$$\mathbf{X}'(\alpha) = \mathbf{X}(\alpha) + \varphi(\alpha) \implies \varphi(\alpha) \simeq \text{proj}_F\{\mathbf{X}(\alpha) + \varphi(\alpha)\} - \mathbf{X}(\alpha)$$

Cette correction peut être facilement traduite sous la forme d'une contrainte compréhensible par l'interpolateur DSI [Mal02]. Massot [Mas02] utilise cette contrainte dans un but similaire pour simuler le glissement de couches dans son outil de restauration 3D.

Le géologue peut désirer un déplacement discontinu de part et d'autre d'une faille fixe. La minimisation du critère de rugosité a tendance à lisser la valeur des déplacements et s'oppose donc au calcul d'un champ de vecteurs de déplacement discontinu. Comme ce critère dépend de la connectivité des nœuds du maillage de contrôle, il faut donc retirer les cellules du maillage intersectées par une faille fixe. Ainsi, deux nœuds situés de part et d'autre de ces failles sont déconnectés, ce qui élimine l'effet moyennant de la rugosité (cf. figure 4.20B).

## 4.6 Conclusion

Nous avons implémenté un outil qui permet de mettre à jour automatiquement un modèle géologique moyennant le respect d'un nombre fini de vecteurs de perturba-

tion régulièrement répartis le long des horizons du modèle. La déformation se fait à topologie constante, préservant ainsi la cohérence du modèle géologique. Cet outil dérive des techniques de déformation de formes libres par manipulation directe : le modèle géologique est plongé dans un volume paramétrique dont la géométrie est contrôlée par un maillage hexaédrique et une fonction paramétrique. Toute modification du maillage est suivie d'une déformation du modèle. Le calcul de la nouvelle conformation de la grille qui va permettre de respecter au mieux les vecteurs de perturbation se fait en utilisant la méthode DSI. L'intérêt de l'interpolateur DSI dans le cadre de notre problème est multiple :

- Les vecteurs de perturbations sont régulièrement répartis sur les horizons selon une grille. La minimisation du critère de rugosité garantit une déformation pour que la trame de cette grille ne soit pas visible après déformation du modèle.
- Elle régularise la forme du maillage de contrôle, ce qui réduit les risques d'intersections entre les surfaces du modèle.
- Elle est bien adaptée à la résolution de l'inversion de la tomographie sismique. Le modèle de vitesse a une résolution de l'ordre de la centaine de mètres : les corrections géométriques effectuées à chaque itération sont du même ordre. Un maillage de contrôle peu dense (environ une dizaine de nœuds dans les trois directions de l'espace) est alors suffisant.
- Il est facile de contrôler la déformation en ajoutant des contraintes supplémentaires sur les vecteurs de déplacement estimés en chaque nœud du maillage.

En revanche, cet outil ne peut pas être utilisé pour modifier de manière interactive un modèle géologique ou une surface isolée. En effet, la minimisation du critère de rugosité sur laquelle repose la méthode DSI a comme conséquences sur la déformation :

- La déformation est globale quelle que soit la fonction paramétrique utilisée (Bézier, B-Spline, interpolation trilineaire). En effet, la minimisation du critère de rugosité se traduit par la propagation des vecteurs de déplacement calculés en quelques nœuds sur l'ensemble du maillage.
- Si un seul vecteur contrainte est donné, la déformation résultante est une translation de l'objet selon ce vecteur, ce qui n'a aucun intérêt. La solution donnée par la pseudo-inverse, minimisant le déplacement des nœuds de la grille de contrôle est donc plus adaptée pour les manipulations interactives.
- La vitesse de convergence de DSI est assez lente quand le nombre de contraintes est faible par rapport à la densité du maillage.

Cet outil pourra être ultérieurement amélioré en ajoutant des informations supplémentaires sur la déformation. Les vecteurs de perturbations fixent pour un point donné

sa nouvelle position. Mais il est aussi possible d'avoir une estimation de la normale en ce point. Cette information peut être utilisée comme contrainte supplémentaire pour définir la déformation.

# Conclusion

## Bilan

Le modèle volumique est un outil utile au géologue pétrolier pour l'étude et l'exploitation d'un gisement de pétrole ou de gaz. De par la nature des données disponibles (nuages de points et coupes géologiques extraits de la sismique, marqueurs de puits), la construction d'un modèle volumique passe d'abord par l'assemblage d'un modèle structural surfacique. Une représentation des modèles par leurs frontières, c'est-à-dire par un ensemble de surfaces jointives, s'impose donc naturellement.

Un modèle géologique est un objet qui est constamment amené à évoluer au fur et à mesure que de nouvelles données sont disponibles et que de nouvelles interprétations sont proposées. La modification d'un modèle volumique décrit par ses frontières a pour corollaire le respect d'un certain nombre de contraintes topologiques (les surfaces ne doivent pas s'intersecter sauf au niveau de leurs bords, les surfaces doivent être jointives...) ou géologiques (les horizons doivent se terminer sur les failles, un horizon ne doit pas recouper un autre horizon à moins d'être une surface d'érosion ou la limite d'un corps intrusif, ...) pour garantir la cohérence du modèle. Euler [Eul99] a proposé dans sa thèse, plusieurs outils pour modifier la géométrie et la topologie de modèles géologiques comme par exemple, l'outil de retrait de cicatrices ou encore les algorithmes de découpage exact et de découpage contraint. Toutefois, ces méthodes entraînent une retriangulation importante des interfaces du modèle, ce qui peut être contre-indiqué pour certaines applications.

Pour répondre à ce premier point, nous avons défini un nouvel objet dans le chapitre 3, les Trimmed-TSurfs. Une Trimmed-TSurf est une transposition du concept des "trimmed-surfaces" paramétriques [Far87] aux surfaces triangulées : c'est une surface triangulée subdivisée en plusieurs régions par un ensemble de lignes polygonales closes tracées sur la surface. Les régions d'une Trimmed-TSurf sont constituées chacune d'un ensemble de triangles et de parties de triangles délimité par une ou plusieurs lignes.

Nous avons décidé d'utiliser les Cartes Généralisées Hiérarchiques à la fois pour la description et l'implantation des Trimmed-TSurfs. Une Trimmed-TSurf est composée

de trois niveaux emboîtés de G-Cartes :

- La Toile traduit la décomposition de la surface en cellules. Elle est décrite par 2-G-Carte. C'est à ce niveau qu'est défini le plongement de la surface, c'est-à-dire sa géométrie ainsi que toutes les propriétés qui lui sont attachées.
- La Trimming-Line fait la synthèse de toutes les relations topologiques (intersections, contacts bord-contre-surface) partagées avec les autres surfaces du modèle auquel appartient la Trimmed-TSurf. Elle est aussi décrite par une 2-G-Carte. La Trimming-Line peut être vue comme un modèle 2D plongé géométriquement et topologiquement dans la Toile. Chaque région de ce modèle est en correspondance avec une région de la Trimmed-TSurf : les bords des polygones de la Trimming-Line sont des lignes polygonales closes et simples qui sont utilisées pour définir les frontières des régions de la Trimmed-TSurf.
- Le Cadre fait la synthèse des relations d'adjacence existant entre les régions des Trimmed-TSurfs d'un même modèle. Il est décrit par une 3-G-Carte. Il est composé d'autant de sous-unités (2 polygones accolés et soudés par des liens  $\alpha_3$ ) que de régions : il est en cela semblable au Cadre d'une surface composée de plusieurs parties connexes. Du point de vue du Cadre, une Trimmed-TSurf est donc découpée en plusieurs parties alors que sa triangulation n'a pas été modifiée.

Ainsi, une Trimmed-TSurf peut être vue comme une extension des Cartes Généralisées hiérarchiques par l'ajout d'un troisième niveau de G-Cartes pour décrire la partition de la surface triangulée en sous-parties virtuelles.

Pour retrouver les cellules incluses dans une région d'une Trimmed-Tsurf, nous avons mis au point une méthode purement combinatoire utilisant les relations topologiques reliant les cellules de la Trimming-Line aux cellules de la Toile. L'algorithme que nous proposons est générique : il permet d'accéder à un brin par cellule de l'intérieur d'une région donnée, et ce, quelle que soit la dimension des cellules que nous voulons retrouver. Cet algorithme peut être interfacé de manière à manipuler des sommets, des arêtes et des triangles et non des brins, ce qui rend ainsi son emploi plus facile pour l'utilisateur.

Chaque région de Trimmed-TSurf est associée à une sous-unité du Cadre et peut donc être vue comme une partie virtuelle de la surface. En assemblant les Cadres de régions jointives le long d'une frontière, nous pouvons construire un modèle 3D. La mise à jour de ce modèle est facilitée car les étapes de retrait de cicatrices et de découpage ne sont plus nécessaires. Seules les informations topologiques d'intersection ou de contact, décrites par la Trimming-Line, sont à redéfinir après chaque modification du modèle.

L'utilisation des Trimmed-TSurfs a cependant un coût par rapport à celle de surfaces découpées en plusieurs sous-surfaces :

- La Trimming-Line doit être stockée en mémoire ainsi que les relations topologiques la reliant à la surface.
- L'intérieur d'une région donnée doit être recalculé à chaque requête sur cette région.

Il serait donc plus approprié d'utiliser ce type de modèle comme modèle "brouillon". Une fois un résultat satisfaisant obtenu, le modèle "brouillon" peut être alors transformé en un modèle "dur" (un modèle dont les régions sont définies par un ensemble de surfaces jointives) par conversion des régions de Trimmed-TSurfs qui le composent en surfaces triangulées.

Les logiciels d'inversion tomographique sismique de la CGG ont quant à eux leurs contraintes propres. À chaque itération du processus d'inversion, le modèle géologique qui décrit la topologie et la géométrie du modèle de vitesse doit être mis à jour, moyennant le respect d'un nombre fini de vecteurs de perturbation. Cette modification doit se faire continûment à topologie constante de manière à ne pas avoir à redéfinir à chaque itération, les paramètres de contrôle du modèle de vitesse.

Pour répondre à ce second point, nous avons implanté un outil dérivé des outils de déformations de formes libres par manipulation directe. Le modèle géologique à déformer est plongé dans un volume paramétrique dont la géométrie est contrôlée à la fois par une grille à maillage hexaédrique et par une fonction paramétrique. Cette fonction fait le lien entre la position de tout point appartenant au volume paramétrique (ou de tout point plongé dans ce volume) avec la conformation des nœuds de la grille de contrôle : toute modification de la grille entraîne une déformation du modèle géologique. Nous utilisons l'interpolateur DSI pour calculer la conformation de la grille qui permet de respecter aux mieux les vecteurs de déformation. L'intérêt de l'interpolateur DSI est multiple par rapport à d'autres méthodes pour la résolution de notre problème :

- Nous obtenons une solution unique qui respecte au mieux, au sens des moindres carrés, les vecteurs de perturbation et qui minimise un critère de rugosité : le champ de vecteurs de déformation est le plus lisse possible.
- Dans les logiciels d'inversion tomographique de CGG, ces vecteurs de perturbation sont calculés en des nœuds régulièrement répartis sur les surfaces des modèles. La minimisation du critère de rugosité permet de gommer le plus possible la trame de ces vecteurs.

- La minimisation du critère de rugosité permet aussi de régulariser le maillage de la grille, ce qui réduit les risques d'intersection entre les surfaces du modèle à déformer.
- La souplesse de l'interpolateur permet d'intégrer de nombreuses contraintes qui pourront être utilisées pour contrôler au mieux la géométrie du modèle (respect de données de pendage, respect du volume des couches géologiques...).

## Perspectives

Actuellement, nous ne prenons pas en compte les relations topologiques de contact bord-contre-surface pour construire les Trimmed-TSurfs mais uniquement des intersections franches. Les travaux futurs sur les Trimmed-TSurfs devront aller dans cette direction.

Les applications des Trimmed-TSurfs ne se limitent pas à la construction de modèles 3D. Elles peuvent être aussi utilisées pour réaliser des coupes dans un modèle géologique. Ces coupes ne se restreignent pas à un simple plan vertical mais peuvent s'appuyer sur des surfaces de formes quelconques. De telles coupes peuvent constituer un support intéressant pour réaliser un outil de manipulation interactive de modèles 3D. Les surfaces d'un modèle sont modifiées au travers de la manipulation de leurs traces sur la coupe géologique.

Notre outil de déformation de formes libres ne peut pas être utilisé pour modifier interactivement un modèle géologique ou une surface isolée. Si un seul vecteur de déplacement est donné, la transformation résultante est une translation. C'est une conséquence de la minimisation du critère de rugosité. L'utilisateur préférerait une déformation lisse mais localisée. L'implantation d'un autre solveur (calcul de la pseudo-inverse) serait plus adapté à ce problème.

# Bibliographie

- [AB97] F. Aubert et D. Bechmann. Animation by Deformation of Space-Time Objects. *Computer Graphics Forum (Eurographic '97)*, 21, 5, pp 57–66, Sept. 1997.
- [ABD97] F. Avnaim, J.D. Boissonnat, O. Devillers, F.P. Preparata et M. Yvinec. Evaluating Signs of Determinants Using Single-Precision Arithmetic. *Algorithmica*, 17, 2, pp 111–132, 1997.
- [Ago76] M. Agoston. *Algebraic Topology : A first Course*. Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, 1976.
- [AJD97] S. Austin, R. B. Jerard et S. Drysdale. Comparison of Discretization Algorithms for NURBS Surfaces with Application to Numerically Controlled Machining. *Computer Aided Design*, 29, 1, pp 71–83, Janv. 1997.
- [Bau75] B. Baumgart. A Polyhedron Representation for Computer Vision. *AFIPS Nat. Conf. Proc.*, 44, pp 589–596, Juin 1975.
- [BB91] P. Borrel et D. Bechmann. Deformation of n-dimensional objects. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 1, 4, pp 427–453, 1991.
- [BBB87] R. Bartels, J. Beatty et B. Barsky. An introduction to splines for use in computer graphics and geometric modeling, 1987.
- [BBB98] S. Brandel, D. Bechmann et Y. Bertrand. STIGMA: a 4-dimensional modeler for animation. *9th Eurographics Workshop on animation and simulation*, 1998.
- [BCA95] E. Bardinet, L. D. Cohen et N. Ayache. A parametric deformable model to fit unstructured 3D data. Rapport technique No 2617, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Juil. 1995.
- [BD93] D. Bechmann et N. Dubreuil. Animation through space and time based on a space deformation model. *The Journal of Visualization et Computer Animation*, 4, 3, pp 165–184, 1993.

- [Bec92] D. Bechmann. Animation Through Space and Time Based on a Space Deformation Model : DOGME. *Third Eurographics Workshop on Animation and Simulation*, Sept. 1992.
- [Ber97] Y. Bertrand. Modeleurs géométriques à base topologique : spécification, performances et applications. Habilitation à diriger des recherches, spécialité informatique. Université Louis-Pasteur de Strasbourg, Déc. 1997.
- [Bez86] P. Bezier. *Courbes et Surfaces*, 4. Mathématiques et CAO, édition Hermès, 1986.
- [BN96] J.D. Boissonnat et S. Nullans. Reconstruction of Geological Structures from Heterogeneous and Sparse Data. *ACM-GIS*, pp 172–179, 1996.
- [BR94] P. Borrel et A. Rappoport. Simple Constrained Deformations for Geometric Modeling and Interactive Design. *ACM Transactions on Graphics*, 13, 2, pp 137–155, 1994.
- [Bra00] S. Brandel. *Conception et implantation d'un modèleur 4D pour l'animation*. Thèse de doctorat, Université Louis-Pasteur, Strasbourg, Janv. 2000.
- [Bri89] E. Brisson. Representing Geometric Structures in D Dimensions: Topology and Order. *Symposium on Computational Geometry*, pp 218–227, Juin 1989.
- [Bri90] E. Brisson. *Representation of d-dimensional geometric objects*. PhD thesis, Department of Computer Science, University of Washington, Août 1990.
- [Cas87] M.S. Casale. Free Form Solid Modeling with Trimmed-Surface Patches. *IEEE Computer Graphics & Applications*, 7, 1, pp 33–43, Janv. 1987.
- [Cau02] G. Caumon. *Manipulations sous contraintes de modèles géologiques*. Thèse de doctorat, INPL, Nancy, 2002.
- [Che89] L. Paul Chew. Constrained Delaunay Triangulations. *Algorithmica*, 4, pp 97–108, 1989.
- [CMSB01] G. Caumon, J.L. Mallet, C. Sword et S. Bombarde. Interactive Manipulations of Geological Models Through Cross-sections. 21<sup>st</sup> *gOcad Meeting report*, Juin 2001.
- [Cog96] R. Cognot. *La méthode D.S.I.: Optimisation, Implémentation et Applications*. Thèse de doctorat, INPL, Nancy, 1996.
- [Cog01a] R. Cognot. 3D Parameterizer I: Multigrid, Multiproperty D.S.I. Implementation. 21<sup>st</sup> *gOcad Meeting report*, Juin 2001.
- [Cog01b] R. Cognot. 3D Parameterizer II: gradient constraints. 21<sup>st</sup> *gOcad Meeting report*, Juin 2001.

- [Com89] P. Comminos. Fast Bends or Fast Free-Form Deformation of Polyhedral Data. *Computer Graphics '89*, 1989.
- [Con97] J. Conraud. *Génération de maillages de simplexes pour la modélisation d'objets naturels*. Thèse de doctorat, INPL, Nancy, 1997.
- [Con01] S. Conreaux. *Modélisation de 3-Variétés à base topologique : application à la géologie*. Thèse de doctorat, INPL, Nancy, Juin 2001.
- [Coq90] S. Coquillart. Extended Free Form Deformation : A Sculpturing Tool for 3D Geometric Modeling. *Computer Graphics (SIGGRAPH '90)*, 24, 4, pp 187–196, 1990.
- [Cor75] R. Cori. Un code pour les graphes planaires et ses applications. *Astérisques*, 27, 1975.
- [DB91] O. Davis et R. Burton. Free-Form Deformation: A Sculpturing Tool for 3D Geometric Modeling. *Journal of Imaging Technology*, 17, 4, pp 145–158, Août 1991.
- [DLM00] M. Dazy, B. Lévy et J.L. Mallet. Ensembles simpliciaux hiérarchisés et intersection de surfaces. *Revue Internationale de CFAO et d'Informatique Graphique*, 15, 1, pp 11–23, Juin 2000.
- [DMA02] M. Desbrun, M. Meyer et P. Alliez. Intrinsic parameterizations of surface meshes. 2002. Submitted to EUROGRAPHICS '2002'.
- [Duv01] I. Duvinage. *Création et mise en cohérence de modèles structuraux à partir d'horizons extraits de données sismiques tridimensionnelles*. Thèse de doctorat, INPL, Nancy, Juin 2001.
- [Edm60] J. Edmonds. A Combinatorial Representation for Polyhedral Surfaces. *Notices Amer. Math. Soc.*, 7, 1960.
- [Elt94] H. Elter. *Étude de structures combinatoires pour la représentation de complexes cellulaires*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg, Sept. 1994.
- [Ett95] T. Aït Ettajer. *Modélisation de Surfaces Géologiques Complexes sous Contraintes Géométriques : Application à la Génération Automatique de Modèles Géologiques*. Thèse de doctorat, INPL, 1995.
- [Eul99] N. Euler. *Modélisation volumique, Contraintes et libertés*. Thèse de doctorat, INPL, Nancy, Déc. 1999.
- [Far87] R. T. Farouki. Trimmed-Surface Algorithms for the Evaluation and Interrogation of Solid Boundary Representations. *IBM Journal of Research and Development*, 31, 3, pp 314–333, Mai 1987.

- [Far92] G. Farin. *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design: A practical Guide*. Academic Press, 3<sup>ème</sup> édition, 1992.
- [Fio95] C. Fiorio. *Approche interpixel en analyse d'images, une topologie et des algorithmes de segmentation*. Thèse de doctorat, Université Montpellier II, 1995.
- [Flo97] M. Floater. Parametrization and smooth approximation of surface triangulations. *Comp. Aided Geom. Design*, 14, pp 231–250, 1997.
- [GAB01] P. Guillaume *et al.* 3-D finite-offset tomographic inversion of CRP-scan data, with or without anisotropy. *71st SEG International Exposition et Annual Meeting expanded abstracts*, pp 4–11, September 2001.
- [Gai00] J. Gain. *Enhancing Spatial Deformation for Virtual Sculpting*. PhD thesis, St. John's College, University of Cambridge, Juin 2000.
- [GMM96] J.L. Guiziou, J.L. Mallet et R. Madariaga. 3D seismic reflection tomography on top of the GOCAD depth modeler. *Geophysics*, 61, pp 1499–1510, 1996.
- [GP89] J. Greissmair et W. Purgathofer. Deformation of Solids with Trivariate B-Splines. *Proceedings of Eurographics '89*, pp 137–148, Sept. 1989.
- [Gro97] O. Grosse. Amélioration du tracé de rayons 3d sous TomCad : méthode des paraboloides. Mémoire de DEA, Université Poincaré, Nancy, Mai 1997.
- [Gui93] J.L. Guiziou. *Estimation de modèles de vitesses en 3D par tomographie de sismique réflexion : Développements d'outils sur la base du modèleur géométrique GOCAD*. Thèse de doctorat, Université Paris 7, Déc. 1993.
- [HHK92] W. Hsu, J. Hughes et H. Kaufman. Direct manipulation of free-form deformations. *Computer Graphics (Proceedings of SIGGRAPH 92)*, pp 177–184, 1992.
- [HNNH01] M. Higashi, H. Nakano, A. Nakamura et M. Hosaka. Use of Topological Constraints in Construction et Processing of Robust Solid Models. *Proc. Sixth ACM Symposium on Solid Modeling et Application*, pp 18–29, Juin 2001.
- [Jac70] A. Jacques. Constellations et Graphes Topologiques. *Colloque Math. Soc. Janos Bolyai*, pp 657–672, 1970.
- [Ker00] E. Kerrien. *Outils d'imagerie multimodalité pour la neuroradiologie interventionnelle*. Thèse de doctorat, INPL, Nancy, 2000.
- [KMMTT92] P. Kalra, A. Mangili, N. Magnenat-Thalmann et D. Thalmann. Simulation of facial muscle actions based on rational free form deformations. *Computer Graphics Forum (EUROGRAPHICS '92 Proceedings)*, 11, 3, pp 59–69, 1992.

- [KM95] Subodh Kumar et Dinesh Manocha. Efficient rendering of trimmed NURBS surfaces. *Computer-Aided Design*, 27, 7, pp 509–521, 1995.
- [Kum96] S. Kumar. Surface Triangulation: A Survey. Rapport technique, Department of Computer Science, University of North Carolina, 1996.
- [Lam94] K. Lamboglia. *Modélisation Volumique de Surfaces Non-Manifold*. Thèse de doctorat, INPL, Nancy, Fév. 1994.
- [Lan95] V. Lang. *Une étude des ensembles simpliciaux en modélisation géométrique interactive*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg, Oct.1995.
- [LCC00] B. Lévy, G. Caumon et S. Conreux. TopoLab : A Generic Implementation of G-Maps. Part I: Data Structure and Programming APIs. *20<sup>th</sup> Gocad Meeting proceedings*, Juin 2000.
- [Lec01] M. Lecour. *Modélisation des incertitudes concernant la géométrie des failles. Impact sur les études volumétriques des réservoirs pétroliers*. Thèse de doctorat, INPL, Nancy, Juin 2001.
- [Lev99] B. Lévy. *Topologie Algorithmique, Combinatoire et Plongement*. Thèse de doctorat, INPL, Nancy, Oct. 1999.
- [Lev01a] B. Lévy. A new solver for a subclass of DSI problems. *21<sup>st</sup> gOcad Meeting report*, Juin 2001.
- [Lev01b] B. Lévy. Constrained Texture Mapping for Polygonal Meshes. *Computer Graphics (SIGGRAPH Conf. Proc.)*. ACM, Août 2001.
- [Lie88] P. Lienhardt. Extension of the notion of map and subdivisions of a three-dimensional space. *Proc. of 5<sup>th</sup> Symposium on Theoretical Aspects in Computer Science*, Fév. 1988.
- [Lie89] P. Lienhardt. Subdivisions of N-Dimensional Spaces and N-Dimensional Generalized Maps. *Proc. Annual A.C.M. Symposium on Computational Geometry, Saarbrücken, R.F.A.*, pp 228–236, 1989.
- [Lie94] P. Lienhardt. N-Dimensional Generalized Combinatorial Maps and Cellular Quasi-Manifolds. *Journal on Computational Geometry and Applications*, 4, 3, pp 275–324, 1994.
- [LM98] B. Lévy et J.L. Mallet. Non-Distorted Texture Mapping for Sheared Triangulated Meshes. *Computer Graphics (SIGGRAPH Conf. Proc.)*. ACM, Juil. 1998.
- [Mal92] J.L. Mallet. Discrete Smooth Interpolation. *Computer Aided Design Journal*, 24, 4, pp 263–270, 1992.

- [Mal02] J.L. Mallet. *Geomodeling*. Oxford University Press, 2002. ISBN: 0195144600.
- [Mar98] O. Mariez. *Modélisation de solides par synthèse de l'analyse d'images 3D et de modèles à base de surfaces non-variés*. Thèse de doctorat, INPL, Nancy, Mai 1998.
- [Mas02] J. Massot. *Implémentation de méthodes de restauration équilibrée 3D*. Thèse de doctorat, INPL, Nancy, Fév. 2002.
- [May67] J.P. May. *Simplicial objects in algebraic topology*. Van Nostrand mathematical studies, Princeton, 1967.
- [MC99] C. Mugerin et R. Cognot. Fitting Curvilinear Stratigraphic Grids to Horizons and Faults. 19<sup>th</sup> *gOcad Meeting report*, Juin 1999.
- [Mea82] D. Meagher. Geometric modeling using octree encoding. *Comput. Graph. Image Process.*, 19, pp 129–147, 1982.
- [Nul98] S. Nullans. *Reconstruction géométrique de formes - Application à la géologie*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1998.
- [Req80] A. A. G. Requicha. Representations for Rigid Solids: Theory, Methods, and Systems. *Computing Surveys*, 12, 4, pp 437–464, 1980.
- [RHD89] A. Rockwood, K. Heaton et T. Davis. Real Time Rendering of Trimmed-Surfaces. *Computer Graphics*, 23, 3, pp 107–116, 1989.
- [RN97] R. Raffin et M. Neveu. Déformations avec contraintes pour la modélisation géométrique et la reconstruction d'objets. *Acte des Vèmes Journées de l'AFIG*, pp 111–119, 1997.
- [RNJ99] R. Raffin, M. Neveu et F. Jaar. Extended Constrained Deformations : A New Sculpturing Tool. *Proceedings of International Conference on Shape Modeling and Applications*, pp 219–224, 1999.
- [RV80] A.A.G. Requicha et H.B. Voelcker. Constructive Solid Geometry. *Production Automation Project Tech. Memo 25, Rochester University*, Nov. 1980.
- [She97] J. R. Shewchuk. Adaptive Precision Floating-Point Arithmetic and Fast Robust Geometric Predicates. *Discrete & Computational Geometry*, 18, 3, pp 305–363, Oct. 1997.
- [She99] J. R. Shewchuk. Lecture Notes on Delaunay Mesh Generation, 1999. <http://citeseer.nj.nec.com/shewchuk99lecture.html>.

- [SP86] T. W. Sederberg et S. R. Parry. Free-Form Deformation of Solid Geometric Models. *Computer Graphics (SIGGRAPH '86 Proceedings)*, 20, pp 151–160, Août 1986.
- [Str97] B. Stroustrup. *The C++ Programming Language*. Addison Wesley, 3<sup>ème</sup> édition, 1997. ISBN 0-201-88954-4.
- [Wei85] K. Weiler. Edge-Based Data Structures for Solid Modeling in Curved-Surface Environments. *IEEE Computer Graphics et Applications*, 5, 1, pp 21–40, 1985.
- [Wei86a] K. Weiler. The Radial Edge Structure: a Topological Representation for Non-Manifold Geometric Boundary Modeling. *Proc. of the IFIG WG 5.2*, Mai 1986.
- [Wei86b] K. Weiler. *Topological Structures for Geometric Modeling*. PhD thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, 1986.