

Génération de Maillages Tridimensionnels pour la Simulation des Phénomènes Physiques en Géosciences

François Lepage

28 Octobre 2003

Résumé

GÉNÉRATION DE MAILLAGES TRIDIMENSIONNELS POUR LA SIMULATION DES PHÉNOMÈNES PHYSIQUES EN GÉOSCIENCES

En géosciences, l'utilisation de maillages tridimensionnels permet de discrétiser les objets géologiques du domaine d'étude, et autorise ainsi la simulation numérique de processus variés dépendant de différentes propriétés physiques, comme l'étude de la déformation des couches du sous-sol, le tracé de rayons sismiques, ou encore la modélisation des écoulements en milieu poreux et perméable. Afin de garantir la précision, la rapidité et la robustesse de ces calculs, les mailles doivent néanmoins satisfaire certaines propriétés, notamment en ce qui concerne leur forme et leur taille.

Cette thèse aborde certains problèmes inhérents à la génération de maillages tridimensionnels adaptés aux applications auxquelles ils sont destinés:

Dans l'hypothèse où les données se présentent sous la forme d'un *modèle structural*, c'est-à-dire un ensemble de surfaces interconnectées représentant les interfaces du domaine d'étude, un macro-modèle, baptisé *Soft Frame Model*, est tout d'abord défini pour intégrer les différents maillages ou remaillages réalisés, et assurer la validité topologique et géométrique de leurs contacts. Ensuite, des solutions sont proposées pour remailler automatiquement, sous la forme de triangulations contraintes, les surfaces tridimensionnelles du modèle structural, grâce à des processus qui convergent nécessairement, assurent une qualité minimale de forme des triangles, et permettent de faire varier finement leur taille en fonction de contraintes variées. Ceci débouche sur la réalisation d'un procédé robuste de construction de modèles volumiques définis par frontières. Enfin, ce travail présente des algorithmes originaux de génération de maillages volumiques à base de tétraèdres et de polyèdres quelconques, avec un contrôle efficace de la forme et de la taille des mailles. La validité applicative de ces maillages est attestée par quelques exemples de simulations sur des cas réels.

Abstract

THREE-DIMENSIONAL MESH GENERATION FOR THE SIMULATION OF PHYSICAL PHENOMENA IN GEOSCIENCES

Three-dimensional meshes are widely used in Geosciences for discretizing the geological objects of the problem domain, thus providing a support for the numerical simulation of various processes depending on physical properties, such as balanced unfolding, ray-tracing, or fluid flow modelling in porous and permeable rock bodies. However, to ensure accuracy, efficiency, and stability, mesh elements must meet several requirements, especially on their shape and size.

This work tackles some problems related to the generation of three-dimensional meshes that are expected to be tailored to the applications they are dedicated to:

First of all, starting from a *structural model*, that is to say a set of interconnected surfaces representing the boundaries of the problem domain, a macro-model, called *Soft Frame Model*, is defined for integrating the produced meshes and ensuring the geometrical and topological validity of their contacts. Then, solutions are proposed for the automatic generation of constrained triangulations for the three-dimensional surfaces of the structural model. The presented algorithms are guaranteed to terminate, ensure a minimum quality of the triangles, and allow a precise control of their size, depending on various constraints. As an application, a robust method is described for building sealed geological models. Finally, this work presents new algorithms for meshing volumes with tetrahedra or arbitrary polyhedra, and providing an efficient control on their shape and size. Their compatibility with existing numerical schemes is shown through some examples of simulations on real cases.

Remerciements

Je dois remercier en premier mon directeur de thèse, Jean-Laurent Mallet, qui, au travers de son enseignement à l'École Nationale Supérieure de Géologie, m'a fait découvrir et aimer la *géologie numérique*, discipline curieuse qui tient à la fois de la géologie, de l'informatique et des mathématiques. Mes remerciements vont ensuite à Joël Ita, de la compagnie SHELL, dont l'équipe a initié puis financé ce travail de recherche. Je suis également très reconnaissant à Louis Durlofsky, de l'Université de Stanford, et à Mariette Yvinec, de l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA), de m'avoir fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse. Merci également à Michel Chipot, de l'Université de Zurich, Isabelle Moretti, de l'Institut Français du Pétrole (IFP), et Jacques Rivoirard, de l'École de Mines de Paris, qui ont accepté de faire partie du jury.

Plus généralement, je tiens à remercier tout ceux avec qui j'ai pu être amené à travailler au cours de ces trois années, surtout Mathieu Prévost, de l'Université de Stanford, et Nathalie Andenmatten, de la société GEOWATT, avec qui j'ai eu plaisir à collaborer. En souvenir des bons moments passés avec eux, je salue aussi bien sûr tous les membres du Laboratoire d'Infographie et d'Analyse de Données (LIAD), où cette thèse a été réalisée: Sophie Viseur, Christian Le Carlier, Jean-Charles Voillemont, Pierre Muron, César Mugerin, Guillaume Caumon, Luciano Peireira Dos Reis, Olivier Grosse, Emmanuel Labrunye, Rémi Moyen, Bruno Leflon et les autres... En particulier, je dis merci à Laurent Souche, David Ledez, Laurent Labat et Thomas Jérôme, avec qui je partage les bureaux du Bâtiment F de l'ENSG. Je dois le dire, ils m'ont souvent sorti de l'impasse et apporté la motivation nécessaire à ce genre d'exercice.

Table des matières

Introduction	1
I Les maillages comme outils de modélisation	3
1 Définitions et caractérisations des maillages	3
1.1 Qu'est-ce qu'un maillage ?	3
1.1.1 Définitions et propriétés géométriques des mailles	3
1.1.2 Les maillages vus comme des graphes	9
1.2 Classifications des maillages	13
1.2.1 Distinction topologique : maillages structurés et non-structurés	13
1.2.2 Distinction géométrique : maillages réguliers et irréguliers	15
1.3 Modèles de représentation de maillages	17
1.3.1 Modèles micro-topologiques pour les maillages non-structurés	17
1.3.2 Gestion du plongement des cellules	24
1.4 Perspectives	29
2 Enjeux et principes de la modélisation des processus physiques	31
2.1 Les équations aux dérivées partielles en géosciences	31
2.1.1 Introduction	31
2.1.2 Un exemple géomécanique : la déformation des couches du sous-sol	32
2.1.3 Une application en géophysique : le tracé de rayons sismiques	33
2.1.4 Les simulations d'écoulement dans les réservoirs pétroliers	36
2.2 Schémas numériques de résolution	38
2.2.1 Les différences finies	38
2.2.2 Les volumes finis	40
2.2.3 Les éléments finis	42
3 Représentations cellulaires des objets géologiques	45
3.1 Caractérisation des données disponibles	45
3.1.1 Nature des données	46
3.1.2 Représentation des données par une partition cellulaire	48
3.2 Proposition d'une représentation cellulaire valide : le <i>Soft Frame Model</i>	51
3.2.1 Notion d'élément radial	51
3.2.2 Validité d'un modèle basé sur des éléments radiaux	54

3.2.3	Structures de données associées aux éléments radiaux	56
3.2.4	Construction d'un <i>Soft Frame Model</i>	60

II Génération de maillages simpliciaux pour les surfaces tridimensionnelles 63

4	Méthodes de génération de maillages de simplexes	63
4.1	Algorithmes classiques de construction de maillages de simplexes	63
4.1.1	Maillages générés par méthodes frontales	64
4.1.2	Maillages basés sur des arbres octaux	65
4.1.3	Génération de maillages de Delaunay	67
4.2	Techniques propres aux maillages de surfaces tridimensionnelles	77
4.2.1	Maillage des surfaces dans l'espace tridimensionnel	77
4.2.2	Méthodes par projection des contraintes	78
4.2.3	Remaillage des surfaces dans un espace paramétrique	79
5	Génération de maillages triangulés par raffinement de Delaunay	91
5.1	Satisfaction des contraintes par une approche conforme	91
5.1.1	Présentation des méthodes existantes	92
5.1.2	Application aux surfaces radiales des <i>Soft Frame Models</i>	97
5.2	Optimisation de la forme et de la taille des triangles	106
5.2.1	Optimisation de la forme des triangles	106
5.2.2	Optimisation de la taille des triangles	113
5.3	Résultats et applications	118
5.3.1	Retour dans l'espace tridimensionnel	118
5.3.2	Résultats des processus d'optimisations	119
5.3.3	Construction de modèles volumiques définis par frontières	124

III Génération de maillages tridimensionnels simpliciaux et non-simpliciaux 128

6	Génération de maillages tétraédrisés Contraint-Delaunay	129
6.1	Choix d'une approche pour le respect des contraintes	129
6.1.1	Prérequis sur la méthode	130
6.1.2	Limites des méthodes classiques	131
6.1.3	Satisfaction des contraintes par une approche paresseuse	133
6.2	Optimisation de la forme et de la taille des tétraèdres	135
6.2.1	Optimisation de la forme des tétraèdres	136
6.2.2	Optimisation de la taille des tétraèdres	148
6.3	Résultats et applications	153
6.3.1	Exemples de maillages générés avec notre approche	153
6.3.2	Applications à la simulation de phénomènes physiques	155

7	Génération de maillages pour les simulations d'écoulement	159
7.1	Prérequis raisonnables sur les maillages pour simulations d'écoulement . . .	159
7.1.1	Schémas d'approximation de l'écoulement	160
7.1.2	Améliorations de la performance des simulations	171
7.2	Génération de maillages non-structurés et semi-structurés	174
7.2.1	Maillages non-simpliciaux complètement non-structurés	174
7.2.2	Maillages non-simpliciaux semi-structurés	182
7.3	Maillages tridimensionnels modulaires hybrides	188
7.3.1	Choix d'un procédé de construction de grilles modulaires	189
7.3.2	Génération d'un maillage primal de transition	192
7.3.3	Construction de la grille finale d'écoulement	202
	Conclusion	207
	Bibliographie	209

Liste des figures

1.1	Un exemple de 3-polytope à 17 facettes.	4
1.2	Les principaux 2- (en haut) et 3-polytopes (en bas) utilisés dans notre travail, avec, de gauche à droite et de haut en bas : un triangle, un quadrilatère, un polygone quelconque, un tétraèdre, un hexaèdre, un prisme (à base triangulaire), un polyèdre quelconque. . .	4
1.3	Les simplexes de dimension 0, 1, 2 et 3 sont respectivement (de gauche à droite) les points, les segments, les triangles et les tétraèdres.	5
1.4	Un exemple de tétraèdre dégénéré. Son volume est presque nul, car ses quatre sommets sont approximativement coplanaires.	6
1.5	Critères de formes des simplexes. (A) : principales mesures utilisées pour quantifier la forme d'un simplexe (cas d'un triangle). (B) : un <i>cerf-volant</i> est un tétraèdre dégénéré sans arêtes courtes, dont les quatre sommets sont sub-coplanaires. (C) : une <i>aiguille</i> est un tétraèdre dégénéré à trois arêtes courtes, où il n'existe pas d'angles faibles entre ses faces.	8
1.6	Les faces N_1 et A_1 sont incidentes car la première est le bord de la deuxième, et il en est de même pour les faces N_2 et A_1 . Les polygones P_1 et P_2 sont adjacents car ils sont tous les deux incidents à la face A_1	10
1.7	Un 2-complexe cellulaire (en haut) et son graphe d'incidence (en bas). Chaque arc du graphe lie deux cellules du complexe qui sont incidentes.	11
1.8	Le graphe d'incidence d'un complexe cellulaire (en haut) détermine entièrement celui de son dual (en bas). Le dual d'une cellule P_i (dimension 2) est une cellule N'_i (dimension 0), celui d'une cellule A_i (dimension 1) est une cellule A'_i (dimension 1), et celui d'une cellule N_i (dimension 0) est une cellule P'_i (dimension 2). Si deux cellules du complexe cellulaire sont incidentes, alors leur dual le sont aussi.	12
1.9	Représentations schématiques de la structure d'un maillage (cas bidimensionnel). En haut : un maillage structuré à base de triangles. Un nœud d'indices (u, v) a pour voisins les nœuds d'indices $(u - 1, v)$, $(u, v - 1)$, $(u + 1, v)$, $(u, v + 1)$, $(u - 1, v + 1)$ et $(u + 1, v - 1)$. Au milieu : un maillage semi-structuré polygonal (à gauche). Les voisins de chaque nœud s'obtiennent au travers de leur homologue dans le schéma topologique élémentaire (en rouge, à droite). En bas : un maillage non-structuré polygonal.	14
1.10	Représentations schématiques de la régularité d'un maillage. (A) : un maillage non-structuré régulier. (B) : un maillage structuré semi-régulier. (C) : un maillage structuré irrégulier.	15

1.11	Représentation de la topologie d'un complexe cellulaire (à gauche) par un modèle des <i>demi-arêtes</i> (à droite). Les pointeurs sont en rouge. Chaque arête est représentée par deux demi-arêtes (voir structure 1.7). Chaque polygone connaît ses propres demi-arêtes (voir structure 1.8), et chaque nœud les demi-arêtes qui lui sont incidentes (voir structure 1.6).	19
1.12	Exemple d'une 2-G- Carte très simple. Chaque chemin du graphe d'incidence d'un complexe cellulaire, par exemple (P_1, A_3, N_1) , en rouge, et (P_2, A_7, N_7) , en vert, est associé à un élément topologique appelé <i>brin</i> (en haut). Les chemins (P_2, A_5, N_1) et (P_2, A_5, N_8) ne diffèrent que par une cellule de dimension 0 : ils sont donc 0-adjacents, et les <i>brins</i> qui leur correspondent sont liés par une fonction α_0 . Les chemins (P_1, A_1, N_3) et (P_1, A_2, N_3) ne diffèrent que par une cellule de dimension 1 : ils sont donc 1-adjacents, et les <i>brins</i> qui leur correspondent sont liés par une fonction α_1 (en bas).	20
1.13	Exemple d'une 2- Carte très simple. Chaque paire de chemins du graphe d'incidence qui ne diffèrent que par une cellule de dimension 0, par exemple (P_1, A_3, N_2^+, N_1^-) , en rouge, ou (P_2, A_7, N_6^+, N_7^-) , en vert, est associé à un élément topologique appelé <i>aimant</i> (en haut). Les paires de chemins (P_1, A_3, N_2^+, N_1^-) et (P_1, A_2, N_3^+, N_2^-) diffèrent par une cellule de dimension 1 et partagent au moins une cellule de dimension 0 de polarité différente : ils sont donc 1-adjacents, et les aimants qui leur correspondent sont liés par une fonction β_1	22
1.14	Un exemple de propriété <i>scalair</i> e définie sur les <i>polygones</i> d'un maillage bidimensionnel (les valeurs de la propriété sont aléatoires).	25
2.1	Dépliage d'une couche géologique (modèle TOTAL). Les déplacements ont été calculés de manière à minimiser la déformation et à ce que l'horizon du haut de la couche soit mis à plat (d'après [Muron 03]). La propriété affichée correspond à la dilatation (un invariant du tenseur des déformations).	33
2.2	Un exemple de tracé de rayons sismiques (lignes blanches). Les horizons du modèle sont affichés, en même temps que les différents fronts d'onde (d'après [Velten 98]).	35
2.3	Exemple de simulation d'écoulement à une seule phase. La propriété affichée correspond au potentiel de la phase, et les lignes bleues aux <i>lignes de courant</i> , c'est-à-dire à la trajectoire des particules lors de la simulation (d'après [Voillemont 03]).	37
3.1	Les différents contacts de l'espace tridimensionnel considérés dans notre travail. Les lignes correspondent à la dimension du contact (0, 1, ou 2), et les colonnes au type du contact. Les contacts de la colonne du milieu sont des objets non-variétés.	48
3.2	(A) : schéma d'une partition cellulaire de dimension 2, constitué de 3 macro-cellules de dimension 2 entretenant entre elles des contacts définis implicitement par les pointillés. Il existe aussi des contacts entre les macro-cellules de dimensions inférieures. (B),(C),(D) : quelques exemples concrets de modèles géologiques du sous-sol vus comme des partitions cellulaires.	49

3.3	Quelques exemples schématiques de nœuds et de lignes radiales (encerclés en rouge). Les traits verts représentent des informations de contact. (A) : un nœud radial déterminé à 3 enfants et 6 parents. (B) : un nœud radial déterminé à 2 enfants et 2 parents. (C) : un nœud radial flou à 1 enfant et 3 parents (dont 1 flou). (D) : un nœud radial déterminé à 1 enfant et 2 parents. (E) : un nœud radial flou à 1 enfant et 4 parents (dont 2 flous). (F) : une ligne radiale déterminée à 3 enfants et 3 parents. (G) : une ligne radiale déterminée à 1 enfant et 1 parent. (H) : une ligne radiale floue à 2 enfants et 3 parents (dont 1 flou).	52
3.4	Cette figure illustre la notion d'incidence entre éléments radiaux. En haut : partition cellulaire de départ. Les pointillés représentent les informations de contact (à gauche). Visualisation des éléments radiaux (à droite). En bas : graphe d'incidence associé aux éléments radiaux. Les arcs en pointillés correspondent aux relations d'incidence floues.	53
3.5	Les 1-ancêtres de la surface radiale SR_3 sont les lignes radiales LR_4 , LR_6 et LR_7 , et ses 0-ancêtres sont les nœuds radiaux NR_2 , NR_3 , NR_4 , NR_6 , et NR_7 . La géométrie de cette surface radiale doit donc être contrainte par celle de tous ces éléments radiaux.	55
3.6	Un premier exemple de construction d'un <i>Soft Frame Model</i> à partir d'un modèle structural synthétique (à gauche). La géométrie des nœuds radiaux et des lignes radiales est affichée à droite.	60
3.7	Un autre exemple de construction d'un <i>Soft Frame Model</i> à partir d'un modèle structural réel (modèle TOTAL), représenté à gauche. La géométrie des nœuds radiaux et des lignes radiales (avec une résolution uniforme) est affichée à droite.	61
4.1	Sur cette figure, les contraintes sur la triangulation sont matérialisées par des lignes plus épaisses. Le front est représenté par les lignes rouges. Le point p encerclé, bien qu'idéalement situé, n'est pas un candidat valide pour former un nouveau triangle avec l'arête a , car celui-ci intersecterait des arêtes déjà formées.	64
4.2	Un exemple de <i>quadtrees</i> construit à partir d'un ligne polygonale fermée. Les cellules ont été récursivement subdivisées en quatre de manière à ce que chaque sommet de la ligne soit contenu dans une seule cellule.	66
4.3	À gauche : la triangulation des points figurés en noir est de Delaunay car tous les triangles ont un cercle circonscrit vide. À droite : le <i>diagramme de Voronoï</i> (en rouge) en est un complexe cellulaire dual. Ses sommets sont les centres des cercles circonscrits aux triangles (points blancs). Un point appartenant à la <i>cellule de Voronoï</i> associée au sommet \mathbf{x}_i , figurée en bleu, est plus proche de \mathbf{x}_i que de tous les autres sommets. Celle associée à \mathbf{x}_j est non-bornée car ce sommet est situé sur le bord de la triangulation, c'est-à-dire sur l'enveloppe convexe de ses sommets.	68
4.4	En calculant une distance euclidienne à un ensemble de points donnés (en blanc), les contours des <i>cellules de Voronoï</i> se dessinent au niveau des zones d'égales distances entre les couples de points (d'après [Ledez 03]).	68
4.5	Dans une triangulation de Delaunay, tous les triangles ont un cercle circonscrit vide (à gauche). Ceci implique que toutes les arêtes ont <i>au moins un cercle circonscrit vide</i> (à droite), et réciproquement. Notons qu'il n'est pas nécessaire de considérer les arêtes du bord de la triangulation, car il est toujours possible de leur trouver un cercle circonscrit qui soit vide.	69

4.6	En haut : Les sommets (points blancs) d'un diagramme de Voronoï d'un ensemble de points contenant des sous-ensembles <i>dégénérés</i> (ici 5 points sont cocycliques) correspondent localement à la jonction de plus de 3 cellules (à gauche). La maillage dual n'est alors pas entièrement constitué de triangles (à droite). En bas : il existe donc plusieurs triangulations de Delaunay de l'ensemble de points.	70
4.7	Deux méthodes incrémentales pour construire une triangulation de Delaunay. En haut : une cavité est formée en éliminant du maillage le triangle contenant le point à ajouter (en blanc), trois nouveaux triangles sont créés, et des changements de connexions sont réalisés de manière à ce que les triangles et les arêtes soient de Delaunay. En bas : une cavité est formée en éliminant du maillage tous les triangles contenant le point à ajouter dans leur cercle circonscrit.	72
4.8	Construction d'une triangulation de Delaunay par balayage. Les points sont classés par coordonnée croissante selon l'axe horizontal. Les centres des cercles circonscrits aux <i>pseudo-triangles</i> sont en blanc.	73
4.9	Méthodes de respect des contraintes dans un maillage de Delaunay (les éventuels <i>points de Steiner</i> sont gris et encerclés en rouge). (A) : la contrainte à respecter dans la triangulation est l'arête rouge plus épaisse. (B) : approche par cassage des contraintes. (C) : approche conforme. (D) : approche par forçage des contraintes.	74
4.10	Le triangle t est Contraint-Delaunay, car les points qui sont contenus dans son cercle circonscrit (en pointillés) ne sont pas <i>visibles</i> depuis son intérieur, du fait de la présence d'arêtes de contrainte (lignes plus épaisses). L'arête e est également Contraint-Delaunay, car il est possible de lui trouver un cercle circonscrit qui ne contienne pas de points <i>visibles</i> depuis son intérieur.	76
4.11	Principe de la triangulation par projection, avec de haut en bas : contraintes dans l'espace tridimensionnel (ligne polygonale fermée), projection dans le plan moyen, triangulation contrainte dans le plan moyen (les arêtes de contrainte sont en rouge), et retour dans l'espace tridimensionnel.	78
4.12	La fonction de paramétrisation inverse Φ associe des points du complexe simplicial tridimensionnel C à des points du domaine paramétrique bidimensionnel D , et la fonction de paramétrisation Φ^{-1} est son inverse (d'après [Mallet 02]).	80
4.13	Principe du remaillage par patches d'une surface tridimensionnelle. La surface initiale (un prisme) est fermée et ne peut donc pas être paramétrisée de manière conforme. C'est le cas des 4 patches résultant de sa partition. Chacun peut être remaillé indépendamment dans un espace paramétrique (les contraintes sont en rouge et les nouveaux points en blanc). L'union des nouveaux maillages dans l'espace tridimensionnel forme le remaillage final de la surface.	83
4.14	Allure générale du critère de taille c_t choisi dans notre approche. Comme on peut le voir, plus le paramètre k est grand, et plus c_t devient rapidement proche de 1. Le cas $k = 0$ est une exception (voir équation 4.11).	86
4.15	Quelques exemples de valeurs du critère de forme c_f choisi dans notre approche. Les lignes rouges plus épaisses matérialisent les frontières entre deux patches adjacents. . .	87
4.16	À gauche, les compromis taille/forme acceptables ($c_t \leq 0.5, (1 - c_f) \leq 0.5$) sont associés à des valeurs de c' allant de 0 jusqu'à 1, ce qui est un intervalle très large (voir équation 4.14). À droite, les mêmes compromis sont beaucoup mieux discriminés, avec des valeurs de c' comprises entre 0 et 0.25 (voir équation 4.15).	88

- 4.17 Évolution du poids relatif des critères de planarité (A), de forme (B) et de taille (C) au cours du processus de partition en patches. Avec le temps, le nombre de patches diminue, et le poids du critère de planarité (équation 4.10) devient constamment plus fort. Au temps t_1 , il est même le seul à être pris en compte. Par ailleurs, l'aire des patches ne fait également qu'augmenter, et à partir d'une certaine taille (temps t_0), le critère c_t ne devient plus discriminant (équation 4.11). Le poids du critère de forme (équation 4.12), quant à lui, reste constant. On peut très bien avoir aussi $t_1 < t_0$ 89
- 4.18 Exemple de partition en patches d'une surface triangulée (modèle UNOCAL). La surface initiale figure en haut à gauche. Telle quelle, cette surface ne peut être paramétrisée simplement et rapidement de manière conforme (en haut à droite, les lignes iso- u et iso- v sont affichées). En bas à gauche, la surface est divisée en patches (ici 20), et les paramétrisations obtenues sont valides (en bas à droite). 90
- 5.1 Un segment de contrainte (en pointillés) n'est pas présent dans la triangulation de Delaunay car son cercle circonscrit diamétral n'est pas vide (A). Ce segment est divisé en deux nouveaux segments de contrainte, et un nouveau point est ajouté à la triangulation. Ces deux segments sont *accrochés* à leur tour (B). Finalement, deux nouvelles bisections permettent d'honorer les contraintes dans la triangulation (C). 93
- 5.2 Le segment s_1 est accroché par l'extrémité v_2 du segment s_2 . Un nouveau point (en noir) est donc ajouté en son milieu. Si ce nouveau point accroche à son tour le segment s_2 , alors une cascade infinie de bisections s'enchaîne. Ceci ne peut arriver que si l'angle ϕ est inférieur à 45 degrés. 94
- 5.3 En haut : les trois règles de divisions de deux segments adjacents séparés par un angle faible, selon que le rapport de longueur l_1/l_0 est supérieur à $2/3$ (A), compris entre $1/3$ et $2/3$ (B), ou inférieur à $1/3$ (C). En bas : l'application de ces règles permet d'éviter les séquences infinies d'accrochages au niveau des angles faibles. Les autres accrochages se règlent ensuite de manière classique, par des bisections. 96
- 5.4 Les triangulations matérialisant la géométrie des surfaces radiales se font chacune dans un espace paramétrique différent. Ici, la ligne polygonale aux points blancs représente la géométrie assignée à une ligne radiale d'un *Soft Frame Model*. Elle a deux parents (dont un est flou), et chaque point blanc (dont les extrémités) a une *image paramétrique* (encerclées en rouge) dans chacun des domaines associés. 98
- 5.5 En haut : un épi a été détecté et résolu dans l'espace tridimensionnel au niveau de la géométrie d'une ligne radiale (zone encerclée). Toutefois, dans le domaine paramétrique D où ses segments ont une image, des accrochages peuvent exister du fait de la distorsion de la paramétrisation. En bas : le même épi est d'abord résolu dans le domaine paramétrique D par insertion des deux points jaunes, qui sont aussi ajoutés dans le domaine paramétrique D' . Un autre épi est résolu dans D' par ajout des points bleus, qui ont leur équivalent dans D'' . Un troisième épi est résolu dans D'' par insertion du point rouge, qui a lieu également dans D . Cette dernière insertion va provoquer des bisections infinies des segments des trois épis. 99

- 5.6 En haut, les insertions de nouveaux points sur les segments se font en conservant les poids des extrémités dans chaque domaine paramétrique. Ceci entraîne des cascades infinies de bissections (voir figure 5.5). En bas : les insertions de nouveaux points se font en conservant les longueurs des segments incidents au centre des épis dans chaque domaine paramétrique. Ceci règle le problème des épis. Les divisions sont peu équilibrées, mais en pratique, les longueurs d'un segment varient peu en fonction du domaine paramétrique, ce qui limite ce phénomène. 101
- 5.7 Principe du calcul des images paramétriques. Le graphe d'incidence des éléments radiaux est à droite. Les lignes en pointillés représentent les relations d'incidence floues. La surface radiale SR_2 n'est pas *déterminée* par rapport à la ligne radiale LR_1 , donc l'image paramétrique du nœud radial NR_1 (en rouge) sur SR_2 est à l'intérieur de la surface S_2 . La ligne radiale LR_2 est la seule par rapport à laquelle la surface SR_2 soit *déterminée*, donc l'image paramétrique du nœud radial NR_2 (en vert) sur SR_2 est à l'intérieur d'un bord de la surface S_2 . La surface radiale SR_1 est déterminée par rapport aux deux lignes radiales LR_1 et LR_3 , donc l'image paramétrique du nœud radial NR_1 (en rouge) sur SR_1 est sur le bord d'un bord de la surface S_1 . La surface radiale SR_1 est *déterminée* par rapport à la ligne radiale LR_1 , donc l'image paramétrique du nœud p sur SR_1 est à l'intérieur d'un bord de S_1 . La surface radiale SR_2 n'est pas *déterminée* par rapport à la ligne radiale LR_1 , donc l'image paramétrique du nœud p sur SR_2 est à l'intérieur de S_2 104
- 5.8 Le *mauvais* triangle t a été raffiné en insérant le centre de son cercle circonscrit dans le maillage (A). Les nouvelles arêtes créées (en pointillés) ont toutes une longueur supérieur à R_t (B). Si on a $R_t/d_t > B$, alors leur longueur est aussi supérieure à $B.d_t$ 107
- 5.9 Le centre p du cercle circonscrit à un *mauvais* triangle accroche une arête de contrainte. Par conséquent, le point v est ajouté au maillage. On a alors $r_v/r_p \geq \sqrt{2}/2$ 109
- 5.10 (A) : les segments s_0 et s_1 ne sont pas initialement accrochés. Le point p est ajouté au maillage mais il accroche le segment s_0 . Le point milieu de s_0 est par conséquent ajouté au maillage, mais ceci va provoquer l'accrochage du segment s_1 , et donc l'insertion de son point milieu. Au final, les deux nouveaux segments ne sont pas accrochés. Cette situation ne peut arriver que si $\phi \leq \pi/3$. (B) : si tous les segments formant entre eux des angles inférieurs ou égaux à 60 degrés ont la même longueur l , alors la bissection de l'un provoque celle de tous les autres, et la plus petite arête formée vaut alors $r_{min} = l \cdot \sin(\phi_{min}/2)$ 110
- 5.11 Allure de la fonction de transfert f permettant d'associer une valeur de résolution souhaitée aux valeurs d'une propriété p (cas d'une fonction croissante). Le paramètre de finesse s (voir équation 5.13) caractérise la rapidité avec laquelle f atteint la valeur de résolution associée au maximum de la propriété. 114
- 5.12 Sur cet exemple, les isovaleurs $r = 1$, $r = 2$, $r = 5$ et $r = 8$ de la résolution souhaitée sont affichées. La résolution actuelle des triangles est donnée par le rayon de leur cercle circonscrit. À gauche : la résolution souhaitée des triangles est obtenue en évaluant la valeur de la carte de résolution au niveau des centres des cercles circonscrits (points gris), et aucun d'eux (dont t) n'est raffiné. La résolution finale du maillage ne capture alors pas toutes les variations de la carte de résolution. À droite : la résolution souhaitée des triangles est obtenue en évaluant le minimum des valeurs la carte de résolution dans le triangle (point rouge entouré), et le triangle t est cette fois raffiné. 117

- 5.13 Ce premier exemple concerne un horizon (en vert) affecté par trois failles branchées les unes sur les autres. Tous les contacts sont pris en compte dans le *Soft Frame Model* correspondant. 120
- 5.14 Cette figure montre le résultat de deux remaillages du modèle présenté dans la figure 5.13, effectués à partir de lignes radiales de résolutions différentes (avec un rapport de 5). L'image de droite montre un détail des triangulations obtenues avec la résolution la plus fine. Noter la qualité des triangles et les contacts parfaits entre les surfaces dans l'espace tridimensionnel, assurés par construction. 120
- 5.15 Ces deux autres exemples montrent des résultats obtenus sur des cas plus complexes, avec de nombreux contacts et des angles faibles entre les segments de contrainte. Noter là encore la qualité satisfaisante des triangles, et les contacts parfaits entre les surfaces dans l'espace tridimensionnel. 121
- 5.16 La propriété de distance utilisée pour guider la résolution du maillage est montrée en haut. Au milieu figurent des exemples de raffinements obtenus avec, de gauche à droite, une *finesse* de 0, -2 et -5 . Comme on peut le voir, cet unique paramètre permet de faire varier très simplement la *rapidité* avec laquelle les variations de résolution s'opèrent. Deux détails des maillages obtenus avec les finesses de 0 (à gauche) et -5 (à droite) sont montrés en bas. La qualité de forme des triangles est moins bonne avec une finesse élevée en valeur absolue, ce qui est tout à fait normal. 122
- 5.17 Exemples de mauvais raffinements obtenus par une approche différente, avec, de gauche à droite, une *finesse* de 0, -2 et -5 , guidés par la même propriété que celle de la figure 5.16. Il est notable qu'une fois que le raffinement a convergé, la carte de résolution n'est pas satisfaite (ici, le cas de la finesse nulle est une exception). 123
- 5.18 Sur cette surface, le raffinement est guidé par une contrainte *analytique*, radiale (parties du haut et du bas) ou bien constante (autres parties de la surface). 123
- 5.19 Cette figure montre sur un cas très simple les surfaces remaillées du *Soft Frame Model* (a), et le modèle volumique défini par frontières qui en est déduit (b), qui comprend trois régions (c). 125
- 5.20 Cette figure montre un exemple de modèle structural réel (modèle TOTAL), sur lequel nous avons testé nos algorithmes. Les contacts sont nombreux et de nature variée. Le modèle est vu d'en haut à gauche, et d'en bas à droite. 125
- 5.21 Cette figure illustre le bon fonctionnement de nos algorithmes de remaillage sur un cas réel (modèle TOTAL, voir figure 5.20). Deux détails des triangulations obtenues sont montrés en bas. Noter le traitement des épis, la qualité des triangles et les contacts parfaits entre les surfaces. 126
- 5.22 Construction d'un modèle volumique défini par frontières (modèle TOTAL) à partir des surfaces remaillées du *Soft Frame Model* de la figure 5.20. Grâce aux informations de contraintes, des ensembles connexes de triangles sont définis sur chaque surface, qui peut être divisée en parties cohérentes (en haut). La construction du modèle B-Rep (30 régions) correspondant est ensuite instantanée (en bas). 127
- 6.1 Principe de du respect des contraintes par une approche paresseuse. Sur cette figure, des ensembles connexes de 1, 2, 3 et 4 triangles de contrainte (en noir) sont représentés dans la tétraédrisation par un autre ensemble de 1, 2 3 et 4 faces (en rouge). 134

- 6.2 Le point p , centre du cercle circonscrit à t_1 , est inséré dans la triangulation. À gauche : le triangle t_4 ne sera pas éliminé par cette insertion car il est *Contraint-Delaunay vis-à-vis* de ce point : il contient p dans son cercle circonscrit, mais sans que p soit *visible* depuis son intérieur, du fait de la présence d'arêtes contraintes (lignes plus épaisses). À droite : les triangles t_1 , t_2 et t_3 ont été éliminés, et p ajouté au maillage. 137
- 6.3 À gauche : le triangle hachuré est *B-mauvais* et le centre de son cercle circonscrit (point blanc) est ajouté à la triangulation. À droite : l'insertion a été faite de manière à préserver le caractère *Contraint-Delaunay* de la triangulation (la ligne plus épaisse matérialise une arête de contrainte). Elle génère un triangle de forme encore moins satisfaisante que le *B-mauvais* triangle initial. De plus, ce nouveau triangle ne pourra pas être éliminé par raffinement car il est *Contraint-Delaunay vis-à-vis* du centre de son cercle circonscrit (point blanc). 138
- 6.4 Le triangle hachuré est *Contraint-Delaunay vis-à-vis* du centre (point blanc) de son cercle circonscrit (en pointillés), du fait qu'une arête de contrainte (ligne plus épaisse) *bouche la visibilité* entre ce point et l'intérieur du triangle. Dans ce cas, le cercle circonscrit *diamétral* à cette arête (trait plein) contient nécessairement les 3 sommets du triangle. 139
- 6.5 Pour un tétraèdre t contenant le nœud \mathbf{x} , la position idéale \mathbf{x}' de ce sommet peut être vue comme un point de l'espace situé sur une ligne perpendiculaire à la face de t opposée à \mathbf{x} (de longueur moyenne l et de barycentre b) passant par b . La distance au point b est fonction de l 142
- 6.6 Quelques opérateurs topologiques. (A) Opérateur OP_1 . Son application n'est possible que si la nouvelle arête formée *intersecte* la face éliminée (point blanc). (B) Opérateur OP_2^3 . Son application est toujours possible. (C) Opérateur OP_2^6 . Cet opérateur est entièrement déterminé par le choix d'une *triangulation* des sommets *équatoriaux*, différents des extrémités de l'arête éliminée (étape intermédiaire). 144
- 6.7 Visualisation des triangulations *canoniques* de p sommets (d'après [Freitag 97]). En-dessous de chaque triangulation figure le nombre de triangulations distinctes pouvant être obtenues par rotation. Le stockage de ces 13 triangulations canoniques permet de représenter implicitement $N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7 = 64$ triangulations différentes (voir équation 6.3). 145
- 6.8 Sur cet exemple, les isovaleurs $r = 1$, $r = 2$, $r = 5$ et $r = 8$ de la résolution souhaitée sont affichées. La résolution actuelle des triangles est donnée par le rayon de leur cercle circonscrit. À gauche : la résolution souhaitée des triangles est obtenue en évaluant la valeur de la carte de résolution au niveau des centres des cercles circonscrits (points gris), et aucun d'eux (dont t) n'est raffiné. La résolution finale du maillage ne capture alors pas toutes les variations de la carte de résolution. À droite : la résolution souhaitée des triangles est obtenue en évaluant le minimum des valeurs la carte de résolution dans le triangle (point rouge entouré), et le triangle t est cette fois raffiné. 149
- 6.9 Les deux situations où un point est inséré sur un simplexe de contrainte suite au raffinement d'un mauvais triangle, hachuré sur la figure. À gauche : une arête de contrainte (ligne plus épaisse) *bouche la visibilité* entre l'intérieur du mauvais triangle et le centre de son cercle circonscrit (point blanc). À droite : une arête de contrainte est accrochée par le centre du cercle circonscrit au mauvais triangle (point blanc). 150

- 6.10 Résultat d'une tétraédrisation générée avec notre approche (modèle TOTAL). En haut à gauche figure le modèle structural ayant servi à construire le *Soft Frame Model*. En bas sont montrées une coupe transversale (à gauche) et longitudinale (à droite). Noter la résolution homogène du maillage. Les couleurs correspondent aux régions. 154
- 6.11 Effet de l'optimisation du maillage par basculements d'arêtes. À gauche, seuls sont affichés les tétraèdres qui ont une valeur du critère R/r inférieure à 0.1 (dont les cerfs-volants). À droite, seuls sont affichés les tétraèdres qui ont une valeur du critère R/r comprise entre 0.2 et 0.3. 154
- 6.12 Effet de l'optimisation du maillage par basculements de faces. Seuls sont affichés les tétraèdres qui ont une valeur du critère R/r inférieure à 0.1 (dont les cerfs-volants). Comme on peut le voir, plus de 90 % d'entre eux ont été éliminés. 155
- 6.13 Un exemple de restauration équilibrée d'un bloc de faille. L'état actuel est à gauche, et l'état restauré à droite. Noter que la partie supérieure du bloc a été mise à plat. La tétraédrisation de gauche a été optimisée selon un critère de forme et de taille. 155
- 6.14 Restauration équilibré du modèle TOTAL (l'état restauré est en haut). L'horizon faillé correspondant au toit des couches a été mis à plat. Une propriété de dilatation (un invariant du tenseur des déformations) est affichée sur l'état restauré. 156
- 6.15 Visualisation des surfaces initiales (à gauche) et des surfaces remaillées (à droite) du modèle GEOWATT. Les triangulations ont été optimisées selon des critères de forme et de taille. 156
- 6.16 Génération d'une tétraédrisation pour une simulation thermique (modèle GEOWATT). Une section du maillage est montrée en bas à gauche, où l'on peut voir un raffinement autour d'un puits. Un résultat de simulation figure en bas à droite (une propriété de température est affichée). 157
- 7.1 Avec un schéma distribué par éléments, la perméabilité $\underline{k}_{\mathcal{M}}$ est constante dans chaque tétraèdre. Le flux attaché à la *portion* de la face duale de l'arête $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ comprise dans le tétraèdre \mathcal{M} , représentée en vert, dépend des valeurs de potentiel aux quatre nœuds $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k$ et \mathbf{x}_l , de leur géométrie, et de $\underline{k}_{\mathcal{M}}$ 162
- 7.2 Avec un schéma distribué par points, la perméabilité $\underline{k}_{R(\mathbf{x}_i)}$ est constante dans chacune des régions de continuité de la maille \mathcal{M} . Le flux attaché à la *portion* de la face duale de l'arête $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ comprise dans \mathcal{M} , représentée en vert, dépend des valeurs de potentiel aux nœuds de \mathcal{M} , des valeurs de perméabilité associées, et de sa géométrie. Les points de continuité sont en rouge. 163
- 7.3 Un exemple de grille d'écoulement tridimensionnelle de type *Streamline-Pressure-Potential* (d'après [Castellini 00-(1)]). Les lignes de courants et les isopotentielles sont à gauche, et deux sections horizontales de la grille correspondante à droite. 166
- 7.4 Dans le cas où les perméabilités sont des valeurs scalaires, l'orthogonalité entre les arêtes du maillage primal et les faces des volumes de contrôle correspondantes suffit à assurer la k -orthogonalité, que le schéma soit *distribué par éléments* (à gauche) ou *par points* (à droite). Le dual d'une maille du primal est alors le centre de sa sphère circonscrite. Chaque couleur correspond à un domaine où la perméabilité est supposée constante. . . 167

7.5	Avec un schéma <i>distribué par éléments</i> , si les tenseurs de perméabilité sont anisotropes et symétriques, il est possible d'assurer une k -orthogonalité si les anisotropies ne sont pas trop fortes. Chaque couleur correspond à un domaine où la perméabilité est supposée constante.	167
7.6	Que ce soit avec des perméabilités isotropes (à gauche) ou anisotropes (à droite), le fait que les mailles du primal soient des simplexes de Delaunay n'assure en rien que ceux-ci contiennent le centre de leur sphère circonscrite, et en pratique, parvenir à une k -orthogonalité n'est pas toujours possible.	168
7.7	Principales étapes de construction d'un maillage non-simplicial non-structuré pour simulations d'écoulement (d'après [Grosse 02]). (a) : <i>Soft Frame Model</i> de départ. (b) : Résultat de la tétraédrisation du <i>Soft Frame Model</i> . (c) : Visualisation du maillage dual de la tétraédrisation, sans les volumes de contrôle non-bornés. (d) : Incorporation des contraintes dans la grille d'écoulement.	175
7.8	Calcul des relations topologiques duales avec un modèle de <i>G-Carte</i> (à gauche) et de <i>Carte</i> (à droite). Les voisinages de type α_0 sont en orange, ceux de type α_1 ou β_1 en bleu, et ceux de type α_2 ou β_2 en rouge (voir partie 1.1).	176
7.9	Logiquement, un maillage dual, quel qu'il soit (ici il est PEBI, avec des perméabilités isotropes donc), n'honore pas naturellement les contraintes du maillage primal, matérialisées par les arêtes noires plus épaisses.	177
7.10	Les contraintes sur le maillage primal sont les arêtes noires plus épaisses (A). En général, les sommets de ces contraintes sont dupliqués et le nouvel ensemble de points est remaillé (B). Ensuite, le maillage dual est construit de manière classique (C, D). Un résultat quasi-identique est obtenu en dupliquant les points <i>après la tétraédrisation</i> , avec des post-traitements spécifiques (E, F). Ceci évite un remaillage, et génère des volumes de contrôle sans faces dégénérées.	179
7.11	Un exemple bidimensionnel de prise en compte des contraintes dans le maillage dual (modèle TOTAL).	180
7.12	Un premier exemple tridimensionnel avec le modèle synthétique XINGU, montrant à gauche la tétraédrisation, et à droite le maillage obtenu par dual. Les nœuds et arêtes de contrainte situés sur les bords <i>externes</i> n'ont pas été pris en compte.	180
7.13	Quelques exemples de maillages non-simpliciaux complètement non-structurés pour simulations d'écoulement.	181
7.14	Un exemple de maillage de référence constitué de polygones quelconques obtenus par dual d'une triangulation de Delaunay (modèle TOTAL). Le maillage a été raffiné en fonction d'une propriété aléatoire définie sur une grille régulière très grossière (voir partie 5.2). Noter le respect des bords.	183
7.15	Construction d'un maillage de référence polygonal comme support d'une grille générée par extrusion (modèle TOTAL, à gauche). Les polygones de contrôle sont générés dans un espace paramétrique, par dual d'une triangulation de Delaunay (avec comme complément un lissage, en bas à gauche). Noter le respect des bords.	184
7.16	Un exemple de maillage de référence hybride, à base de quadrilatères et de polygones (modèle TOTAL). Noter la transition naturelle entre les deux types de mailles, et le respect des bords de la surface. Comme on peut le voir, l'orientation des mailles structurées est libre.	185

7.17	Un exemple de champ de fibres (modèle TOTAL). Noter que la direction des fibres suit localement les failles (d'après [Grosse 03]).	186
7.18	Plusieurs exemples de grilles d'écoulement construites par extrusion d'un maillage de référence (modèle TOTAL).	187
7.19	Un exemple schématique d'un module de puits (à gauche) et d'un module cartésien (à droite). Ces deux modules sont structurés.	189
7.20	Vue d'une coupe longitudinale d'un module de puits (voir figure 7.19), avec $n_r = 4$ et $n_\theta = 8$. Avec notre approche, la topologie de ce module est rigoureusement identique à celle d'un module cartésien, c'est pourquoi des bords <i>fictifs</i> sont introduits (la géométrie des nœuds gris est partagée).	190
7.21	Principe de construction de la géométrie des mailles primales d'un module de puits. . .	193
7.22	Sur cette figure, les nœuds gris représentent les sommets des mailles primales du module de puits situés sur la trajectoire du puits. Le diagramme de Voronoï de la ligne polygonale joignant les milieux de deux nœuds gris consécutifs est également dessiné. Les lignes noires plus épaisses représentent les plan dans lesquels sont distribués les sommets des mailles primales du module. Si tous ces nœuds demeurent dans la bonne région de Voronoï, alors il ne peut pas y avoir d'auto-intersection.	195
7.23	Illustration des intersections entre modules, sur l'exemple de deux modules cartésiens (cas bidimensionnel). Les frontières des modules sont matérialisées par les lignes plus épaisses. (A) Le module noir est prioritaire sur le gris, et sa zone de protection est représentée par la ligne en pointillés. (B) Deux cellules du module gris ont été marquées comme <i>inactives</i> car elles intersectent la zone de protection. (C) La frontière du module gris a été mise à jour. Les deux frontières ne se recoupent plus, et leurs sommets peuvent être ajoutés à une triangulation.	198
7.24	Visualisation d'un module structural (à gauche) et de sa zone de protection (à droite), sous la forme d'une propriété scalaire représentant la <i>distance</i> à la frontière du module. Seules les valeurs positives sont représentées. Comme on peut le voir, les distances nulles ne sont pas situées sur la frontière du module, car la distance a été décalée en fonction de la valeur des rayons des sphères circonscrites équatoriales aux triangles.	199
7.25	Une approche possible du respect des contraintes, sur l'exemple d'un module cartésien. Imaginons que les sommets de sa frontière (points noirs) fassent partie d'une tétraédrisation. (A) La face hachurée n'est pas présente dans la tétraédrisation sous la forme d'une union de deux faces de tétraèdres. (B) La maille primale du module à laquelle appartient la face est marquée comme <i>inactive</i> , et la frontière du module est mise à jour. Une autre face est détectée comme absente de la tétraédrisation. (C) La maille correspondante a été marquée comme <i>inactive</i> . La frontière est mise à jour, mais cela implique cette fois-ci l'insertion de deux nouveaux points dans la tétraédrisation (points gris).	201
7.26	Analogie bidimensionnel du principe de génération des volumes de contrôle. Imaginons deux modules cartésiens dont les sommets des frontières font parties d'une triangulation. (A) Les triangles situés à l'intérieur des modules sont retirés. (B) Calcul des centres des mailles primales (points blancs). Ceux attachés aux triangles <i>artificiels</i> ou localisés à l'extérieur d'un domaine d'intérêt sont écartés. (C) Création des volumes de contrôle. (D) Maillage modulaire hybride final. Il est encore possible de retirer quelques volumes de contrôle pour améliorer l'aspect de la grille.	202

- 7.27 Exemple de maillage modulaire hybride PEBI, avec cinq modules de puits et un module cartésien d'arrière-plan. Les volumes de contrôle du maillage cartésien ne sont pas affichés pour une meilleure visualisation du maillage de transition. 204

Introduction

Le travail présenté dans ce mémoire entre dans le cadre de la description et de la modélisation informatique de domaines du sous-sol, discipline que l'on nomme souvent *géologie numérique*. En particulier, il s'intéresse aux techniques de discrétisation des objets tridimensionnels de sub-surface par des associations de primitives géométriques élémentaires, appelées *maillages*. En géosciences, les bénéfices de l'utilisation de maillages comme modèles volumiques sont multiples. Par exemple, leur visualisation par des moyens informatiques permet de mieux comprendre l'agencement dans l'espace des objets géologiques du domaine d'étude, et de contrôler la validité des modèles réalisés. Par ailleurs, ils constituent un excellent support pour la simulation numérique de différents phénomènes physiques, et contribuent ainsi à une meilleure connaissance des propriétés mécaniques et pétrophysiques du sous-sol. Par conséquent, les maillages sont très largement utilisés dans l'industrie pétrolière et minière, où la caractérisation des gisements joue un rôle critique.

Ce mémoire traite de certains problèmes liés à la génération de maillages tridimensionnels, que nous souhaitons *flexibles*, c'est-à-dire constitués d'unions d'éléments variables en forme et en taille:

Dans la première partie, en préambule à la mise au point proprement dite d'algorithmes de génération de maillages, les Chapitres 1 et 2 présentent respectivement quelques notions générales relatives aux maillages (et notamment leur *représentation informatique*), et les différentes applications auxquelles ils peuvent être destinés en géosciences. Le Chapitre 3 caractérise quant à lui les données à disposition pour mailler le domaine d'étude, et dégage une méthodologie qui nous permettra d'assurer plus tard la validité topologique, géométrique et applicative des maillages que nous construirons.

La deuxième partie aborde les techniques de remaillage automatique de surfaces tridimensionnelles. Le Chapitre 4 propose tout d'abord un procédé permettant de simplifier le problème en se plaçant dans un contexte bidimensionnel. Le Chapitre 5 justifie et décrit ensuite l'approche que nous suivons pour construire des triangulations contraintes pour ces surfaces. En particulier, il explique la manière avec laquelle nous assurons la convergence de nos algorithmes, garantissons une qualité minimale des triangles, ou contrôlons de manière fine leur taille (et donc leur nombre).

Enfin, la troisième partie s'articule autour de la génération de maillages pour les domaines volumiques du sous-sol. Le Chapitre 6 traite tout d'abord des tétraédrisations contraintes, et montre là encore comment nous procédons, que ce soit lors de la généra-

tion elle-même du maillage, ou grâce à l'application de post-traitements appropriés, pour garantir une forme satisfaisante aux mailles. Il y est aussi décrit un moyen d'optimiser la taille des tétraèdres en fonction de plusieurs contraintes. Des résultats de différentes applications réalisées sur ces maillages attestent ensuite de leur validité. À ce titre, les simulations d'écoulement sont l'objet du Chapitre 7, qui explique pourquoi et comment les grilles utilisées dans ce contexte doivent être adaptées à la physique du problème, et présente en conséquence un ensemble d'algorithmes de construction de maillages non-simpliciaux que nous estimons adaptés.

Partie I

Les maillages comme outils de modélisation

Définitions et caractérisations des maillages

Ce chapitre de synthèse est consacré aux maillages, objets fondamentaux de notre travail. Une première partie s'attache à la description de leur géométrie et de leur topologie, puis, d'un point de vue algorithmique, plusieurs modèles informatiques de représentation de maillages sont abordés.

1.1 Qu'est-ce qu'un maillage ?

La génération de maillages relève de la géométrie algorithmique, discipline qui s'intéresse à la conception et l'analyse d'algorithmes pour la résolution de problèmes géométriques. Cette discipline, comme beaucoup d'autres, a son *jargon*, et le but de cette partie est avant tout de préciser la définition de quelques termes indispensables à la compréhension des parties suivantes (parties II et III). Les maillages y sont d'abord décrits comme des entités géométriques, en se focalisant volontairement sur la notion de *simplexe*, puis topologiques.

1.1.1 Définitions et propriétés géométriques des mailles

Notions de maille, de polytope

Mailler un domaine de Ω de dimension n revient à le décomposer en plusieurs sous-ensembles géométriques plus simples Ω_i de dimension n appelés *mailles* (ou éléments), chacun reliant un nombre variable de points arbitraires de l'espace appelés *nœuds*. Par ailleurs, si la maille Ω_i connecte n_j nœuds $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n_j-1}$, alors Ω_i est dite *convexe* si elle correspond au sous-espace engendré par toutes les combinaisons linéaires ($\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n_j-1}$) des nœuds \mathbf{x}_k (équation 1.1) :

$$\sum_{k=0}^{n_j-1} \nu_k \cdot \mathbf{x}_k \tag{1.1}$$

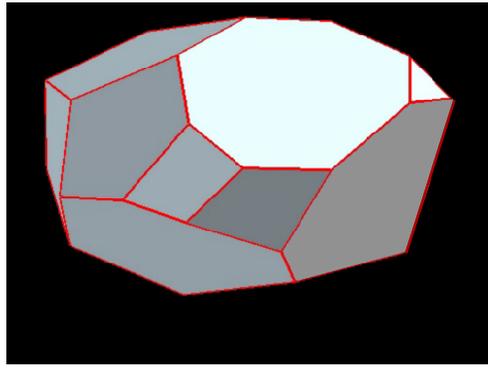


Figure 1.1 Un exemple de 3-polytope à 17 facettes.

où les ν_k sont des réels tous positifs ou nuls tels que leur somme soit égale à 1. Ainsi, Ω_i est convexe si elle contient tous les segments $(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l)$ connectant un couple de nœuds distincts de la maille. Les mailles convexes de dimension n sont appelées n -polytopes. Dans le cas particulier des dimensions 2 et 3, les polytopes sont respectivement des polygones et des polyèdres convexes (voir figure 1.1).

D'une manière générale, les intersections d'un n -polytope avec un hyper-plan H sont des sous-ensembles de dimensions comprises entre 0 et $(n - 1)$. Si ces intersections sont non-vides et que le n -polytope est entièrement inclus dans un des deux demi-espaces délimités par H , alors les intersections sont appelées *faces* du n -polytope [Boissonnat 95]. Celles-ci sont également des polytopes, et donc convexes. Les 0-faces sont dénommées *sommets*, les 1-faces *segments*, et les 2-faces *facettes*.

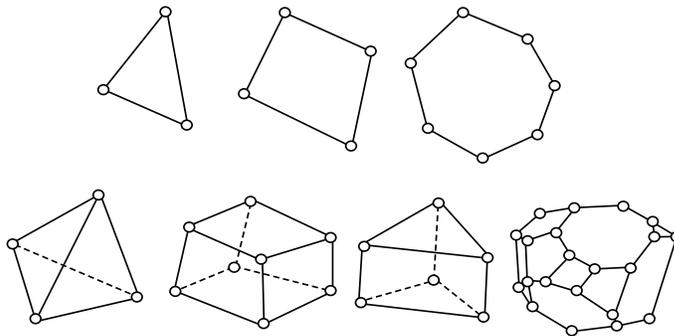


Figure 1.2 Les principaux 2- (en haut) et 3-polytopes (en bas) utilisés dans notre travail, avec, de gauche à droite et de haut en bas : un triangle, un quadrilatère, un polygone quelconque, un tétraèdre, un hexaèdre, un prisme (à base triangulaire), un polyèdre quelconque.

Un maillage est donc un modèle discret de Ω . Il existe une infinité de maillages d'un même domaine, car les mailles peuvent varier en taille, c'est-à-dire en nombre, et en forme, comme le montre la figure 1.2. En géosciences, les domaines d'étude sont généralement bidimensionnels (failles, horizons géologiques, discontinuités) ou tridimensionnels (couches du sous-sol, lentilles ou dômes de sel, tunnels, ...), et dans l'industrie, les mailles les plus

fréquemment utilisées sont alors les triangles, les quadrilatères ($n = 2$), et leur homologue, les tétraèdres et les hexaèdres ($n = 3$). Les polygones et polyèdres de complexité supérieure sont quant à eux plus rares.

Les simplexes, des mailles particulières

Définition

Dans un espace de dimension n , un n -simplexe est un n -polytope formé de $(n + 1)$ nœuds. Un n -simplexe est donc également l'enveloppe convexe de $(n + 1)$ points indépendants de l'espace. Toutes les faces d'un simplexe sont des simplexes de dimensions inférieures. Le nombre F_k de faces de dimension k ($k \leq n - 1$) d'un n -simplexe vaut (équation 1.2) :

$$F_k = \binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(n-k)! \times (k+1)!} \quad (1.2)$$

Comme le montre la figure 1.3, les 0-simplexes sont des points, les 1-simplexes des segments (2 sommets), les 2-simplexes des triangles (3 sommets et 3 segments), et les 3-simplexes des tétraèdres (4 sommets, 6 segments et 4 facettes). La génération des maillages simpliciaux est abordée en détail par la suite (voir parties II et III). Pour l'instant, notons seulement que les simplexes sont plus attractifs que les polytopes quelconques, car d'un point de vue algorithmique ils sont plus faciles à générer, mais aussi parce qu'ils possèdent de nombreuses propriétés géométriques intéressantes.

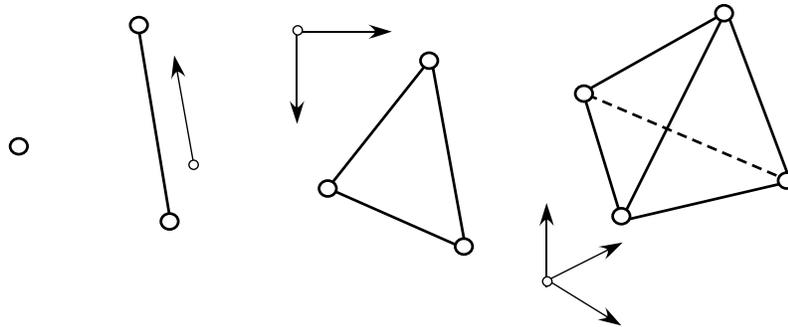


Figure 1.3 Les simplexes de dimension 0, 1, 2 et 3 sont respectivement (de gauche à droite) les points, les segments, les triangles et les tétraèdres.

Mesure de Lebesgue et simplexes dégénérés

La mesure de Lebesgue μ_L d'une maille Ω_i regroupe les notions de longueur, d'aire ou de volume pour les étendre à des dimensions quelconques. En dimensions 2 et 3, cette mesure n'a de sens que pour des polygones et des polyèdres fermés. Pour un n -simplexe S_n formé des nœuds $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, la mesure de Lebesgue s'écrit de la manière suivante (équation 1.3), avec \mathbf{x}_k le vecteur de coordonnées $(x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n)$:

$$\mu_L(S_n) = \frac{1}{n!} \times \det \begin{pmatrix} x_0^1 & x_0^2 & \cdots & x_0^n & 1 \\ x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^n & 1 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

À elle seule, la mesure de Lebesgue ne peut pas servir de critère permettant d'évaluer la taille ou la forme de mailles quelconques. Toutefois, lorsqu'elle est nulle, cette mesure correspond à une catégorie précise de mailles dites *dégénérées*. Dans le cas particulier des simplexes, une condition nécessaire et suffisante de dégénérescence est la non-inversibilité de la matrice décrite dans l'équation 1.3, et ceci correspond au fait que ses sommets (c'est-à-dire ses faces de dimension 0) soient tous dans le même hyper-plan. Par exemple :

- Un segment est dégénéré si ses deux sommets sont confondus.
- Un triangle est dégénéré si ses trois sommets sont situés sur une même ligne (cas de colinéarité) ou bien confondus.
- Un tétraèdre est dégénéré si ses quatre sommets sont situés dans un même plan (cas de coplanarité), colinéaires ou bien confondus, comme le montre la figure 1.4.

De telles mailles sont responsables de fortes instabilités numériques, et doivent donc être proscrites dans la mesure du possible [Bern 99]. D'un autre côté, il est possible de définir un n -simplexe *régulier*, simplexe dont toutes les 1-faces sont de même longueur. Cette notion n'est évidemment valable que pour $n \geq 2$, mais elle correspond à la forme optimale du n -simplexe, indépendamment de la notion de taille.

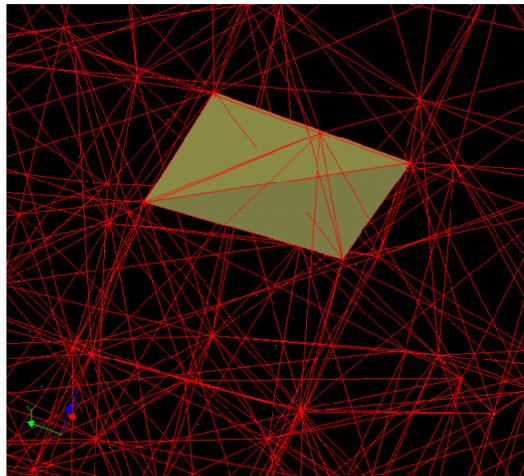


Figure 1.4 Un exemple de tétraèdre dégénéré. Son volume est presque nul, car ses quatre sommets sont approximativement coplanaires.

Critères de forme des simplexes

Intuitivement, un n -simplexe a une forme d'autant moins satisfaisante qu'il se rapproche d'une de ses formes dégénérées, et qu'il s'éloigne de sa forme régulière. Mais comment évaluer rigoureusement et de manière analytique la beauté d'un simplexe ? De nombreux critères peuvent être proposés pour estimer les qualités relatives des simplexes ([George 99], [Edelsbrunner 01], [Cheng 02]). En règle générale, un critère *valide* doit être une fonction continue, invariante par translation, rotation, réflexion et homothétie du simplexe [Labbé 99]. De plus, il doit être borné et présenter deux extrema, un pour toutes les formes de simplexes dégénérés, et un autre pour le simplexe régulier (il peut aussi bien être une fonction croissante que décroissante de l'état de dégénérescence du simplexe).

La plupart des définitions des critères de forme d'un n -simplexe font intervenir des données géométriques simples, comme sa mesure de Lebesgue (longueur, aire, volume) ou celle de ses faces (qui sont toutes des simplexes), les angles entre faces adjacentes, ou bien encore les rayons des hyper-sphères¹ inscrites ou circonscrites au simplexe (voir figure 1.5). Pour prendre l'exemple des triangles ($n = 2$) et des tétraèdres ($n = 3$), les critères les plus fréquents sont les suivants :

- Rapport entre le rayon R de la sphère circonscrite au simplexe et la longueur l de son plus petit segment ($c_1 = R/l$). Ce critère varie dans les intervalles $[\sqrt{3}/3 \approx 0.577, +\infty]$ pour $n = 2$, ou $[\sqrt{6}/4 \approx 0.612, +\infty]$ pour $n = 3$, et est minimal pour les simplexes réguliers. Non seulement ce critère n'est pas borné, mais il est aussi de valeur finie pour un type particulier de tétraèdre dégénéré, appelé *cerf-volant*, ou *sliver* en anglais ([Shewchuk 97], [Li 00-(1)]), comme le montre la figure 1.5. Ce critère n'est donc théoriquement pas valide. Toutefois, pour de toutes autres raisons qui sont détaillées plus tard, il est très fréquemment utilisé.
- Rapport entre la longueur L du plus grand segment du simplexe et le rayon r de sa sphère inscrite ($c_2 = L/r$). Ce critère varie dans les intervalles $[2\sqrt{3} \approx 3.464, +\infty]$ pour $n = 2$, ou $[2\sqrt{6} \approx 4.899, +\infty]$ pour $n = 3$, et est minimal pour les simplexes réguliers. Même s'il n'est pas borné, ce critère est infini pour tous les types de tétraèdres dégénérés, sans exception, ce qui le distingue de c_1 . Son inverse, quant à lui, est borné, et donc valide.
- Rapport entre le rayon r de la sphère inscrite au simplexe et le rayon R de sa sphère circonscrite ($c_3 = r/R$). Ce critère varie entre $[0, 1/2 = 0.5]$ pour $n = 2$, ou $[0, 1/3 \approx 0.333]$ pour $n = 3$, et est maximal pour les simplexes réguliers, contrairement aux deux précédents. De plus, il est borné et minimal pour tous les types de simplexes dégénérés, ce qui en fait un critère tout à fait valide, d'ailleurs assez fréquemment employé [Labbé 99].
- Minimum des angles ζ_i entre tous les couples de $(n - 1)$ -faces adjacentes d'un n -simplexe ($c_4 = \min_i \{\zeta_i\}$). Ce critère varie dans les intervalles $[0, \pi/3]$ pour $n = 2$, ou $[0, \arccos(1/3)]$ pour $n = 3$, et est maximal pour les simplexes réguliers. Toutefois,

¹Extension des cercles et des sphères à des dimensions quelconques.

ce critère ne permet pas de discriminer les tétraèdres dégénérés à trois arêtes courtes, en forme d'aiguilles, appelés *needles* [Labbé 99] (voir figure 1.5). Il peut donc être également considéré comme invalide.

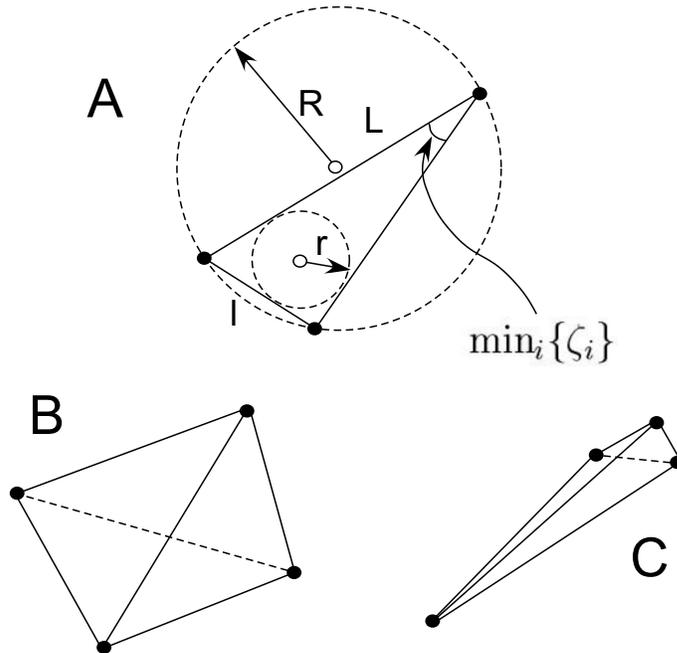


Figure 1.5 Critères de formes des simplexes. (A) : principales mesures utilisées pour quantifier la forme d'un simplexe (cas d'un triangle). (B) : un *cerf-volant* est un tétraèdre dégénéré sans arêtes courtes, dont les quatre sommets sont sub-coplanaires. (C) : une *aiguille* est un tétraèdre dégénéré à trois arêtes courtes, où il n'existe pas d'angles faibles entre ses faces.

Il existe bien sûr un très grand nombre d'autres critères (voir par exemple [Djidjev 00]), sans qu'il soit cependant possible de dire que l'un soit meilleur que les autres. En effet, tous les critères valides peuvent être considérés comme équivalents ([Labbé 99], [Freitag 02]). De plus, un critère invalide (comme c_1 ou c_4) n'est pas obligatoirement à rejeter. Par exemple, le critère c_1 est particulièrement bien adapté à certains algorithmes de génération de maillages de simplexes (voir partie 5.2).

Critères de taille des simplexes

De nombreuses applications nécessitent également de pouvoir quantifier la taille des mailles (souvent dénommée *résolution* du maillage²). Comme pour la forme, celle-ci est mesurée en comparaison avec ce qu'elle devrait être idéalement, information supposée connue et continue sur le domaine maillé Ω [Li 00-(2)]. Ces spécifications en taille sont généralement obtenues grâce à des contraintes définies par l'utilisateur, souvent dictées par l'application à laquelle se destine le maillage. En effet, les contraintes de résolution visent en général à capturer les variations de géométrie du domaine Ω , ou alors les variations d'un phénomène

²La résolution du maillage ne correspond pas forcément à la taille des mailles. Elle peut aussi être définie par la taille des segments des mailles ([Bouchaki 97-(1)], [Frey 99], [Remacle 02]).

physique que le maillage modélise ([Borouchaki 97-(2)], [Edwards 98], [Remacle 02]).

La *carte de résolution* à laquelle le maillage doit s'adapter est stockée sur un support discret qui permet d'estimer les résolutions souhaitées. Ce *maillage d'arrière-plan* (*background mesh* en anglais) est soit le maillage lui-même ([Frey 99], [George 99]), soit un autre maillage, englobant le domaine maillé Ω [Zhu 02]. Les valeurs de résolution qu'il contient sont des valeurs scalaires, ou bien des métriques, ce qui autorise un contrôle de la taille des mailles dans plusieurs directions de l'espace ([Borouchaki 97-(1)], [Lo 01]). En général, une simple interpolation linéaire des valeurs de résolution aux nœuds du maillage d'arrière-plan permet d'obtenir la résolution désirée en n'importe quel point du domaine. Toutefois, des schémas plus performants peuvent être adoptés, comme une interpolation aux voisins naturels [Owen 99-(1)].

Si les contraintes de résolution sont isotropes (c'est-à-dire que les valeurs souhaitées sont sous la forme d'un champ scalaire continu), la taille d'un n -simplexe S_n de forme raisonnable s'approxime par exemple très bien par le rayon R de sa sphère circonscrite. Le critère de taille r_t suivant est donc parfaitement valide (équation 1.4) :

$$r_t(S_n) = \frac{R}{BM(\mathbf{c})} \quad (1.4)$$

avec \mathbf{c} le centre de la sphère circonscrite à S_n et $BM(\mathbf{x})$ la fonction évaluant la résolution souhaitée au point \mathbf{x} du domaine Ω , définie dans le maillage d'arrière-plan [Li 00-(2)].

1.1.2 Les maillages vus comme des graphes

La topologie, complément indispensable à la géométrie

Le nombre et la géométrie des nœuds d'un maillage ou d'un n -polytope ne constituent pas des données suffisantes pour une description complète, car il est également indispensable de connaître la manière dont les mailles et leurs faces sont connectées entre elles. En effet, la très grande majorité des algorithmes basés sur des maillages nécessitent de pouvoir accéder aux relations de voisinage qui existent au sein des mailles ou de leurs faces. Ces informations font intervenir deux notions principales [Boissonnat 95] :

- Une p -face et une $(p - 1)$ -face d'un n -polytope sont *incidentes* si l'une est incluse dans l'autre (voir figure 1.6), autrement dit si la $(p - 1)$ -face représente le bord de la p -face ($1 \leq p \leq n - 1$).
- Deux p -faces d'un n -polytope sont *adjacentes* si elles sont incidentes à la même $(p - 1)$ -face du polytope ($1 \leq p \leq n - 1$), et de même, deux n -polytopes sont *adjacents* s'ils sont incidents à la même $(n - 1)$ -face du maillage (voir figure 1.6).

Les relations d'incidence et d'adjacence au sein des mailles et du maillage constituent leur topologie, qui est donc une description de leur structure combinatoire. Géométrie et topologie peuvent tout à fait être considérées indépendamment : pour une géométrie donnée (nombre et position des nœuds dans l'espace), plusieurs topologies sont possibles, et

réciroquement, pour une topologie donnée (combinaison des faces), plusieurs géométries sont également possibles. Ces deux entités sont donc nécessaires pour une description véritablement complète.

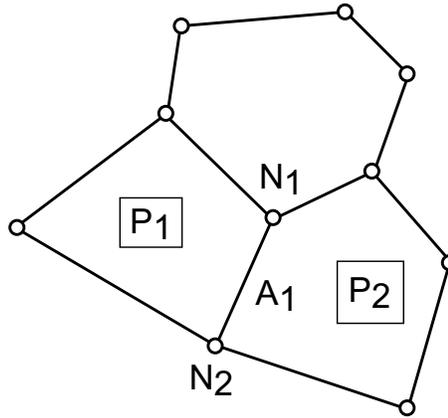


Figure 1.6 Les faces N_1 et A_1 sont incidentes car la première est le bord de la deuxième, et il en est de même pour les faces N_2 et A_1 . Les polygones P_1 et P_2 sont adjacents car ils sont tous les deux incidents à la face A_1 .

Descriptions des connexions intra- et inter-maillages

Considérons maintenant un maillage d'un domaine Ω de dimension n comme une *partition cellulaire*, c'est-à-dire comme un ensemble fini de p -cellules ($0 \leq p \leq n$), où :

1. les n -cellules représentent les n -polytopes du maillage et les cellules de dimensions inférieures leurs faces (qui sont, rappelons-le, également des polytopes),
2. une intersection non-vide entre deux p -cellules ($1 \leq p \leq n$) est une $(p - 1)$ -cellule qui est une face commune aux deux p -cellules,
3. chaque p -cellule ($0 \leq p \leq n - 1$) constitue la face d'une $(p + 1)$ -cellule.

Ainsi définie, la partition cellulaire est un *complexe cellulaire pur*. On parle de *complexe cellulaire* si la troisième condition n'est pas vérifiée [Boissonnat 95]. Décrire la topologie du maillage revient ainsi à représenter de manière complète les structures combinatoires des cellules du complexe.

Les relations d'incidence et d'adjacence entre cellules peuvent être représentées facilement par des graphes, un graphe étant un couple $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ où \mathcal{N} est un ensemble fini d'éléments appelés *nœuds* et \mathcal{A} un ensemble de couples de nœuds appelés *arcs*. Pour décrire les relations d'incidence, il suffit de faire correspondre chaque nœud à une p -cellule ($0 \leq p \leq n$), chaque arc reliant une p -cellule à une des $(p - 1)$ -cellules auxquelles elle est incidente (ce qui définit le *graphe d'incidence* de la maille ou du maillage), comme le montre la figure 1.7. De même, il est possible d'imaginer un *graphe d'adjacence* comportant un nœud pour chaque cellule, et un arc pour toutes les paires de cellules adjacentes.

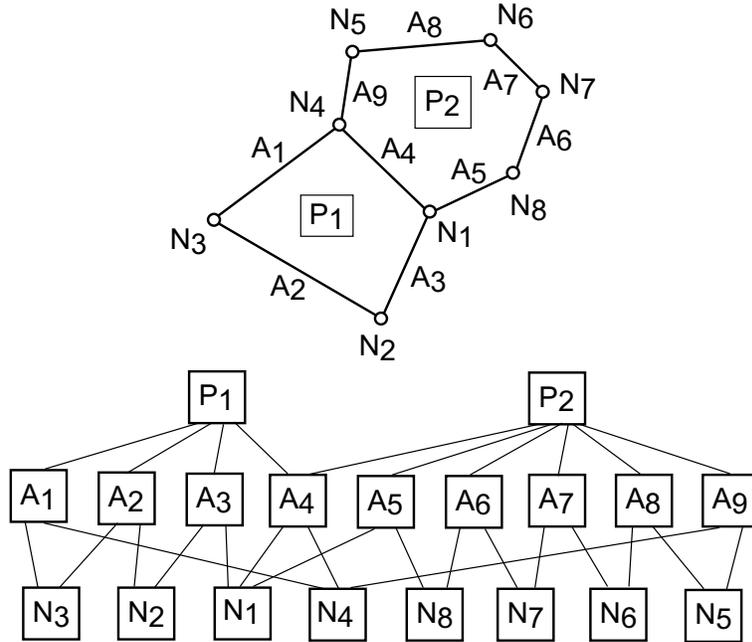


Figure 1.7 Un 2-complexe cellulaire (en haut) et son graphe d'incidence (en bas). Chaque arc du graphe lie deux cellules du complexe qui sont incidentes.

Le graphe d'incidence d'une partition ou d'un complexe cellulaire suffit à lui seul pour décrire entièrement sa topologie, car l'adjacence est définie par les relations d'incidence. La représentation informatique de la topologie des maillages est donc souvent logiquement basée sur le codage du graphe d'incidence [Lévy 99]. Toutefois, lorsqu'une telle représentation est utilisée, retrouver les cellules incidentes à une cellule donnée nécessite le parcours de tout le graphe, ce qui s'avère pénalisant. Des représentations plus élégantes, comme celles abordées par la suite dans la partie 1.3 de ce chapitre, sont alors adoptées en pratique (voir par exemple [Lienhardt 89]).

Notion de maillage dual

Considérons un complexe cellulaire C de dimension n , et soient F_p ses cellules de dimension p ($0 \leq p \leq n$). Nous l'avons vu, C peut être représenté par un graphe d'incidence, mais au sens de la théorie de graphes, il admet également un graphe dit *dual*. Ce graphe est tel qu'il existe une bijection φ entre ses nœuds et ceux du graphe initial (que nous qualifierons de *primal*), où les relations d'inclusions sont inversées [Boissonnat 95]. Rappelons que les nœuds du graphe primal correspondent aux F_p . Comme φ est une bijection, le graphe dual comporte autant de nœuds qu'il y a de F_p , et chacun correspond à une cellule $F'_q = \varphi(F_p)$ ($0 \leq q \leq n$) d'un complexe cellulaire dual C' , également de dimension n . Ainsi, pour toutes les cellules de dimension p de C , il est possible d'écrire la relation suivante (relation 1.5) :

$$F_{p-1} \subset F_p \Leftrightarrow \varphi(F_p) \subset \varphi(F_{p-1}) \quad (1.5)$$

De plus, l'image par φ ou son inverse φ^{-1} d'une cellule de dimension p est nécessaire-

ment une cellule de dimension $(n - p)$. Notons par ailleurs que l'opération de dualité ne change pas les relations d'incidence qui existent entre les cellules : si deux cellules du complexe cellulaire primal C sont incidentes, alors les deux cellules correspondantes du complexe dual C' le sont également (voir figure 1.8). Il en découle que les relations d'adjacence sont aussi conservées. Autrement dit, les graphes d'incidence et d'adjacence d'un maillage et de son dual sont isomorphes, et équivalents du point de vue combinatoire [Boissonnat 95].

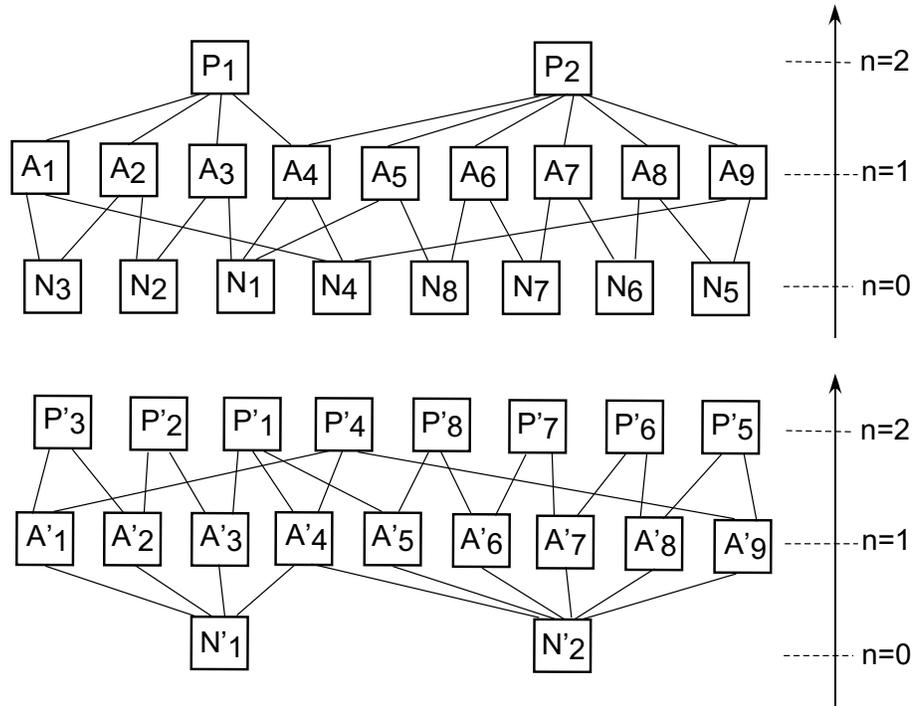


Figure 1.8 Le graphe d'incidence d'un complexe cellulaire (en haut) détermine entièrement celui de son dual (en bas). Le dual d'une cellule P_i (dimension 2) est une cellule N'_i (dimension 0), celui d'une cellule A_i (dimension 1) est une cellule A'_i (dimension 1), et celui d'une cellule N_i (dimension 0) est une cellule P'_i (dimension 2). Si deux cellules du complexe cellulaire sont incidentes, alors leur dual le sont aussi.

Là encore, la notion de maillage dual n'a qu'une signification topologique, et à un maillage primal de dimension n donné, il est possible d'associer plusieurs maillages duaux, chacun ne différant des autres que par la géométrie de ses nœuds (qui sont le dual des cellules primales de dimension n). En dimension 2 ou 3, il est possible d'imaginer par exemple un dual *barycentrique*, où le dual des polygones ou des polyèdres constituant le maillage primal serait leur barycentre, mais d'autres types d'opérations de dualité seront présentées plus tard, dans le chapitre 7.

1.2 Classifications des maillages

La partie précédente (partie 1.1) a montré que les maillages et les mailles qui les constituent sont des objets à la fois géométriques (nombre et position des nœuds dans l'espace) et topologiques (connexions intra- et inter-mailles), sans qu'aucun de ces deux aspects ne puisse être considéré indépendamment sans rendre la description du maillage incomplète. Ainsi, un maillage à géométrie fixée peut avoir plusieurs topologies, et réciproquement, une même topologie peut tout à fait correspondre à plusieurs géométries. Ces considérations sont à la base des distinctions qui sont souvent faites entre différents types de maillages, auxquelles cette partie est consacrée. En particulier, la notion de maillage non-structuré, objet central des parties suivantes (parties II et III), y est introduite.

1.2.1 Distinction topologique : maillages structurés et non-structurés

Qu'est-ce que la structure d'un maillage ?

Définitions

La distinction entre maillages structurés et non-structurés se base uniquement sur des critères topologiques. Une première définition consiste à dire que les voisins d'un nœud d'un maillage structuré s'obtiennent très facilement grâce à de simples transformations (comme des additions par exemple), et que ce n'est pas le cas pour les nœuds d'un maillage non-structuré. Ceci se formule également de la manière suivante : si à chaque nœud d'un maillage structuré sont associés les n indices $(u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$, alors les m voisins d'un nœud sont les nœuds d'indices $(u_0 + v_0^i, u_1 + v_1^i, \dots, u_{n-1} + v_{n-1}^i)$, où les $\{v_0^i, v_1^i, \dots, v_{n-1}^i\}$ sont m ensembles de n entiers, identiques pour chaque nœud du maillage et caractéristiques d'un schéma topologique élémentaire se répétant dans tout le maillage (voir figure 1.9). Ainsi, il n'est pas nécessaire de stocker la topologie d'un maillage structuré, elle est en quelque sorte *implicite*.

Les données topologiques d'un maillage non-structuré, quant à elles, doivent impérativement être stockées en permanence : chaque nœud connaît *explicitement* la liste de ses voisins. Une conséquence directe de ces définitions est que le coût mémoire impliqué par l'utilisation d'un maillage non-structuré peut devenir rapidement très pénalisant. En revanche, l'espace mémoire nécessaire à la représentation informatique d'un maillage structuré est pratiquement nul.

Discussion

Ces définitions ne discriminent toutefois que les *vrais* maillages structurés et les *vrais* maillages non-structurés. En effet, certains maillages, que nous qualifierons de *semi-structurés*, échappent à cette dichotomie. Comme les maillages structurés, ces maillages présentent un schéma topologique élémentaire, ce qui évite un stockage de tous les nœuds et de leur connectivité ; cependant, ce schéma n'a pas de structure et nécessite à lui seul un stockage de type non-structuré, comme le montre la figure 1.9. Le coût mémoire de tels maillages

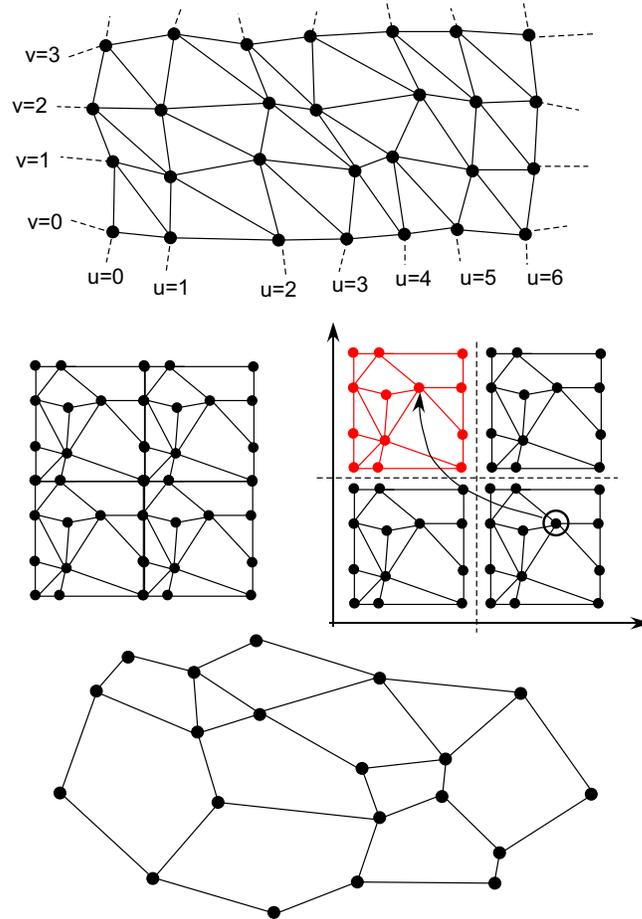


Figure 1.9 Représentations schématiques de la structure d'un maillage (cas bidimensionnel). En haut : un maillage structuré à base de triangles. Un nœud d'indices (u, v) a pour voisins les nœuds d'indices $(u - 1, v)$, $(u, v - 1)$, $(u + 1, v)$, $(u, v + 1)$, $(u - 1, v + 1)$ et $(u + 1, v - 1)$. Au milieu : un maillage semi-structuré polygonal (à gauche). Les voisins de chaque nœud s'obtiennent au travers de leur homologue dans le schéma topologique élémentaire (en rouge, à droite). En bas : un maillage non-structuré polygonal.

n'est donc ni nul, ni maximal.

À côté des considérations liées à l'espace mémoire nécessaire au stockage de la topologie, les avantages et inconvénients de la structure d'un maillage seront abordés en détail dans les chapitres suivants, au regard des applications auxquelles il se destine. Précisons seulement pour l'instant que d'une manière générale, les maillages non-structurés sont considérés comme beaucoup plus *flexibles* ([Verma 96], [Owen 98], [Fleischmann 99]).

Types des mailles et structure du maillage

Remarquons tout d'abord que tous les nœuds d'un maillage structuré au sens strict ont le même nombre de voisins. Cette condition est nécessaire mais néanmoins non suffisante : en effet, un maillage semi-structuré ou non-structuré peut très bien satisfaire cette pro-

priété. Par ailleurs, un maillage formé par des éléments de type variable (c'est-à-dire par des mailles dont le nombre de nœuds varie au sein du maillage), que nous qualifierons par la suite d'hétérogène ou d'*hybride*, n'est bien sûr jamais considéré comme véritablement structuré. Un maillage homogène, quant à lui, peut être aussi bien structuré, semi-structuré que non-structuré. Il apparaît donc que les types des mailles d'un maillage n'ont aucune conséquence sur sa structure.

Cependant, dans l'industrie, les formes les plus communes de maillages structurés sont celles à base de quadrilatères (mailles bidimensionnelles à quatre nœuds) et d'hexaèdres (mailles tridimensionnelles à huit nœuds), où tous les nœuds ont respectivement quatre et six voisins. L'utilisation de simplexes ou de polytopes quelconques comme éléments de base de ce type de maillage est quant à elle très rare, même si rien ne l'interdit. Ces mailles se rencontrent en revanche très fréquemment dans les maillages non-structurés, les maillages de simplexes en étant les représentants les plus répandus.

1.2.2 Distinction géométrique : maillages réguliers et irréguliers

Quelle modalité de stockage de la géométrie des nœuds ?

La régularité d'un maillage se définit exactement de la même manière que sa structure, en prenant cette fois-ci comme facteur discriminant la modalité de stockage de la géométrie des nœuds, c'est-à-dire leur position dans l'espace. Ainsi, dans un maillage *régulier*, la géométrie d'un nœud auquel ont été associés les n indices $(u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ s'obtient facilement par une simple formulation analytique faisant intervenir ces indices, et elle est alors qualifiée d'*implicite*. En revanche, pour un maillage *irrégulier*, la position des nœuds doit être stockée explicitement et en permanence. De même, il existe des maillages que nous qualifierons de *semi-réguliers*, pour lesquels le stockage de la géométrie est certes restreint, sans pour autant être inexistant (voir figure 1.10).

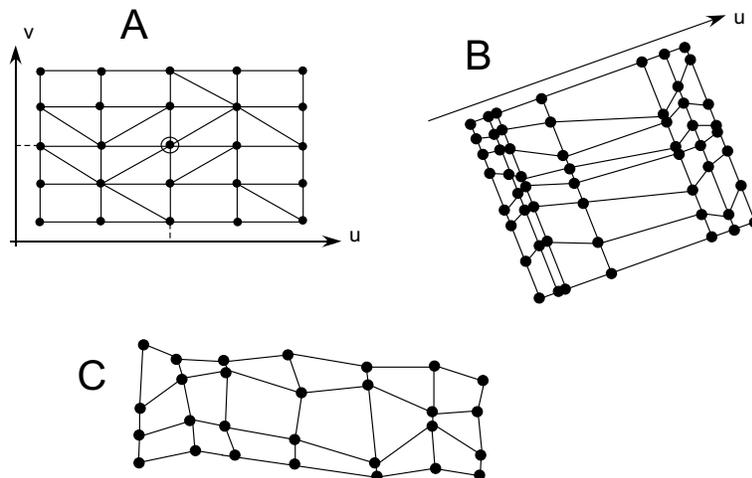


Figure 1.10 Représentations schématiques de la régularité d'un maillage. (A) : un maillage non-structuré régulier. (B) : un maillage structuré semi-régulier. (C) : un maillage structuré irrégulier.

En règle générale, le stockage de la géométrie d'un nœud est moins coûteux que celui de son voisinage. Les conséquences liées à l'encombrement mémoire d'un maillage irrégulier sont donc moins critiques que celles d'un maillage non-structuré. De plus, comme nous l'avons déjà dit, topologie et géométrie d'un maillage sont deux données parfaitement indépendantes : un maillage régulier, irrégulier ou semi-régulier peut donc être tour à tour structuré, non-structuré ou bien encore semi-structuré, la topologie étant conservée lors de modifications purement géométriques et réciproquement.

Avantages et inconvénients de la régularité

Optimisations

Un des avantages immédiats de la régularité d'un maillage réside bien sûr dans le faible encombrement mémoire induit par le stockage de la géométrie des nœuds. Ainsi, de nombreux algorithmes sont plus performants lorsqu'ils sont réalisés sur des maillages réguliers, car l'utilisation de systèmes de coordonnées appropriés permet des accès très rapides aux positions des nœuds dans l'espace, et simplifie souvent les calculs ([Palagi 91], [Heinemann 94]) : citons par exemple les algorithmes de rastérisations d'objets dans des maillages, les calculs d'intersections, ou encore de distances [Ledez 03].

Gestion des interfaces du domaine d'étude

Cependant, les maillages réguliers ne peuvent évidemment pas capturer toute la complexité du domaine d'étude Ω qu'ils modélisent, et à plus forte raison dans le domaine des géosciences, où il est important d'avoir une image correcte des interfaces du domaine. En effet, celles-ci ont en général une géométrie irrégulière, incompatible avec un maillage régulier. Pour cette raison, dans ce type de maillage, la représentation des interfaces du domaine par des faces de mailles implique souvent des approximations très grossières (discretisations dites *stair-stepped*), pénalisantes du point de vue de la précision des calculs.

Manque de flexibilité

Les maillages irréguliers et dans une moindre mesure les maillages semi-réguliers fournissent quant à eux des représentations plus précises de la géométrie du domaine maillé. Par ailleurs, ils sont mieux adaptés à la simulation de processus physiques car ils autorisent des variations de densités de nœuds au sein du maillage (indépendamment de sa structure), ce qui permet d'améliorer la précision des calculs dans les parties «exigeantes» du domaine. En revanche, dans un maillage régulier au sens strict, il est impossible d'augmenter localement la densité des nœuds sans que cela ne se répercute ailleurs dans le domaine [Shewchuk 97]. Pour un phénomène physique considéré, la densité des nœuds d'un maillage régulier est donc soit trop forte (la densité étant dictée par la partie la plus «exigeante» du domaine), ce qui augmente la précision mais risque de ralentir fortement les calculs, soit à l'inverse trop faible, ce qui dégrade la précision des résultats. Des solutions basées sur la juxtaposition de maillages réguliers de résolution variable sont alors adoptées en pratique (maillages dits hybrides, emboîtés, ou encore *structurés par blocs*).

1.3 Modèles de représentation de maillages

Cette partie présente quelques modèles informatiques de représentation de maillages, auxquels les parties suivantes de ce travail feront appel (parties II et III). Pour être véritablement complets, ces modèles doivent permettre d'accéder simplement aux relations topologiques intra- et inter-mailles, mais aussi à la position des nœuds dans l'espace. Par ailleurs, au-delà de la géométrie, il est souhaitable que de tels modèles offrent une gestion efficace des différentes propriétés susceptibles d'être attachées aux nœuds et autres faces des mailles, données indispensables à la modélisation des processus physiques à laquelle le maillage se destine. Bien entendu, ces modèles ne concernent ni les maillages structurés, pour lesquels il est inutile de stocker les informations topologiques, ni les maillages réguliers (propriétés exceptées), dont la géométrie des nœuds est implicite.

1.3.1 Modèles micro-topologiques pour les maillages non-structurés

Introduction

Différentes familles de modèles peuvent être utilisées pour représenter la topologie des complexes cellulaires. Dans le cas d'un maillage non-structuré, les contacts entre cellules doivent être décrits explicitement et surtout efficacement par des structures de données appropriées, car la rapidité d'accès à ces informations influence grandement le temps d'exécution de nombreux algorithmes, comme par exemple ceux d'édition de maillage, d'interpolation ou encore de visualisation ([Lévy 99], [Mallet 02], [Caumon 03-(1)]).

Comme nous l'avons vu au début de ce chapitre, les contacts entre les cellules d'un maillage se résument aux relations d'incidences (et d'adjacences, qui en découlent) qui existent entre elles. La variabilité des représentations informatiques de la topologie tient donc dans la forme que prend le codage des graphes d'incidence et d'adjacence associés au maillage. Trois types de modèles différents vont ainsi être présentés, et nous discuterons de leur applicabilité et de leur performance.

Quelques modèles topologiques

Les modèles de la famille dite B-Rep (Boundary Representation)

Dans cette famille de modèles, les cellules d'un complexe cellulaire C de dimension n sont représentées par une discrétisation de leurs bords, c'est-à-dire directement par les relations d'incidence qui existent entre elles. De tels modèles nécessitent une structure spécifique pour chacune des p -cellules ($0 \leq p \leq n$) de C . Un premier modèle possible consiste donc à stocker dans chaque p -cellule n_p pointeurs vers les $(p-1)$ -cellules qui lui sont incidentes ($1 \leq p \leq n$), et les relations topologiques entre cellules s'obtiennent alors de manière très simple. Cependant, une telle représentation n'est pas du tout optimale car ces accès sont très lents. En effet, si l'on souhaite retrouver toutes les q -cellules incidentes à une p -cellule donnée ($p+1 \leq q \leq n$), alors tout le graphe d'incidence du complexe cellulaire doit être

parcouru, ce qui n'est évidemment pas envisageable. Ce modèle doit donc être amélioré.

La représentation par *arêtes ailées* [Baumgart 75], introduite pour des complexes bidimensionnels ($n = 2$), propose ainsi de compléter les informations topologiques au niveau des 1-cellules en ajoutant des pointeurs vers les autres 1-cellules immédiatement adjacentes, et deux pointeurs vers les 2-cellules qui lui sont incidentes (ses ailes). Grâce à eux, il devient suffisant de stocker un seul pointeur vers une 1-cellule incidente par 2-cellule.

De ce modèle dérive la représentation par *demi-arêtes* [Weiler 85], reconnue comme plus générale et plus efficace (elle est d'ailleurs très largement utilisée), où chaque p -cellule du complexe ($1 \leq p \leq n - 1$) est représentée par deux p -demi-cellules *orientées*, chacune contenant un pointeur vers l'autre, comme le montre la figure 1.11. Sur cette base, une infinité de modèles topologiques peuvent être construits. En général, ils suivent les règles suivantes :

- Chaque $(n - 1)$ -demi-cellules stocke un pointeur vers une des deux uniques n -cellules incidentes à la $(n - 1)$ -cellule correspondante, et chaque $(n - 1)$ -demi-cellule est donc propre à une unique n -cellule. Chacune de ces dernières pointe alors sur toutes ses propres $(n - 1)$ -demi-cellules incidentes.
- Chaque 1-demi-cellule contient un pointeur vers une des deux uniques 0-cellules incidentes à la 1-cellule correspondante, et chaque 0-cellule contient une liste de pointeurs sur toutes les 1-demi-cellules qui pointent sur elle.

Les structures informatiques correspondantes proposées ci-dessous pour $n = 2$ (structures 1.6, 1.7 et 1.8, en pseudo-langage C) ne sont bien sûr qu'un exemple³, et selon le contexte d'utilisation du maillage et les algorithmes dont il sert de support, des pointeurs peuvent être ajoutés ou retirés dans un but d'optimisation (voir figure 1.11). Pour les mêmes raisons, lorsque ce modèle doit représenter les ordonnancements de certaines cellules autour de cellules de dimension inférieure (par exemple, un ensemble de 3-cellules partageant une 1-cellule en dimension 3), il est souhaitable que les listes de pointeurs correspondantes soient ordonnées de manière cohérente [Lévy 99].

```

        typedef struct Node {
List<Half_Edge*> incident_edges_;
        } Node;

```

(1.6)

```

        typedef struct Half_Edge {
        Node* incident_node_;
        Half_Edge* mate_half_edge_;
        Polygon* polygon_;
        } Half_Edge;

```

(1.7)

³Le modèle le plus connu de cette famille est le modèle DCEL (Doubly Connected Edge List) utilisé dans la librairie de géométrie algorithmique CGAL.

```

typedef struct Polygon {
    List<Half_Edge*> incident_edges_;
} Polygon;

```

(1.8)

Les modèles B-Rep se déclinent donc sous de nombreuses formes. Contrairement aux modèles topologiques présentés par la suite, ils nécessitent un grand nombre de structures pour représenter les cellules d'un maillage et définir leurs relations topologiques, ce qui les rend parfois lourds à mettre au point ou à utiliser. Ils souffrent également d'un manque de formalisme mathématique. Toutefois, ces modèles ont l'avantage d'occuper en général peu d'espace mémoire, et de pouvoir être facilement adaptés à des usages spécifiques des maillages qu'ils représentent.

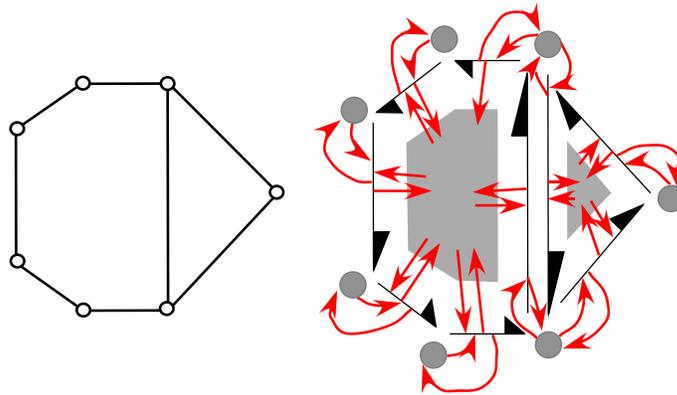


Figure 1.11 Représentation de la topologie d'un complexe cellulaire (à gauche) par un modèle des *demi-arêtes* (à droite). Les pointeurs sont en rouge. Chaque arête est représentée par deux demi-arêtes (voir structure 1.7). Chaque polygone connaît ses propres demi-arêtes (voir structure 1.8), et chaque nœud les demi-arêtes qui lui sont incidentes (voir structure 1.6).

Les G-Cartes (*Cartes Généralisées*)

Les G-Cartes ont été introduites par Lienhardt ([Lienhardt 89], [Lienhardt 94]) et Brisson [Brisson 89] sur une extension des travaux d'Edmonds concernant les *cartes combinatoires* [Edmonds 60]. L'originalité de cette représentation réside dans le fait qu'elle ne se focalise pas sur les relations d'incidences entre cellules mais plutôt sur les chemins du graphe d'incidence, qui sont dans ce contexte nommés *tuples* de cellules. Considérons un complexe cellulaire C de dimension n , et soit F_p une cellule de C de dimension p ($0 \leq p \leq n$). Un *tuple* \mathcal{C} est alors une séquence ordonnée de cellules $\{F_n, F_{n-1}, \dots, F_0\}$, où chacune des cellules est incidente à celle qui la suit ou la précède dans la séquence.

Les *tuples* de cellules associés au graphe d'incidence d'un complexe cellulaire sont liés par des relations d'adjacence ([Brisson 89], [Lévy 99]). En dimension n , deux *tuples* de cellules $\mathcal{C} = \{F_n, F_{n-1}, \dots, F_0\}$ et $\mathcal{C}' = \{F'_n, F'_{n-1}, \dots, F'_0\}$ sont dits i -adjacents ($0 \leq i \leq n$), ce que nous noterons $\mathcal{C} \mathcal{A}_i \mathcal{C}'$, s'ils vérifient la relation suivante (relation 1.9) :

$$\forall j \in [0, n], j \neq i, F_j = F'_j \quad (1.9)$$

Autrement dit, deux *tuples* de cellules sont i -adjacents si toutes leurs cellules sont identiques sauf une qui est de dimension i (voir figure 1.12). De plus, comme démontré dans [Brisson 89], un *tuple* de cellule est toujours i -adjacent à seulement 0 ou 1 autre *tuple* de cellule. Chaque relation d'adjacence \mathcal{A}_i partitionne donc l'ensemble des *tuples* de cellules d'un complexe cellulaire en sous-ensembles contenant soit un seul, soit deux *tuples* de cellules. Cette propriété suggère d'associer aux $n + 1$ relations d'adjacence \mathcal{A}_i des fonctions α_i qui permettent de mettre en correspondance chaque *tuple* de cellules avec un éventuel autre *tuple* de cellules qui lui est i -adjacent.

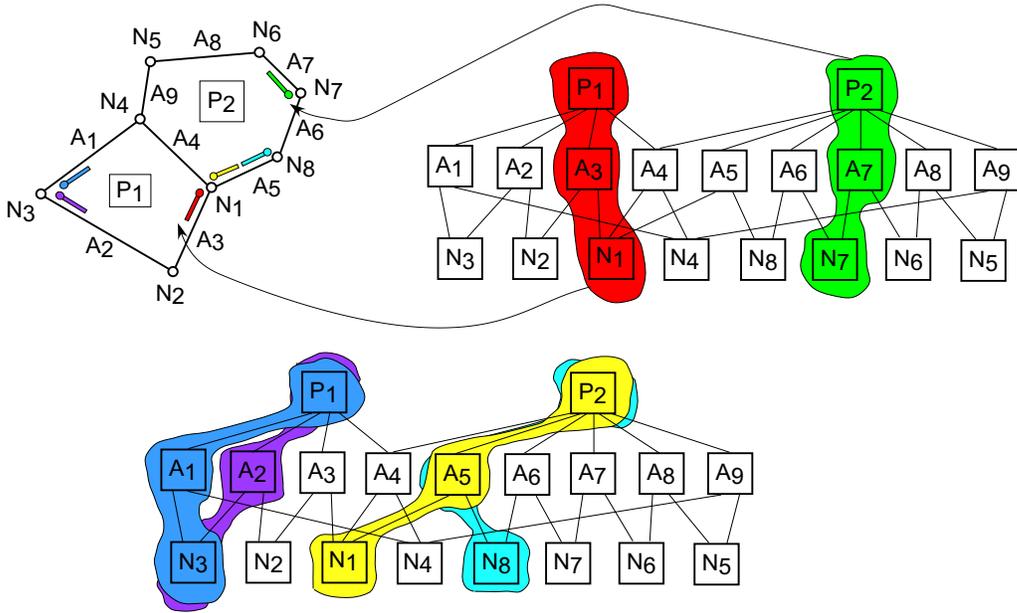


Figure 1.12 Exemple d'une 2-G-Card très simple. Chaque chemin du graphe d'incidence d'un complexe cellulaire, par exemple (P_1, A_3, N_1) , en rouge, et (P_2, A_7, N_7) , en vert, est associé à un élément topologique appelé *brin* (en haut). Les chemins (P_2, A_5, N_1) et (P_2, A_5, N_8) ne diffèrent que par une cellule de dimension 0 : ils sont donc 0-adjacents, et les *brins* qui leur correspondent sont liés par une fonction α_0 . Les chemins (P_1, A_1, N_3) et (P_1, A_2, N_3) ne diffèrent que par une cellule de dimension 1 : ils sont donc 1-adjacents, et les *brins* qui leur correspondent sont liés par une fonction α_1 (en bas).

Une G-Card de dimension n est donc définie par un nombre fini de *tuples* de cellules, appelés *brins* (ou encore *darts* dans la littérature de langue anglaise), et $n + 1$ fonctions α_i qui donnent accès aux relations d'adjacence entre brins. Ces fonctions sont clairement des involutions, c'est-à-dire que pour un brin quelconque d , $\alpha_i(\alpha_i(d)) = d$. Une contrainte s'ajoute sur ces fonctions (relation 1.10) :

$$\forall i \in [0, n], \forall j \in [i + 2, n], \alpha_i \circ \alpha_j \text{ est une involution} \quad (1.10)$$

Par ailleurs, rappelons qu'un brin équivaut à un chemin dans le graphe d'incidence du complexe cellulaire, et que chaque cellule du complexe correspond donc à plusieurs brins. Mais lesquels ? Étant donné que chaque fonction α_i est une adjacence de dimension i ($0 \leq i \leq n$), les brins d et $\alpha_i(d)$ ne diffèrent que par une seule cellule qui est de dimension i . Ainsi, en partant d'un brin donné d , il est possible de retrouver tous les brins correspondant à la même cellule de dimension i en parcourant récursivement depuis d toutes les involutions α_j , avec $j \neq i$ (la fonction α_i faisant changer de i -cellule). Ces types de parcours, très simples, donnent accès aux relations topologiques entre les cellules du maillage.

Comme nous pouvons le voir, le modèle topologique des G-Cartes ne fait pas appel à des structures spécifiques dédiées à la gestion des p -faces d'un maillage ($0 \leq p \leq n$). Toutes les informations sont définies dans les brins [Lévy 99]. Par exemple, chacune des p -faces (qui correspond donc à plusieurs brins) est représenté par un unique brin qui est marqué comme tel. Ainsi, en pratique, la construction d'une n -G-Carte nécessite de stocker au moins dans chaque brin :

- Un tableau de $n + 1$ brins voisins correspondant aux involutions α_i ($0 \leq i \leq n$).
- Un tableau de $n + 1$ booléens spécifiant si le brin est l'unique représentant de la i -cellule à laquelle il correspond ($0 \leq i \leq n$).

La structure suivante (structure 1.11) donne une idée de la forme que pourrait prendre la représentation informatique des brins dans un modèle de n -G-Carte. La variable `is_marked` n'est pas indispensable, mais permet de marquer temporairement un brin et ainsi d'éviter de le parcourir plusieurs fois inutilement.

```
typedef struct Brin {
    Brin* alpha_[n+1];
    bool is_key_dart_of_cell_[n+1];
    bool is_marked_;
} Brin; (1.11)
```

Pour conclure, il apparaît que les modèles des G-Cartes permettent de décrire toute la structure combinatoire d'un maillage de n'importe quelle dimension à l'aide d'un seul et unique élément topologique, le brin, et ceci à l'aide d'opérateurs mathématiques à la fois génériques et très simples. Ceci est incontestablement leur point fort. Cependant, ces modèles sont peu performants du point de vue de la rapidité d'accès aux relations topologiques entre cellules. De plus, l'espace mémoire nécessaire au stockage d'une G-Carte est en général entre 2 et 4 fois plus important que celui d'un modèle basé par exemple sur les demi-arêtes ([Lévy 99], [Grosse 03]). Ces deux derniers points peuvent s'avérer très pénalisants, et de fait, à tort ou à raison, ce modèle topologique reste peu utilisé dans l'industrie.

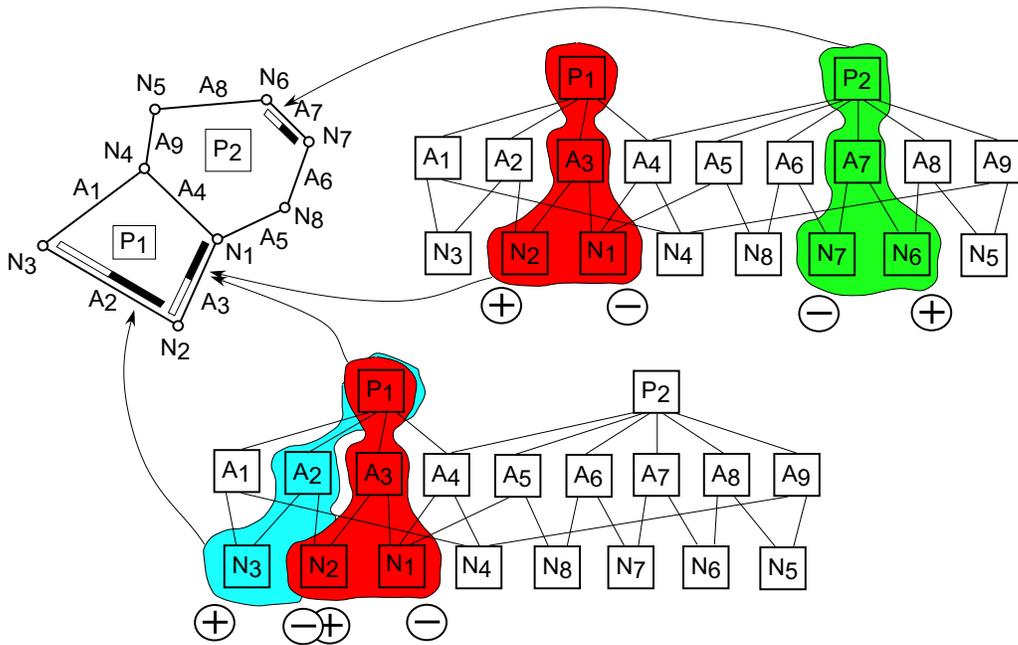


Figure 1.13 Exemple d'une 2-Carte très simple. Chaque paire de chemins du graphe d'incidence qui ne diffèrent que par une cellule de dimension 0, par exemple (P_1, A_3, N_2^+, N_1^-) , en rouge, ou (P_2, A_7, N_6^+, N_7^-) , en vert, est associée à un élément topologique appelé *aimant* (en haut). Les paires de chemins (P_1, A_3, N_2^+, N_1^-) et (P_1, A_2, N_3^+, N_2^-) diffèrent par une cellule de dimension 1 et partagent au moins une cellule de dimension 0 de polarité différente : ils sont donc 1-adjacents, et les aimants qui leur correspondent sont liés par une fonction β_1 .

Les Cartes

Comme son nom l'indique, une n -Carte est globalement proche d'une n -G-Carte, et elles sont d'ailleurs souvent présentées de manière classique comme une version plus *compacte* de ces dernières, ce que nous justifierons plus tard [Grosse 03]. Ici, nous nous proposons plutôt de définir une n -Carte à partir du graphe d'incidence d'un complexe cellulaire C de dimension n .

Soient F_p les cellules de C de dimension p ($0 \leq p \leq n$). Considérons deux chemins du graphe d'incidence $\mathcal{C} = \{F_n, F_{n-1}, \dots, F_0\}$ et $\mathcal{C}' = \{F'_n, F'_{n-1}, \dots, F'_0\}$, qui vérifient la relation suivante (relation 1.12) :

$$\forall j \in [1, n], F_j = F'_j \text{ et } F_0 \neq F'_0 \quad (1.12)$$

Ces deux chemins ne diffèrent donc que par une cellule de dimension 0⁴. Considérons l'union $\mathcal{M} = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ de ces deux chemins, que nous appellerons par la suite un *aimant* : \mathcal{M} possède deux 0-cellules différentes que nous noterons F_0^+ et F_0^- . Autrement dit, nous pouvons très bien définir l'aimant \mathcal{M} comme la séquence ordonnée $\{F_n, F_{n-1}, \dots, F_0^+, F_0^-\}$ de $n + 2$ cellules. La représentation des n -Cartes se focalise sur les relations qui existent

⁴Comme souligné dans [Lienhardt 91], il est tout à fait possible d'envisager des modèles de n -Cartes où les différences se font sur les cellules de dimension i ($0 \leq i \leq n$).

entre les aimants associés au complexe cellulaire (voir figure 1.13). En effet, il existe entre eux des relations d'adjacence ([Lienhardt 91], [Lévy 01]). En dimension n , deux aimants $\mathcal{M} = \{F_n, F_{n-1}, \dots, F_0^+, F_0^-\}$ et $\mathcal{M}' = \{F'_n, F'_{n-1}, \dots, F'_0^+, F'_0^-\}$ sont dits i -adjacents ($1 \leq i \leq n$), ce que nous noterons $\mathcal{M} \mathcal{B}_i \mathcal{M}'$, s'ils vérifient les conditions suivantes (relation 1.13) :

$$\begin{aligned} \forall j \in [1, n], j \neq i, F_j = F'_j \text{ et } F_i \neq F'_i \\ F_0^+ = F'_0^- \text{ (et } F_0^- = F'_0^+ \text{ si } i > 1) \end{aligned} \quad (1.13)$$

La deuxième condition énoncée dans la relation d'adjacence ci-dessus justifie le choix du terme *aimant*, car lorsque deux aimants ont une cellule de dimension 0 en commun, celle-ci a nécessairement une polarité différente dans les deux aimants. Lorsque cette condition est respectée, la polarisation des 0-cellules de tous les aimants associés à un complexe cellulaire se fait de manière unique et non-contradictoire (voir figure 1.13). Par ailleurs, il est possible de montrer que chaque relation d'adjacence \mathcal{B}_i ($1 \leq i \leq n$) partitionne l'ensemble des aimants en sous-ensembles contenant soit un seul, soit deux aimants. Ainsi, nous pouvons définir un ensemble de n fonctions β_i associant chaque aimant avec un éventuel autre aimant qui lui est i -adjacent.

Une n -Carte est donc définie par un ensemble d'aimants et n fonctions qui donnent accès aux relations d'adjacence entre aimants. Cette définition est tout à fait similaire à celle d'une n -G-Carte, et toutes les β_i sont également des involutions (c'est-à-dire que pour un aimant m , $\beta_i(\beta_i(m)) = m \forall i \in [2, n]$), sauf β_1 , car comme le suggère la relation 1.13, $\mathcal{M} \mathcal{B}_1 \mathcal{M}'$ n'implique pas $\mathcal{M}' \mathcal{B}_1 \mathcal{M}$. Par ailleurs, la contrainte suivante [Mallet 02] s'ajoute sur ces fonctions (relation 1.14) :

$$\forall i \in [1, n], \forall j \in [i + 2, n], \beta_j \circ \beta_i \text{ est une involution} \quad (1.14)$$

Rappelons qu'un aimant m d'une n -Carte correspond à $n - 1$ cellules de dimension i ($1 \leq i \leq n$) et deux cellules de dimension 0. Cependant, il est possible d'obtenir tous les aimants associés à la même cellule de dimension i ($0 \leq i \leq n$) grâce à des appels récursifs des fonctions β_j . En effet, les aimants m et $\beta_j(m)$ ($1 \leq j \leq n$) ont au moins une i -cellule en commun, sauf en dimension j où ils ne partagent aucune cellule. Nous pouvons donc considérer que la fonction β_j fait changer de j -cellule. À partir d'un aimant m donné, le parcours récursif de toutes les β_j ($1 \leq j \leq n$), avec $j \neq i$, donne donc accès à tous les aimants contenant la même i -cellule du complexe cellulaire. Ce parcours doit éventuellement tenir compte du fait que la fonction β_1 n'est pas une involution.

Ainsi, avec un tel modèle topologique, toutes les relations entre les p -cellules ($0 \leq p \leq n$) d'un complexe cellulaire de dimension n s'obtiennent à partir de très simples parcours d'aimants faisant intervenir n fonctions de base. Cependant, chaque cellule étant contenue dans plusieurs aimants, il est nécessaire pour plus d'efficacité de marquer l'un d'eux comme son unique représentant. En pratique, la construction d'une n -Carte demande alors de stocker au moins dans chaque aimant :

- Un tableau de n aimants voisins correspondant aux fonctions β_i ($1 \leq i \leq n$).

- Un tableau de $n + 1$ booléens spécifiant si l'aimant est l'unique représentant de la i -cellule à laquelle il correspond ($0 \leq i \leq n$). Toutefois, un aimant ne peut être associé à une unique 0-cellule. Afin de lever toute ambiguïté, nous pouvons donc poser que les 0-cellules sont représentées par des aimants qui contiennent certes ces cellules, mais avec une polarité donnée (+ ou -).

Nous pouvons donc proposer la structure suivante pour représenter les aimants d'une n -Carte (structure 1.15). Comme nous pouvons le constater, elle est très similaire à celle associée précédemment aux brins d'une n -G-Carte (structure 1.11), la seule différence étant la dimension du tableau stockant les éléments voisins.

```
typedef struct Aimant {
    Aimant* beta_[n];
    bool is_key_magnet_of_cell_[n+1];
    bool is_marked_;
} Aimant; (1.15)
```

En conclusion, même si les représentations basées sur les n -G-Cartes et les n -Cartes sont très proches, cette dernière apparaît toutefois comme plus optimale. Tout d'abord, elle est plus économique du point de vue stockage de données [Grosse 03]. En effet, un *brin* possède $n + 1$ voisins et un *aimant* seulement n , ce qui induit un gain d'un pointeur par élément topologique élémentaire. De plus, un même complexe cellulaire est représenté par deux fois plus de *brins* que d'*aimants*, ce qui rend les n -Cartes moins consommatrices en mémoire. Un autre point de divergence est l'accès aux relations topologiques entre cellules : il est incontestablement plus rapide dans une n -Carte, du fait qu'il ne fasse intervenir que n fonctions de base, une n -G-Carte en nécessitant quant à elle $n + 1$.

1.3.2 Gestion du plongement des cellules

Problématique

Le plongement d'une p -cellule d'un complexe cellulaire de dimension n ($0 \leq p \leq n$) est un terme général désignant toutes les informations non-topologiques susceptibles d'être attachées à la cellule. En pratique, cela recouvre souvent la géométrie des nœuds du maillage et les différentes propriétés définies sur ses cellules. Comme la topologie, le plongement est pris en charge par le modèle de représentation du maillage et doit être performant, tant du point de vue de l'encombrement mémoire, de la rapidité d'accès aux informations ou encore des possibilités d'édition.

La gestion de la géométrie et des propriétés est évidemment très dépendante du modèle micro-topologique utilisé. En effet, ces informations doivent être attachées aux cellules (voir figure 1.14), et il faut donc dans un premier temps pouvoir identifier clairement chacune d'entre elles, de manière non-ambiguë. Ainsi, lorsqu'il existe des structures topologiques spécifiques pour chaque dimension de cellule (comme c'est le cas pour les

modèles B-Rep), celles-ci sont facilement identifiées par un pointeur sur une de ces structures ; en revanche, lorsqu'une seule et même structure gère les cellules de dimension allant de 0 jusqu'à n (pour une n -Carte ou une n -G-Carte par exemple), l'identification est alors faite par un unique pointeur sur cette structure, et plusieurs cellules de dimension différente peuvent alors très bien être représentées par un pointeur vers la même structure, ainsi responsable du plongement de plusieurs cellules.

Une autre difficulté tient dans la variabilité de la nature du plongement. En effet, comme nous le verrons dans le chapitre suivant de cette partie (chapitre 2), en géosciences, la simulation de processus physiques sur des maillages fait souvent intervenir des grandeurs de type variable. Citons par exemple les entiers, les réels en simple ou double précision, ou encore les chaînes de caractères (comme des noms de faciès ou d'étage stratigraphique). Toutes ces propriétés ont par ailleurs éventuellement des dimensions différentes, ce qui signifie qu'elles peuvent être définies sur plusieurs *champs*. Nous parlerons alors de propriétés *scalaires* ou *vectorielles*, selon qu'elles en possèdent respectivement un ou plusieurs. Le modèle de gestion du plongement doit donc pouvoir intégrer de manière efficace cette variabilité.

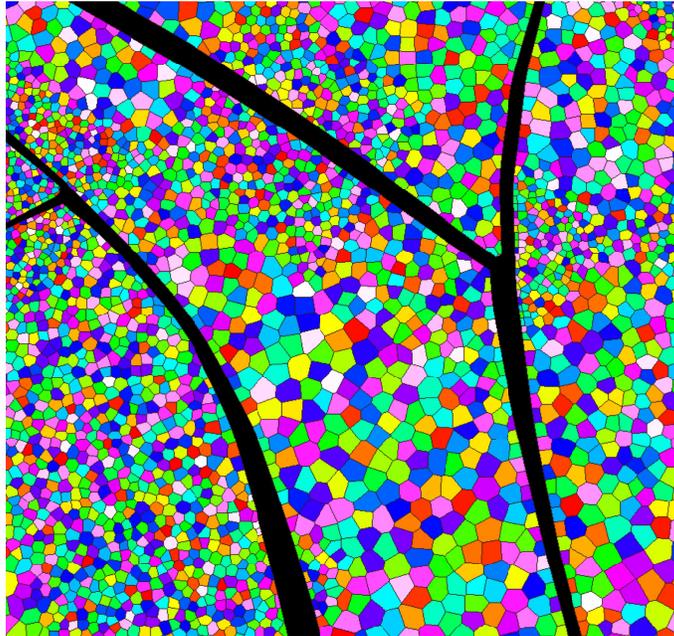


Figure 1.14 Un exemple de propriété *scalaire* définie sur les *polygones* d'un maillage bidimensionnel (les valeurs de la propriété sont aléatoires).

Voyons maintenant deux manières bien distinctes de gérer le plongement et de l'intégrer au modèle micro-topologique du complexe. Par la suite, nous désignerons par **Plongement** la structure informatique élémentaire responsable de la gestion du plongement d'une p -cellule d'un complexe cellulaire de dimension n ($0 \leq p \leq n$). Nous pouvons d'ores et déjà définir une propriété de type générique `Data` par la structure `Property` suivante (structure 1.16) :

```

typedef struct Property {
    CopyCString name_;
    int nb_champs_;
    Data no_data_value_;
} Property;

```

(1.16)

Gestion internalisée du plongement

Exposé de la méthode

Cette modalité de gestion consiste simplement à stocker toutes les informations de plongement propres à une cellule donnée au sein même de la structure micro-topologique désignant la cellule. Considérons une p -cellule F_p du complexe où ont été définies un ensemble de n_p (noté plus tard `nb_properties`) propriétés $\{P_0, P_1, \dots, P_{n_p-1}\}$, la propriété P_i possédant n_{P_i} champs de type générique `Data`. Le nombre total de valeurs à stocker dans la cellule, que nous noterons `size`, vaut donc (équation 1.17) :

$$\text{size} = \sum_{i=0}^{i=n_p-1} n_{P_i} \quad (1.17)$$

Le plongement prends alors la forme d'un tableau dynamique uni-ligne dont le nombre de colonnes est égal à `size`, ou mieux d'une liste chaînée de tableaux uni-lignes (un par propriété), stocké(e) directement dans la structure représentant F_p . Comme nous l'avons déjà évoqué plusieurs fois, cette structure est certes unique, mais peut cependant représenter de 0 à n cellules différentes selon le modèle topologique utilisé. Ainsi, les *aimants* des n -Cartes et les *brins* des n -G-Cartes peuvent tout à fait être responsables du plongement de n -cellules de dimensions différentes. En revanche, dans les modèles B-Rep, chaque structure topologique ne représente qu'une seule et unique cellule du complexe. Par conséquent, les structures de plongement seront différentes (structures 1.18, 1.19 et 1.20) :

```

typedef struct Plongement_Cell {
    int cell_dim_;
    int nb_properties_;
    List<Property*> property_defs_[nb_properties_];
    List<Data*> property_values_[nb_properties_];
} Plongement_Cell;

```

(1.18)

```

typedef Plongement_Cell* Plongement_B-Rep;

```

(1.19)

```

typedef Plongement_Cell*[n+1] Plongement_Brin-Aimant;

```

(1.20)

La structure 1.18 est propre à une unique cellule du complexe, elle est donc partagée par toutes les structures topologiques représentant cette cellule (par exemple plusieurs *aimants* ou *brins* dans les modèles des Cartes et des G-Cartes, ou alors deux *demi-cellules* d'un modèle B-Rep). Les valeurs des propriétés y sont stockées dans la liste `property_values_`, où l'élément i est un tableau de `Data` correspondant aux champs de la propriété d'indice i définie dans la variable `property_defs_`.

Finalement, l'intégration des structures 1.19 et 1.20 au sein de leur modèle micro-topologique respectif (voir par exemple les structures 1.6, 1.7, 1.8, 1.11 et 1.15 décrites précédemment) permet de créer, de supprimer, d'éditer des propriétés, ou bien d'accéder à leurs valeurs au sein du maillage. Les variables de type `Property` sont également partagées par plusieurs cellules, il est donc souhaitable de stocker également une liste active de toutes les propriétés supportées dans le maillage.

Avantages et inconvénients de la méthode

Tout d'abord, notons que la gestion du plongement est plus économique en terme d'occupation mémoire pour les modèles de type B-Rep, et ce quelle que soit la dimension du maillage. En effet, dans les modèles des n -Cartes ou des n -G-Cartes, elle nécessite le stockage de $n + 1$ informations de plongement par structure topologique élémentaire (structure 1.20), alors qu'une seule suffit dans les modèles B-Rep (structure 1.19).

Du fait de l'utilisation de listes chaînées pour représenter les variables `property_defs_` et `property_values_` (structure 1.18), l'obtention ou l'édition des valeurs d'une propriété dans une cellule donnée sont relativement rapides, un parcours de la variable `property_defs_` permettant de trouver l'endroit où sont stockées les valeurs de propriétés dans la variable `property_values_`. Toutefois, de cellule à cellule, une propriété donnée et ses valeurs ne sont pas nécessairement stockées au mêmes endroits dans ces variables. Ceci peut ralentir de manière conséquente les accès aux informations de plongement.

En effet, cette modalité de gestion autorise la création ou la suppression de propriétés sur un nombre limité de cellules : autrement dit, toutes les p -cellules du maillage ($0 \leq p \leq n$) ne supportent pas forcément toutes les mêmes propriétés. Quoique relativement peu performante, elle est donc de ce point de vue très flexible. Un autre point positif concerne le coût de la mise à jour des informations de plongement lors de la création ou la suppression de cellules dans le maillage, puisqu'il est nul, chaque cellule gérant son plongement indépendamment des autres.

Gestion externalisée du plongement

Principe général

Avec ce mode de gestion, les informations relatives au plongement des cellules ne sont plus stockées au sein des structures qui les représentent, comme nous l'avons vu auparavant, mais dans une structure globale spécialement dédiée aux propriétés. Pour cela, à chaque cellule du maillage est d'abord associé un identifiant unique (par exemple un `long`, noté

plus tard `cell_id_`). Nous pouvons alors imaginer le plongement comme un tableau dynamique à deux dimensions dont chaque ligne se rapporte à une cellule et chaque colonne représente les valeurs d'un champ d'une propriété [Grosse 03].

Concrètement, les structures 1.19 et 1.20 présentées précédemment restent valables, seule la structure 1.18 doit être modifiée comme suit (structure 1.21) :

```
typedef struct Plongement_Cell {
    int cell_dim_;
    long cell_id_;
} Plongement_Cell;          (1.21)
```

Pour des raisons évidentes, il est nécessaire de définir $n + 1$ tableaux de plongement, un par dimension de cellule. Sans cela, la création par exemple d'une nouvelle propriété sur l'ensemble des p -cellules ($0 \leq p \leq n$) uniquement impliquerait l'allocation de nouvelles colonnes pour les q -cellules ($q \neq p$), ce qui consommerait inutilement de la mémoire. En dimension p , supposons qu'un ensemble de n_p (noté plus tard `nb_properties`) propriétés $\{P_0, P_1, \dots, P_{n_p-1}\}$ ont été définies, la propriété P_i possédant n_{P_i} champs de type générique `Data`. En reprenant la définition de la variable `size` (équation 1.17), nous pouvons proposer la structure suivante pour gérer le plongement (structure 1.22) :

```
typedef struct Data_Matrix {
    int dim_;
    long nb_cells_;
    int nb_properties_;
    List<Property*> property_defs_[nb_properties_];
    Data** property_values_[nb_cells_][size];
} Data_Matrix;          (1.22)
```

Avec cette structure, l'accès aux valeurs des propriétés d'une cellule dont l'identifiant `cell_id_` est connu se fait de la manière suivante : si la propriété recherchée P_i est en position i ($0 \leq i \leq n_p - 1$) dans la liste `property_defs_`, le valeur du champ j ($0 \leq j \leq n_{P_i} - 1$) de cette propriété est alors égale à `property_values_[cell_id_][index]`, `index` étant donné par la relation suivante (équation 1.23) :

$$\text{index} = \left(\sum_{k=0}^{i-1} n_{P_k} \right) + j \quad (1.23)$$

Notons que la valeur de cet indice est constant pour toutes les cellules d'une dimension donnée, il ne peut donc être calculé qu'une seule fois lorsque les valeurs d'une même propriété doivent être obtenues sur plusieurs cellules, ce qui garantit des accès peu coûteux.

Discussion

Dans ce contexte, les informations de plongement stockées dans les cellules sont évidemment négligeables (structure 1.21). Globalement, ce mode de gestion est d'ailleurs moins consommateur en mémoire que celui présenté précédemment. En effet, la liste de propriétés définies sur les cellules (variable `property_defs_` des structures 1.22 et 1.18) n'y est stockée qu'une seule fois. De plus, nous l'avons vu, les accès aux valeurs de propriétés `y` sont moins coûteux. Indéniablement, ce mode de gestion est donc beaucoup plus performant.

Cependant, il est moins flexible, car il n'offre pas la possibilité de définir des propriétés différentes sur des cellules de même dimension (autrement dit, lorsqu'une propriété est créée en dimension p , elle l'est pour toutes les p -cellules du maillage). Un autre inconvénient réside dans le coût engendré par la création ou la suppression d'une propriété ou d'une cellule dans le maillage. En effet, ceci revient à ajouter ou supprimer respectivement des colonnes ou des lignes au tableau `property_values_` (structure 1.22), même si des méthodes spécifiques peuvent rendre ces opérations moins lourdes [Grosse 03].

En pratique, il est possible de concevoir une approche mixte, consistant à internaliser la gestion d'un nombre limité de propriétés et à externaliser celle des autres. La géométrie des nœuds du maillage, par exemple, est très souvent internalisée. Il faut alors mettre au point des structures spécifiques dérivant de la structure 1.21 (structure 1.24) :

```
typedef struct Plongement_Node : PlongementCell {
    Data geometry_x_;
    Data geometry_y_;
    Data geometry_z_;
} Plongement_Node;           (1.24)
```

Cette structure garantit des accès très rapides : en effet, lorsqu'une seule propriété est internalisée et définie sur toutes les cellules d'une dimension donnée, ses valeurs s'obtiennent directement à la lecture du plongement, sans recours à des tableaux (structure 1.22) ou à des listes chaînées (structure 1.18).

1.4 Perspectives

Dans ce chapitre, nous avons introduit la notion de maillage, objet central de notre travail, et plusieurs moyens informatiques permettant de représenter à la fois ses propriétés (comme la position de ses nœuds dans l'espace) et sa topologie (connexions entre ses cellules). Concrètement, ces modèles seront utilisés dans les parties suivantes de ce travail :

- Des modèles de type B-Rep serviront de support à la génération et à l'utilisation de maillages non-structurés simpliciaux bi- et tridimensionnels pour représenter divers objets du sous-sol (voir parties II et III).

- Un modèle de n -Carte (à la réalisation duquel nous avons participé, présenté dans [Grosse 03]) constituera la base d’algorithmes de génération de maillages hybrides tridimensionnels dédiés aux simulations d’écoulement dans les réservoirs d’hydrocarbures (voir partie III). Cette représentation a été préférée à celle des n -G-Cartes pour les raisons de coût mémoire expliquées précédemment.

Qu’ils soient structurés ou non-structurés, réguliers ou irréguliers, le chapitre suivant de cette partie (chapitre 2) s’attache à replacer ces objets dans un contexte d’utilisation en géosciences, où ils jouent un rôle de premier ordre en tant qu’outils. Il y sera mis en évidence l’intérêt que présente une gestion efficace du plongement des cellules et de la combinatoire de leurs faces. En effet, en pratique, le choix de tel ou tel type de maillage ou de son modèle de représentation doit être gouverné par l’application à laquelle il se destine.

Enjeux et principes de la modélisation des processus physiques

Ce chapitre de synthèse dégage la place et l'importance de l'utilisation de maillages dans les procédés classiques de modélisation en géosciences. Les bénéfices ou les inconvénients qui en découlent sont discutés à l'aide de plusieurs exemples, qui présentent à la fois les processus physiques impliqués et les principaux outils permettant de les modéliser.

2.1 Les équations aux dérivées partielles en géosciences

Cette partie vise à montrer que de nombreux problèmes classiques des géosciences peuvent être (et sont) systématiquement formulés à l'aide d'un type particulier d'équations, qui sont les équations aux dérivées partielles. Plusieurs exemples sont ainsi abordés, dans des domaines aussi divers que la géomécanique, la géophysique ou encore les simulations d'écoulement dans les réservoirs d'hydrocarbures. Toutefois, ces exemples ne sont volontairement que peu détaillés, et ne prétendent pas illustrer la réalité des processus physiques, qui dépasse le cadre de notre travail. En pratique, les phénomènes modélisés sont souvent plus complexes, et les équations mises en jeu le sont également.

2.1.1 Introduction

Une équation aux dérivées partielles (souvent abrégée EDP, ou PDE dans la littérature de langue anglaise) est une égalité faisant intervenir des fonctions et leurs dérivées partielles. Plusieurs méthodes existent pour résoudre analytiquement cette famille d'équations. Cependant, elles ne garantissent pas toujours de résultat, et des méthodes numériques, que nous décrirons dans la partie suivante de ce chapitre (partie 2.2), peuvent alors être employées pour en obtenir des solutions approchées.

En géosciences, les paramètres physiques étudiés dépendent presque toujours de plusieurs variables, ne serait-ce que de la position \mathbf{x} dans l'espace (ce qui fait n variables en dimension n) ou du temps t pour les phénomènes transitoires. La teneur en hydrocarbures au sein d'un réservoir géologique en exploitation, par exemple, est clairement fonction de l'espace et du temps.

2.1.2 Un exemple géomécanique : la déformation des couches du sous-sol

Enjeux de l'analyse des déformations

L'analyse du champ de déformation affectant une couche géologique au cours du temps donne des informations très précieuses. Par exemple, si un champ de contrainte en est déduit, il est possible de caractériser la fracturation du milieu, et donc de faire des corrélations avec les distributions de perméabilités. D'une manière générale, le calcul du champ de déformation permet de dégager des «attributs structuraux» plus ou moins liés aux propriétés pétrophysiques du milieu. Cette sous-partie montre comment il est possible, en fonction de certaines données, de calculer un tel champ grâce à des équations aux dérivées partielles.

Mise en équation du problème

En mécanique des milieux continus, le principe fondamental de la mécanique, pour un milieu parfaitement élastique, hétérogène et anisotrope, peut s'écrire de la manière suivante (équation 2.1) :

$$\nabla \cdot \underline{\sigma}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

où $\underline{\sigma}(\mathbf{x})$ est le tenseur des contraintes, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ les forces volumiques «stimulant» le milieu, $\rho(\mathbf{x})$ la densité et $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ le vecteur déplacement des particules du milieu au point \mathbf{x} et au temps t . Par ailleurs, si le milieu est considéré comme isotrope, et que la loi de Hook s'applique (ce qui revient à dire que la déformation est proportionnelle aux contraintes appliquées), la loi de comportement peut se formuler ainsi (équation 2.2) :

$$\underline{\sigma} = 2 \cdot \mu \cdot \underline{\varepsilon} + \lambda \cdot \text{Tr}(\underline{\varepsilon}) \cdot \underline{I} \quad (2.2)$$

avec $\underline{\varepsilon}$ le tenseur des déformations, \underline{I} le tenseur identité, λ et μ les coefficients de Lamé propres au milieu. La loi de comportement 2.2 peut aussi s'écrire (équation 2.3) :

$$\underline{\sigma} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\underline{\varepsilon} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \cdot \text{Tr}(\underline{\varepsilon}) \cdot \underline{I} \right) \quad (2.3)$$

E et ν étant respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du milieu considéré. Sous l'hypothèse des petites déformations, le tenseur des déformations $\underline{\varepsilon}$, quant à lui, peut être décrit à l'aide du vecteur déplacement \mathbf{u} par la formule suivante (équation 2.4) :

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \cdot (\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}) \quad (2.4)$$

En combinant les équations 2.3, 2.4, et 2.1, il est possible de déduire une équation aux dérivées partielles pour le déplacement \mathbf{u} (dite *équation de Navier*) ou pour le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$. Une autre approche, proposée dans [Massot 02], [Mallet 02] et [Muron 03], consiste à construire par interpolation un champ de déplacement contraint par des conditions aux limites, tel que la déformation induite soit minimale (équation 2.4). Il est de plus possible de prendre en compte la préservation de la masse des terrains. La figure 2.1 donne un exemple des champs de déplacement et de dilatation (un invariant du tenseur des déformations) obtenus par cette technique.

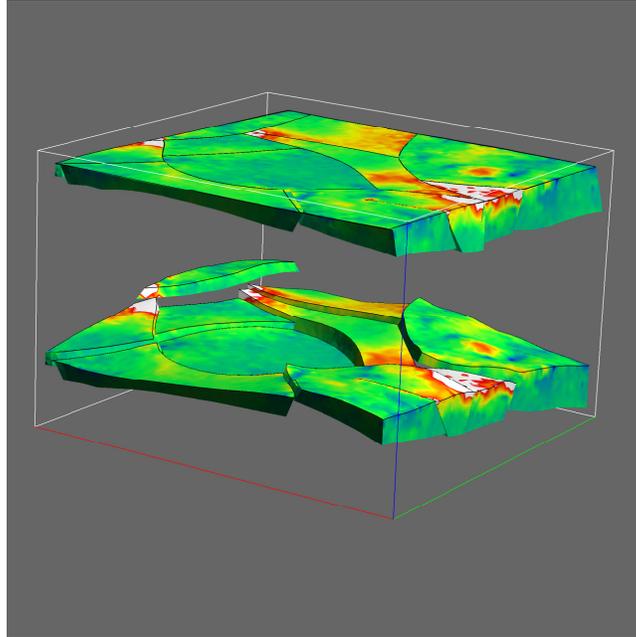


Figure 2.1 Dépliage d'une couche géologique (modèle TOTAL). Les déplacements ont été calculés de manière à minimiser la déformation et à ce que l'horizon du haut de la couche soit mis à plat (d'après [Muron 03]). La propriété affichée correspond à la dilatation (un invariant du tenseur des déformations).

Une fois le champ de déplacement \mathbf{u} connu, il est possible d'en déduire en tout point du domaine d'étude la valeur du tenseur des déformations $\underline{\varepsilon}$ (équation 2.4), puis du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ (équation 2.3). Des exemples de calculs de champs de déformation sur des volumes tétraédrisés seront donnés plus tard, dans la partie 6.3.

2.1.3 Une application en géophysique : le tracé de rayons sismiques

Présentation et énoncé du problème

Le tracé de rayons sismiques est une technique qui permet de simuler des événements sismiques dans un modèle donné de subsurface, ce qui peut tenir lieu, au regard d'une

comparaison avec les données sismiques réelles, d'un test de validité du modèle utilisé. Pour cela, il est entre autres nécessaire d'estimer, en tout point du sous-sol, et en fonction de certaines conditions initiales et de certains paramètres physiques comme la vitesse de propagation des signaux, le temps de trajet des ondes sismiques. Cette sous-partie donne le cadre théorique permettant de dégager une méthode pour évaluer ce dernier grâce à des équations aux dérivées partielles¹.

Théorie du tracé de rayons sismiques

Un milieu élastique soumis à des oscillations est parcouru par des ondes, ses particules oscillant autour de leur position initiale. Contrairement à ce qui se passe pour les fluides, le mouvement des particules (qui dépend de la position \mathbf{x} et du temps t) se fait non seulement dans la direction de propagation des ondes, mais aussi dans une direction transverse [Velten 98]. En décrivant les oscillations comme des vecteurs $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, il est possible, comme dans l'exemple précédent, d'appliquer le principe fondamental de la mécanique (équation 2.1), ainsi que d'écrire la loi de comportement du milieu (équation 2.2). Cependant, l'équation obtenue, qui correspond cette fois-ci aux ondes parcourant le milieu, n'a pas de solution simple, du fait de la prise en compte des termes transitoires. En pratique, pour la résoudre ([Velten 98], [Lambaré 02]), une approximation est faite sur le déplacement des particules $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ (équation 2.5) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot F(t - T(\mathbf{x})) \quad (2.5)$$

avec $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ le vecteur amplitude du déplacement des particules au point \mathbf{x} (qui est considéré comme constant au cours du temps), $F(t)$ la signature temporelle de l'onde, et $T(\mathbf{x})$ son temps de trajet (pour un temps t donné, la surface $T(\mathbf{x}) = \text{constante}$ correspond à un front d'onde). Cette approximation n'a pas de raison d'être valide pour un milieu hétérogène, mais reste tout a fait satisfaisante pour un milieu dont les paramètres élastiques sont homogènes sur une longueur d'onde significative du signal. Cette approximation porte ainsi le nom d'*approximation haute fréquence*, car pour des fréquences infinies, les fronts d'ondes sont plans, et les paramètres du milieu apparaissent localement comme homogènes [Lambaré 02]. En particulier, l'approximation haute fréquence implique que (équation 2.6) :

$$\frac{d^2 F(t)}{dt^2} \gg \frac{dF(t)}{dt} \gg F(t) \quad (2.6)$$

En conséquence, en insérant l'équation 2.5 dans l'équation 2.1, et en prenant en compte l'approximation haute fréquence (équation 2.6) et la loi de comportement du milieu (équation 2.2), une équation aux dérivées partielles pour $T(\mathbf{x})$, dite *équation eikonal* (du grec «image»), peut être déduite (équation 2.7) :

$$|\nabla T(\mathbf{x})| = \frac{1}{v(\mathbf{x})} \quad (2.7)$$

¹En fait, la technique présentée ne permet que d'estimer le premier temps d'arrivée des ondes. Dans la réalité, il faut pouvoir prendre en compte les phénomènes de temps d'arrivées multiples, et on utilise plutôt une technique de «front d'onde» [Lambaré 02].

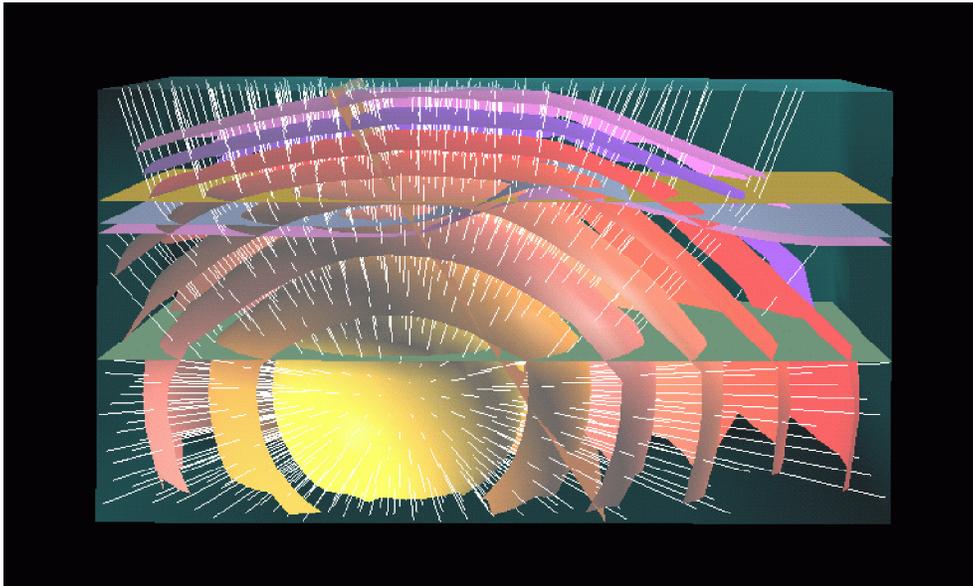


Figure 2.2 Un exemple de tracé de rayons sismiques (lignes blanches). Les horizons du modèle sont affichés, en même temps que les différents fronts d'onde (d'après [Velten 98]).

où $v(\mathbf{x})$ est la vitesse de propagation des ondes au point \mathbf{x} . Rappelons que cette équation n'est valable que pour un milieu supposé parfaitement élastique, isotrope, et pour des signaux de haute fréquence (afin que les paramètres du milieu puissent être considérés localement comme homogènes). De plus, l'équation eikonal (équation 2.7) est une équation aux dérivées partielles du premier ordre non-linéaire, assez difficile à résoudre telle quelle. En général, le problème est donc ramené à un système de deux équations aux dérivées partielles plus simples. Pour cela, chaque rayon sismique est représenté par sa trajectoire $\mathbf{x} = \mathbf{t}(s)$, s correspondant à l'abscisse curviligne le long du rayon. Étant donné que cette trajectoire est en tout point orthogonale aux fronts d'ondes, il est possible de définir un *vecteur lenteur* $\mathbf{p}(s)$, tangent au rayon, de la manière suivante (équation 2.8) :

$$\mathbf{p}(s) = \nabla T(\mathbf{t}(s)) = \frac{1}{v(\mathbf{x})} \cdot \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \quad (2.8)$$

En dérivant cette équation par rapport à s et en l'insérant dans l'équation eikonal (équation 2.7), on obtient alors une autre équation aux dérivées partielles, cette fois pour $\mathbf{p}(s)$ (équation 2.9) :

$$\frac{d\mathbf{p}(s)}{ds} = \frac{v(\mathbf{x})}{2} \cdot \nabla \left(\frac{1}{v(\mathbf{x})^2} \right) \quad (2.9)$$

L'équation 2.9 est une équation aux dérivées partielles ordinaire, là encore du premier ordre, mais cette fois-ci linéaire. Sa résolution ne nécessite que la connaissance préalable des conditions initiales, de la vitesse de propagation des ondes dans le milieu, ainsi que le calcul du gradient de la lenteur au carré. Finalement, une fois la fonction $\mathbf{p}(s)$ connue, les trajectoires des rayons sismiques $\mathbf{t}(s)$ peuvent facilement se calculer grâce à l'équation 2.8, ce qui résout le problème initial. La figure 2.2 en donne une illustration. En pratique,

le gradient de la lenteur est souvent choisi comme constant sur le domaine d'étude, et la trajectoire des rayons suit alors des paraboles quadratiques.

2.1.4 Les simulations d'écoulement dans les réservoirs pétroliers

Problématique

Avant ou pendant la mise en exploitation d'un gisement d'hydrocarbures, il est impératif de pouvoir simuler des profils de production de gaz ou de pétrole, afin de juger de sa rentabilité, de valider ou d'optimiser la position des puits assurant le fonctionnement de l'exploitation, ou bien encore d'estimer les répercussions d'une modification technique ou stratégique sur la production du gisement. Pour cela, des calculs de simulations d'écoulement sont effectués au sein du réservoir. Elles permettent de prédire, en fonction de la position des puits et de certaines caractéristiques pétrophysiques du milieu, comme la porosité ou la perméabilité, l'évolution au cours du temps des proportions d'eau, de gaz ou de pétrole dans le réservoir. Cette sous-partie récapitule brièvement le modèle théorique utilisé pour caractériser ces évolutions.

Modèle mathématique de la simulation d'écoulement

Soit V un volume de contrôle, de surface extérieure A . Le principe de conservation de la matière impose que le bilan de masse sur V soit nul ([Heinemann 94], [Verma 96], [Blunt 02]), autrement dit que globalement, le flux de masse à travers A soit égal à l'accumulation de masse à l'intérieur de V . Ainsi, pour un modèle à n_p phases et n_c composants², l'équation de conservation de la masse peut s'écrire pour chaque composant c (équation 2.10) :

$$-\oint_A \left(\sum_{p=0}^{p=n_p-1} M_c \cdot x_c^p \cdot D_p \cdot \mathbf{v}_p \right) \cdot \mathbf{n} \cdot dA = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \cdot \sum_{p=0}^{p=n_p-1} M_c \cdot x_c^p \cdot D_p \cdot S_p \right) \right] \cdot dV \quad (2.10)$$

où M_c représente la masse molaire du composant c , x_c^p la fraction massique du composant c dans la phase p , \mathbf{n} le vecteur normal sortant à la frontière A , \mathbf{v}_p la vitesse de Darcy de la phase p , S_p sa saturation, et enfin ϕ la porosité du milieu. La densité molaire spécifique D_p est définie comme suit (équation 2.11) :

$$D_p = \rho_p \cdot \frac{1}{\sum_{c=0}^{c=n_c-1} M_c \cdot x_c^p} \quad (2.11)$$

avec ρ_p la densité de la phase p . L'équation 2.10 suppose que la dispersion et la diffusion sont négligeables, et qu'il n'existe pas de réactions chimiques entre les composants. Par ailleurs, \mathbf{v}_p est donné par la loi de Darcy qui s'écrit (équation 2.12) :

$$\mathbf{v}_p = -\frac{k_{rp}}{\mu_p} \cdot \underline{k} \cdot \nabla \Phi_p = -\lambda_p \cdot \underline{k} \cdot \nabla \Phi_p \quad (2.12)$$

²Par exemple, un modèle possible pourrait concerner deux composants, huile et eau, et deux phases ($n_p = 2$). Si les deux phases sont considérées comme miscibles, il peut y avoir du composant «huile» dans la phase «eau» et du composant «eau» dans la phase «huile».

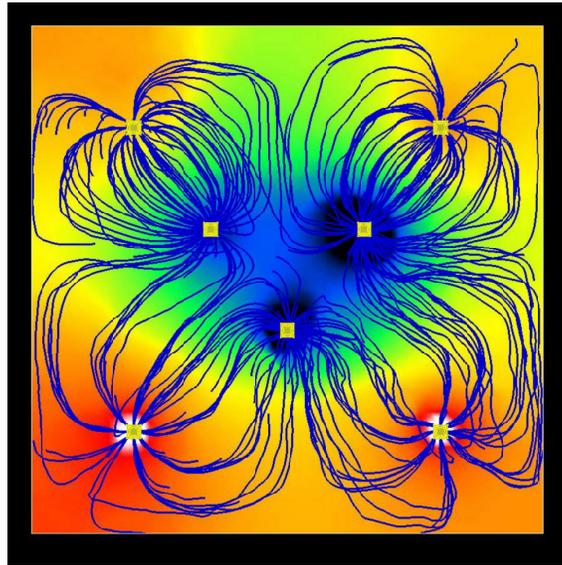


Figure 2.3 Exemple de simulation d'écoulement à une seule phase. La propriété affichée correspond au potentiel de la phase, et les lignes bleues aux *lignes de courant*, c'est-à-dire à la trajectoire des particules lors de la simulation (d'après [Voillemont 03]).

avec k_{rp} la perméabilité relative de la phase p , μ_p sa viscosité, \underline{k} le tenseur de perméabilité, Φ_p le *potentiel* de la phase p (sa pression), et λ_p sa *mobilité*. Le paramètre M_c peut être retiré des deux membres de l'équation 2.10, ce qui donne (équation 2.13) :

$$-\oint_A \left(\sum_{p=0}^{p=n_p-1} x_c^p \cdot D_p \cdot \mathbf{v}_p \right) \cdot \mathbf{n} \cdot dA = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \cdot \sum_{p=0}^{p=n_p-1} x_c^p \cdot D_p \cdot S_p \right) \right] \cdot dV \quad (2.13)$$

En insérant l'équation 2.12 dans l'équation 2.13, la nouvelle équation de conservation de la masse pour le composant c s'écrit (équation 2.14) :

$$\oint_A \left(\sum_{p=0}^{p=n_p-1} x_c^p \cdot D_p \cdot \lambda_p \cdot \underline{k} \cdot \nabla \Phi_p \right) \cdot \mathbf{n} \cdot dA = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \cdot \sum_{p=0}^{p=n_p-1} x_c^p \cdot D_p \cdot S_p \right) \right] \cdot dV \quad (2.14)$$

Le membre de gauche de l'équation 2.14, qui est un terme d'écoulement sur les frontières de V , peut facilement se transformer en une intégrale sur V grâce à l'application du théorème de la divergence. De plus, comme le volume V est arbitraire, l'égalité entre les deux intégrales sur V ainsi obtenues est équivalente à une égalité entre les intégrands, soit (équation 2.15) :

$$\nabla \cdot \left[\sum_{p=0}^{p=n_p-1} x_c^p \cdot D_p \cdot \lambda_p \cdot \underline{k} \cdot \nabla \Phi_p \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \cdot \sum_{p=0}^{p=n_p-1} x_c^p \cdot D_p \cdot S_p \right] \quad (2.15)$$

Dans l'équation 2.15, le membre de gauche est un terme d'écoulement, diffusif, faisant intervenir une première inconnue Φ_p (pression de la phase p), et le membre de droite est un terme transitoire (lié au temps), appelé terme d'accumulation, faisant intervenir une deuxième inconnue S_p (saturation de la phase p). Sa résolution nécessite la connaissance

des conditions initiales de pression et de saturation, de la porosité, et du tenseur de perméabilité sur le domaine d'étude (ce-dernier étant souvent considéré comme isotrope ou bien anisotrope mais symétrique). L'évolution en pression et en composition d'un réservoir d'hydrocarbures lors d'une simulation d'écoulement peut donc bien être décrite par des équations aux dérivées partielles. La construction de maillages spécialisés pour la résolution de ces équations sera l'objet du chapitre 7. La figure 2.3 donne un exemple de simulation d'écoulement.

2.2 Schémas numériques de résolution

La partie précédente (partie 2.1) a mis en évidence que les équations aux dérivées partielles servent à modéliser de nombreux phénomènes physiques en géosciences, comme la déformation des couches du sous-sol, la trajectoire des rayons sismiques (équations 2.9 et 2.8), ou bien l'évolution de la teneur en gaz ou en pétrole d'un réservoir géologique au cours de son exploitation (équation 2.15). La grande force de cette représentation est sa généralité. Cependant, compte tenu de la complexité des systèmes d'équations obtenus (complétés par les jeux de conditions initiales et aux limites du domaine d'étude), trouver une solution analytique au problème semble illusoire. Cette partie présente donc un ensemble de méthodes basées sur des maillages permettant d'obtenir une solution approchée d'une ou d'un système d'équations aux dérivées partielles. En fonction de leurs spécificités, nous nous attacherons à évaluer leur adéquation avec tel ou tel type de problème de modélisation. Leur but est de discrétiser les équations sur un maillage pour les transformer en un ensemble d'équations algébriques rassemblées dans un système linéaire, dont la résolution fournit une estimation de l'approximation de la solution au problème étudié.

D'une manière générale, soit $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ une fonction inconnue variant avec l'espace et/ou le temps (l'équation aux dérivées partielles faisant donc intervenir des termes dits *d'espace* et/ou d'autres dits *transitoires*), définie sur un domaine Ω partitionné en un ensemble fini de sous-domaines Ω_i , appelés *mailles*, connectant n points arbitraires de l'espace appelés *nœuds*. Toutes les techniques présentées consistent à approcher l'inconnue $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ par une variable $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ dont la valeur est calculée sur l'ensemble des nœuds de Ω . Ces valeurs seront donc les inconnues du problème.

2.2.1 Les différences finies

Exposé de la méthode

La méthode des différences finies repose sur l'approximation de la valeur d'un opérateur différentiel en un point (gradient, divergence, laplacien, ...) par une combinaison linéaire de la valeur du point et de celles de ses voisins, en utilisant des développements de Taylor. Par conséquent, la précision et la fiabilité de la solution obtenue est très sensible au voisinage utilisé (souvent dénommé *schéma de discrétisation*). Les différences finies semblent donc plus adaptées aux maillages structurés, de par la facilité d'accéder aux voisins d'un nœud. Quoiqu'il en soit, l'application de cette technique aux n nœuds du maillage permet

de construire n combinaisons linéaires des valeurs aux nœuds $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$. La discrétisation des termes d'espace peut donc se schématiser par l'expression³ (équation 2.16) :

$$[K_t].\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.16)$$

avec $[K_t]$ une matrice de dimensions (n, n) . L'équation 2.16 n'est qu'un schéma, car en réalité, la matrice $[K_t]$ est une somme de matrices, chacune correspondant à la discrétisation d'un terme d'espace de l'équation aux dérivées partielles considérée (terme diffusif, advectif, conditions aux limites...). L'équation 2.16 suffit à résoudre les problèmes stationnaires. Cependant, dans le cas de problèmes non-stationnaires, il faut ajouter une discrétisation des termes transitoires. Une technique parmi d'autres, dite *single-step*, consiste alors à prédire l'état du système au temps $t + \Delta t$ connaissant celui au temps t . Ainsi, un développement limité d'ordre 1 entre les temps t et $t + \Delta t$ donne (équation 2.17) :

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \approx \frac{\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} \quad (2.17)$$

Les termes d'espace sont ensuite évalués au temps $t + \theta.\Delta t$ (avec $\theta \in [0, 1]$), sous forme d'une moyenne pondérée. Par conséquent, en reprenant l'équation 2.16, leur discrétisation devient (équation 2.18) :

$$[K_{t+\theta.\Delta t}].\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t + \theta.\Delta t) = (1 - \theta).[K_t].\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \theta.[K_{t+\Delta t}].\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t + \Delta t) \quad (2.18)$$

Finalement, en combinant les discrétisations spatiales (équation 2.18) et transitoires (équation 2.17) conformément à l'équation aux dérivées partielles considérée, l'état du système au temps $t + \Delta t$ se trouve complètement déterminé par celui au temps t . En partant d'un état initial donné, il devient donc possible de suivre l'évolution de $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ au cours du temps.

Quelques critiques sur la méthode des différences finies

La méthode des différences finies apparaît comme une méthode simple et robuste, d'ailleurs très largement utilisée dans l'industrie. Pour des problèmes stationnaires, elle se réduit à l'inversion d'une matrice. Pour des problèmes transitoires, celle-ci doit être inversée sur une série de périodes de temps Δt choisies par l'utilisateur. Toutefois, cette méthode présente quelques inconvénients :

- Elle ne semble pas très appropriée dans un cadre d'utilisation de maillages non-structurés. En effet, les schémas de discrétisation utilisés sont dans ce cas beaucoup plus complexes, et la discrétisation des termes d'espace de l'équation aux dérivées partielles considérée génère alors des matrices $[K_t]$ quelconques, ce qui augmente la complexité des systèmes matriciels à résoudre (équations 2.16 ou 2.18).
- Par ailleurs, il existe des cas où la méthode des différences finies ne peut s'appliquer. Par exemple, dans le contexte d'une simulation d'écoulement, il est difficile de prendre en compte des tenseurs de perméabilité \underline{k} non-diagonaux (même s'ils peuvent

³Lorsque le problème est stationnaire, la variable t doit être ignorée, bien sûr.

être anisotropes), ce qui limite considérablement le champ d'application de la méthode [Verma 96].

- De plus, dans le cas de problèmes transitoires, la question du choix du pas de temps Δt et du poids θ se pose (équations 2.18 et 2.17). En effet, il faut éviter qu'entre les temps t et $t + \Delta t$, les valeurs de $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ varient trop [Ledez 03]. Il est donc préférable de choisir un pas de temps faible, mais cela ralentit bien sûr d'autant la convergence. Par ailleurs, plusieurs valeurs de θ sont couramment utilisées. Par exemple, $\theta = 0$ ou $\theta = 1$ (méthodes dites respectivement *explicite* et *implicite*) conduisent à des simplifications de l'équation 2.18. Une autre méthode, dite de *Crank-Nicholson*, utilise $\theta = 0.5$.

2.2.2 Les volumes finis

Présentation du schéma de résolution

Avec la méthode des volumes finis, l'équation aux dérivées partielles n'est plus discrétisée sur les nœuds du maillage, comme pour les différences finies, mais sur des polyèdres appelés *volumes de contrôle*, définis autour de ces derniers. L'ensemble des volumes de contrôle forme ainsi un maillage *dual* du maillage initial (que nous allons dénommer *primal*), comme défini dans la partie précédente de ce chapitre (partie 1.1). Les schémas de discrétisation sont très variables, et sont souvent gouvernés par le problème considéré [Verma 96]. Ainsi, certaines propriétés peuvent être choisies comme constantes sur les mailles du primal, d'autres sur ses nœuds, ou bien encore sur les frontières des volumes de contrôle.

Dans ce cadre, on exprime l'équation aux dérivées partielles sous une forme intégrale (comme par exemple dans l'équation 2.14). Soit $V(\mathbf{x}_i)$ le volume de contrôle centré sur le nœud du primal \mathbf{x}_i , et A sa frontière. Les termes intégraux d'espace sur A peuvent alors s'écrire sous la forme d'une somme des discrétisations de ces mêmes termes sur les n faces constituant la frontière⁴ de $V(\mathbf{x}_i)$. Si topologiquement, chacune de ces faces correspond à une connexion entre \mathbf{x}_i et un des ses n voisins \mathbf{x}_j , cela donne par exemple pour le calcul trivial d'un gradient représentant un flux au travers un volume de contrôle (équation 2.19) :

$$\left[\oint_A \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \cdot dA \right]_{V(\mathbf{x}_i)} \approx \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_j, t) - \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i, t)}{d_{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j}} \quad (2.19)$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal sortant à A , et $d_{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j}$ la distance entre les nœuds \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_j . Finalement, comme pour les différences finies, l'application de cette technique sur tous les volumes de contrôle permet de construire des combinaisons linéaires des valeurs aux nœuds $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$, schématisées par l'équation 2.16.

Pour les problèmes transitoires, la discrétisation s'opère entre les temps t et $t + \Delta t$, comme pour la méthode des différences finies. Les termes d'espace sont également évalués

⁴Pour un problème 2D, les volumes de contrôle sont des polygones dont les frontières sont des segments.

au temps $t + \theta.\Delta t$, et les termes transitoires sont approximés de la manière suivante (équation 2.20) :

$$\left[\int_V \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} . dV \right]_{V(\mathbf{x}_i)} \approx Vol(V(\mathbf{x}_i)) . \frac{(\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t))}{\Delta t} \quad (2.20)$$

avec $Vol(V(\mathbf{x}_i))$ le volume de $V(\mathbf{x}_i)$. La combinaison des discrétisations spatiales (équation 2.18) et transitoires (équation 2.20), conformément à l'équation aux dérivées partielles considérée, permet alors de connaître l'état du système au temps $t + \Delta t$ connaissant celui au temps t (des jeux de conditions initiales complètent le système).

Avantages et inconvénients de la méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis est beaucoup plus attractive que celle des différences finies, pour plusieurs raisons. Tout d'abord, la définition des volumes de contrôle se généralise sans problème à tous les types de maillage, qu'ils soient structurés, non-structurés ou semi-structurés, quels que soient les types de mailles utilisés ([Pedrosa 85], [Palagi 91], [Verma 96]), ce qui étend d'autant le champ d'application de la méthode. Par ailleurs, tout en restant relativement simple, les volumes finis s'interprètent comme l'explicitation directe du phénomène physique modélisé, directement retranscrit sur tous les volumes de contrôle du maillage (conservation de la masse, de l'énergie, principe fondamental de la mécanique, ...). De plus, la méthode offre une très grande flexibilité de gestion des propriétés, ce qui permet de définir de nombreux schémas de discrétisation. Par exemple, dans le cadre de simulations d'écoulement (à qui le chapitre 7 est entièrement consacré), les tenseurs de perméabilité \underline{k} peuvent être supposés uniformes sur une partie ou sur la totalité des mailles du primal, ce qui permet de prendre en compte des tenseurs complètement anisotropes et/ou asymétriques ([Heinemann 88], [Verma 96], [Edwards 98]).

Cependant, même si une grande liberté est permise quant à la définition géométrique des volumes de contrôle, ceux-ci doivent néanmoins satisfaire certaines contraintes (ne serait-ce qu'avoir un volume non-nul ! - équation 2.20), ce qui pose des problèmes au niveau de la construction même du maillage servant de support à la méthode, notamment :

- lorsque la forme des volumes de contrôle doit s'adapter à certaines conditions aux limites. Par exemple, pour des simulations d'écoulement (à qui la méthode des volumes finis est particulièrement bien adaptée), un maillage spécifique est nécessaire autour des puits ([Heinemann 94], [Verma 97], [Wolfsteiner 02]).
- lorsque la forme des volumes de contrôle doit simplifier la discrétisation de certains termes de l'équation aux dérivées partielles considérée. Ainsi, toujours dans le cadre de simulations d'écoulement, il est souhaitable que les faces de la frontière des volumes de contrôle soient orientées en accord avec les anisotropies de perméabilité ([Verma 96], [Gunasekera 97]).

2.2.3 Les éléments finis

Principe général de la démarche

La méthode des éléments finis repose sur l'association entre et les n nœuds du maillage \mathbf{x}_i et des fonctions d'interpolations géométriques $P_i(\mathbf{x})$, ou *fonctions de forme*, qui, sur chaque maille Ω_j , approximent $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ en espace par une fonction simple $\hat{\mathbf{u}}^{\Omega_j}(\mathbf{x}, t)$ dépendant de \mathbf{x} et des valeurs de $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ aux nœuds de la maille. Si Ω_j connecte n_j nœuds $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n_j-1}$, cette approximation s'écrit (équation 2.21) :

$$\hat{\mathbf{u}}^{\Omega_j}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=0}^{k=n_j-1} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_k, t) \cdot P_k(\mathbf{x}) \quad (2.21)$$

En général, les fonctions de forme $P_i(\mathbf{x})$ sont des polynômes dont le degré est choisi par l'utilisateur. Chercher une solution par éléments finis consiste donc en partie à déterminer quel fonction de forme il faut attribuer aux nœuds pour que la solution obtenue soit la plus précise possible, ce qui dépend aussi bien sûr du nombre, de la forme et de la topologie des mailles. Si $P_i(\mathbf{x})$ est nul partout dans le domaine considéré sauf dans les mailles qui contiennent le nœud \mathbf{x}_i , la relation 2.21 devient (équation 2.22) :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^{i=n} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i, t) \cdot P_i(\mathbf{x}) \quad (2.22)$$

La formulation 2.22 permet de discrétiser les opérateurs différentiels de l'équation aux dérivées partielles considérée. Par exemple, cela donne pour le calcul d'un trivial d'un gradient (équation 2.23) :

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=0}^{i=n} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i, t) \cdot \nabla P_i(\mathbf{x}) \quad (2.23)$$

Néanmoins, l'application de cette technique ne permet pas de connaître toutes les valeurs aux nœuds \mathbf{x}_i , car il faut autant d'équations que de nœuds dans le maillage. Pour cela, une formulation intégrale du système à résoudre (soit $L(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = 0$), dite *forme faible*, est construite (équation 2.24) :

$$L(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} L(\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)) \cdot w^{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \cdot d\Omega = 0 \quad (2.24)$$

où $w^{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ est une *fonction poids* en espace choisie par l'utilisateur (l'équation 2.24 est valable quelle que soit la fonction poids choisie). Comme une équation par nœud est nécessaire, il suffit de choisir autant de fonctions poids que de nœuds dans le maillage. La combinaison des discrétisations, conformément à l'équation aux dérivées partielles considérée, génère alors un système de n équations à n inconnues (les $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i, t + \Delta t)$) faisant intervenir les $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i, t)$. Des jeux de conditions initiales permettent de déterminer complètement le problème.

Ainsi, en combinant la discrétisation des termes d'espace de l'équation aux dérivées partielles, il est possible de construire une combinaison linéaire des inconnues $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i, t)$, ce qui peut se schématiser par l'équation suivante (équation 2.25) :

$$[K_t].[\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i, t)] = 0 \quad (2.25)$$

avec $[\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i, t)]$ une matrice de dimensions $(n, 1)$ regroupant les inconnues, et $[K_t]$ une matrice de dimensions (n, n) dont les termes dépendent du choix des fonctions de formes associées à chaque nœud du maillage. L'équation 2.25 n'est qu'un schéma, car en réalité, $[K_t]$ est une somme de matrices, chacune correspondant à la discrétisation d'un terme d'espace de l'équation aux dérivées partielles considérée (terme diffusif, advectif, ...). Dans le cas de problèmes transitoires, la discrétisation s'opère entre les temps t et $t + \Delta t$, comme pour la méthode des différences finies, et les termes d'espace sont également évalués au temps $t + \theta.\Delta t$ (équations 2.17 et 2.18).

Quelques commentaires sur la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode très flexible, car pour un même procédé de résolution, beaucoup de paramètres sont du ressort de l'utilisateur, comme le type de mailles utilisé, le choix des fonctions de formes associées aux nœuds ou des fonctions poids en espace. Le choix de ces paramètres influe grandement sur la précision du résultat :

- Intuitivement, plus le maillage est dense, plus le nombre de nœuds est grand et plus la solution obtenue est une bonne approximation, mais l'augmentation du volume de calculs qui en découle peut être pénalisante. De plus, la convergence vers la solution théorique est sensible au type de maille utilisé, et il s'avère parfois utile de varier les types d'éléments (utilisation de maillages hybrides). D'une manière générale, la méthode des éléments finis s'applique facilement aux maillages structurés et non-structurés (au contraire des différences finies), sans que son implémentation ni sa mise en œuvre ne soient grandement alourdies.
- L'augmentation du degré d'interpolation des fonctions de forme (polynômes de Lagrange, d'Hermite, de Tchebicheff, ...) pourrait être une solution pour améliorer la précision. Cependant, en pratique, des polynômes de degré inférieur à 3 ou 4 sont utilisés, car au-delà des problèmes d'instabilité apparaissent, rendant la méthode inutilisable.
- De nombreux choix sont possibles pour les fonctions poids en espace. Une méthode très répandue (méthode de *Galerkin*) consiste à prendre comme fonctions poids en espace les fonctions de forme, soit $w_i^{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P_i(\mathbf{x})$, mais il est aussi possible de prendre des *collocations par point* (dirac centrés aux nœuds) ou encore des *collocations par domaine* ($w_i^{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 1$ sur un domaine particulier du maillage, et $w_i^{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 0$ ailleurs).

Représentations cellulaires des objets géologiques

Suite aux deux premiers chapitres de cette partie, qui ont dans un premier temps présenté les maillages comme des modèles discrets du domaine d'étude (chapitre 1), puis comme des outils de modélisation adaptés à de nombreux problèmes des géosciences (chapitre 2), ce dernier chapitre les resitue dans le cadre de la modélisation des objets bi- et tridimensionnels du sous-sol. Dans un premier temps, des critères portant sur la validité des différentes représentations de ces objets géologiques sont dégagés. Ensuite, nous présentons une méthodologie pour mailler ou remailler ces objets qui satisfait effectivement ces critères, avant d'aborder finalement les aspects pratiques de sa réalisation.

3.1 Caractérisation des données disponibles

Les représentations des objets solides du sous-sol ne sont pas obligatoirement basées sur des maillages. Même s'il est possible de procéder directement à partir des points de données ([Nullans 98], [Hale 02]), elles sont en général précédées par la modélisation de leurs limites, hypothèse dans laquelle nous nous plaçons. Dans un espace tridimensionnel, la géométrie de ces objets bidimensionnels est alors décrite par des maillages¹, et les représentations des objets solides qui suivent doivent intégrer d'une manière ou d'une autre ces informations. Le but de cette partie est d'une part de préciser la nature géologique des objets modélisés, mais aussi de discuter de la validité des représentations attachées à ces objets.

¹Les formulations *implicites* [Ledez 03], sans maillage, sont une alternative intéressante.

3.1.1 Nature des données

Modèles surfaciques

La construction d'un modèle surfacique (appelé aussi *modèle structural*) est réalisée à partir de données discrètes, comme les images sismiques, les relevés de terrain, les diagraphies, ou encore les mesures gravimétriques. Ce modèle fournit avant tout une représentation discrète des objets du sous-sol de dimension p ($0 \leq p \leq 2$) et des limites du domaine d'étude, par l'intermédiaire de p -complexes cellulaires qui décrivent leur géométrie dans un espace de dimension 3. Dans la très grande majorité des cas, cela concerne essentiellement les horizons et les failles. Ces objets ainsi que leurs bords ont des topologies variables : ils peuvent par exemple être aussi bien ouverts que fermés.

L'établissement d'un tel modèle constitue une problématique de recherche à part entière ; les techniques qui s'y rapportent sont nombreuses [Duvina 00] et dépassent le cadre de ce travail. Par la suite, nous considérerons donc ces objets comme des données. En général, chaque surface géologique est construite indépendamment des autres : elle est constituée par des ensembles de lignes et de points, qui certes constituent ces bords, mais qui lui sont propres. En d'autres termes, aucune ligne ou point du modèle n'est alors commun à plusieurs surfaces.

Modèles volumiques

Notion de région

Les modèles volumiques s'attachent à la représentation des objets solides du sous-sol, ce qui implique nécessairement l'identification de volumes clos, qui seront par la suite dénommés *régions*. Plusieurs techniques existent pour construire de telles régions :

- la représentation dite *booléenne* (appelée aussi dans la littérature de langue anglaise *constructive solid geometry*), par exemple, définit les régions comme le résultat de l'union, de l'intersection ou d'autres combinaisons de primitives géométriques variées comme des parallélépipèdes, des sphères ou encore des cylindres. Cette technique n'est toutefois pas applicable aux objets naturels.
- les représentations *par frontières*, quant à elles, les définissent plutôt par leurs bords, qui sont les surfaces correspondant aux limites des objets géologiques modélisés (horizons, failles, toits ou murs d'intrusions) et du domaine d'intérêt. Cette dernière approche est sûrement l'une des plus utilisées dans le domaine des géosciences [Caumon 03-(1)]. Pour construire une telle représentation, les intersections entre les surfaces sont calculées pour rendre leurs bords coïncidents, ce qui n'est initialement pas le cas, rappelons-le. Ceci induit en général une détérioration assez forte de la qualité du maillage initial des surfaces ([Euler 99], [Caumon 03-(1)]).
- les représentations *cellulaires*, c'est-à-dire par des maillages, où les régions sont constituées par des ensembles connexes de 3-cellules. Ces maillages ne sont cependant pas nécessairement adaptés à la modélisation du processus physique à laquelle ils sont destinés. Il serait donc souhaitable de les remailler.

Quelle que soit la technique utilisée pour le définir, il est possible de subdiviser l'ensemble des régions d'un modèle volumique du sous-sol en plusieurs catégories, chacune étant propre à un objet géologique particulier de dimension 3, dont par exemple les *couches géologiques*, qui sont des régions délimitées par deux horizons donnés, les frontières du domaine d'étude et éventuellement un groupe de faille affectant la couche, les *blocs de faille*, dont les limites sont constituées par un ensemble de failles données, ou encore les *morphologies perturbées* comme les couches salifères, les intrusions magmatiques, ou les minéralisations, dont les représentations sont diverses du fait de la topologie variée de ces objets (surfaces limites ouvertes, fermées, toriques).

Les modèles volumiques comme complément des modèles surfaciques

Un modèle surfacique n'est pas suffisant pour la très grande majorité des applications sur lesquelles débouchent la modélisation du sous-sol, où l'identification de régions est nécessaire pour par exemple :

- connaître leur volume et pouvoir ainsi estimer la dimension d'un réservoir pétrolier ou d'une minéralisation,
- qu'elles puissent servir de support à un modèle de propriétés, chaque région pouvant avoir ses propres caractéristiques pétrophysiques,
- visualiser les corps géologiques modélisés, juger de leur forme et de leur agencement, et éventuellement détecter des incohérences dans le modèle,
- localiser de manière précise un point dans le modèle et savoir à quelle région il appartient. Cette possibilité est requise par de nombreux algorithmes, dont ceux concernant le tracé de rayons sismiques, présenté au début du chapitre précédent (partie 2.2).

Des informations de contact entre les objets

Le rôle des modèles surfaciques et volumiques est aussi de dégager des informations sur les *contacts* de dimension 2, 1 ou 0 pouvant exister respectivement au sein des ensembles de régions, de surfaces et de lignes qu'ils contiennent. En effet, il n'est pas rare que par exemple les failles (ou à une autre échelle les fractures) soient organisées en réseaux, et donc inter-connectées de manière parfois complexe. Les horizons, quant à eux, sont bordés par les failles qui les affectent, et sont donc en contact avec celles-ci. De la même manière, les régions d'un modèle volumique sont en contact les unes avec les autres.

Il existe un très grand nombre de contacts possibles. Cependant, par la suite, comme le montre la figure 3.1, seuls les contacts entre objets de même dimension seront considérés, car ce sont les plus significatifs dans le cas de données géologiques (un contact entre une ligne et une surface a par exemple peu d'intérêt). Nous supposons de plus que tous les objets de dimension p du modèle sont des *p-variétés*, c'est-à-dire que tous leurs points ont un voisinage homéomorphe à un disque de dimension p ($0 \leq p \leq n$). Les contacts entre plusieurs *p-variétés* ne constituent pas nécessairement une *p-variété*. Par

exemple, un contact entre trois bords de surfaces, ou un contact entre un bord de ligne avec l'intérieur d'une autre, sont respectivement une 2- et une 1-non-variété. Les p -non-variétés n'admettent une représentation que dans les espaces de dimension supérieure à p ($0 \leq p \leq n$). Notre espace d'étude étant tridimensionnel, les 3-non-variétés y seront donc exclues. La figure 3.1 présente les différents types de contacts considérés dans notre étude.

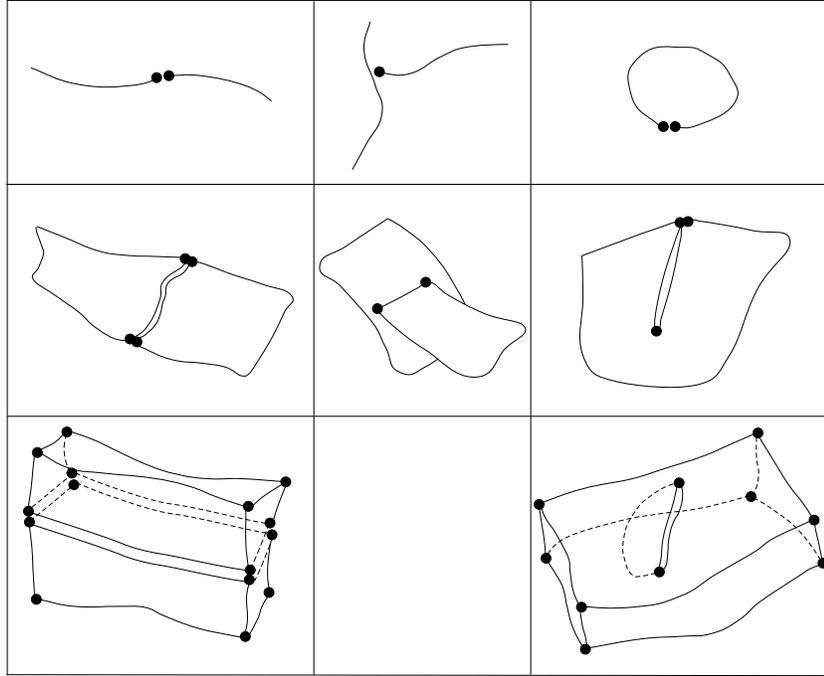


Figure 3.1 Les différents contacts de l'espace tridimensionnel considérés dans notre travail. Les lignes correspondent à la dimension du contact (0, 1, ou 2), et les colonnes au type du contact. Les contacts de la colonne du milieu sont des objets non-variétés.

À ce stade, nous considérons qu'un contact de dimension p ($0 \leq p \leq 2$) est juste une *information*, précisant seulement qu'un ensemble d'objets géologiques de dimension $(p+1)$ sont supposés s'intersecter, et que cette intersection est matérialisée par un ensemble d'objets géologiques de dimension p . Sauf quand cette intersection a été explicitement calculée, comme c'est le cas par exemple pour les modèles volumiques *définis par frontières*, il n'a donc pas de signification topologique et géométrique réelle. Ceci laisse toutefois une très grande souplesse quant à leur définition dans le modèle.

3.1.2 Représentation des données par une partition cellulaire

Principe

Quelle que soit la forme sous lesquelles elles se présentent, les données sont donc un ensemble de surfaces, de lignes, de points et éventuellement de régions, plongés dans un espace tridimensionnel, correspondant indifféremment aux objets géologiques modélisés, à leurs limites et à celles du domaine d'étude. Un modèle surfacique ou volumique F peut donc

être représenté par les ensembles $\{F_0, F_1, F_2, F_3\}$, F_p étant une collection $\{f_0^p, f_1^p, \dots, f_{n_p-1}^p\}$ de n_p *macro-cellules* de dimension p ($0 \leq p \leq 3$), dont les bords sont des macro-cellules de F_{p-1} (l'ensemble F_3 étant vide pour les modèles surfaciques), comme l'illustre la figure 3.2. Sans perdre en généralité, nous allons considérer que les relations d'incidence entre les macro-cellules de F sont données, et que :

- chaque macro-cellule de F_2 est incidente à au moins une macro-cellule de F_1 lorsqu'il s'agit d'une surface ouverte, et à aucune lorsqu'elle est fermée.
- chaque macro-cellule de F_1 est incidente à deux ou zéro macro-cellules de F_0 , ce qui correspond respectivement à une ligne ouverte (avec deux extrémités) ou fermée (sans extrémité).

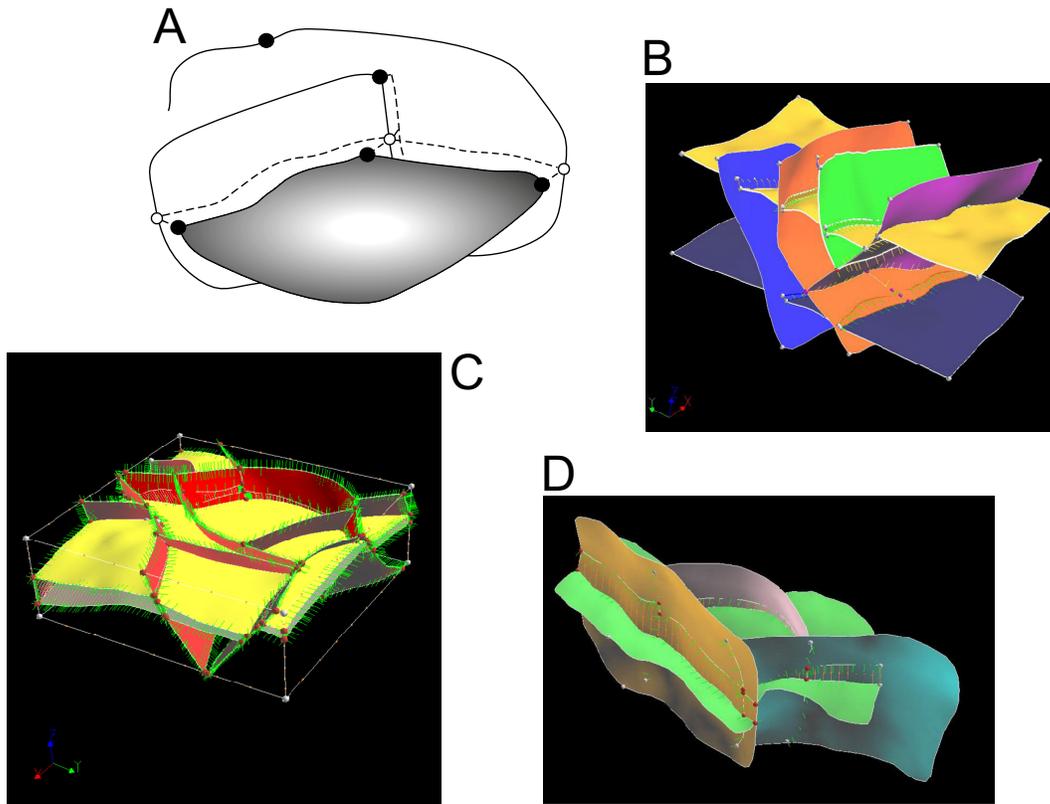


Figure 3.2 (A) : schéma d'une partition cellulaire de dimension 2, constitué de 3 macro-cellules de dimension 2 entretenant entre elles des contacts définis implicitement par les pointillés. Il existe aussi des contacts entre les macro-cellules de dimensions inférieures. (B),(C),(D) : quelques exemples concrets de modèles géologiques du sous-sol vus comme des partitions cellulaires.

Cette représentation est tout à fait équivalente à celle d'une *partition cellulaire* de dimension 3, au sens où nous l'avons défini dans le premier chapitre de cette partie. Toutefois, ses p -cellules ($0 \leq p \leq 3$) n'ont pas de géométrie bien définie, car dans F , elles ont avant tout un sens géologique. C'est pourquoi nous utilisons plutôt le terme de *p-macro-cellule* pour les désigner.

Interrogations sur la validité de la représentation

Énoncé des critères de validité

Pour qu'il soit valide, un modèle surfacique ou volumique F doit satisfaire à des conditions bien précises ([Requicha 80], [Euler 99], [Caumon 03-(1)]), non-seulement lors de sa construction, mais aussi lors d'éventuelles modifications pouvant y être apportées. En particulier, il est nécessaire que les intersections entre ses régions, ses surfaces et ses lignes correspondent à leur bord commun de dimension maximale. Ceci implique que toutes les $(p+1)$ -macro-cellules impliquées dans un contact de dimension p ($0 \leq p \leq 2$) doivent être incidentes à la même p -macro-cellule. En d'autres termes, s'il est envisagé sous la forme d'une partition cellulaire, F doit aussi être un *complexe cellulaire*. En complément de ce critère portant sur la validité de la représentation, il est possible d'ajouter des critères de validité géologique [Caumon 03-(1)] :

1. Les failles sont les seules interfaces dont les bords peuvent ne pas être en contact avec d'autres interfaces. Autrement dit, les bords des horizons ne doivent jamais être libres, et sont toujours connectés à d'autres interfaces, qui peuvent être les limites du domaine d'intérêt.
2. Lorsqu'ils existent, les contacts entre limites de couches, comme les horizons ou les surfaces d'érosion, ne peuvent se faire qu'en leurs bords externes.

Enfin, les surfaces et les lignes des modèles surfaciques ou des modèles volumiques *définis pas frontières*, ou encore les régions des modèles volumiques *cellulaires*, doivent avoir un maillage adéquat en termes de forme ou de taille, afin de pouvoir servir de support valide à différentes applications, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent (chapitre 2).

Étude de la validité

Dans le cas le plus général, la partition cellulaire F ne constitue évidemment pas une représentation valide. En effet, un ensemble de $(p+1)$ -macro-cellules ($0 \leq p \leq 2$) supposées s'intersecter d'après les données du modèle ne sont pas nécessairement *adjacentes*, c'est-à-dire toutes incidentes à une unique p -macro-cellule du contact :

- Certaines $(p+1)$ -macro-cellules ne sont incidentes à aucune p -macro-cellule matérialisant le contact ($0 \leq p \leq 1$).
- Certaines $(p+1)$ -macro-cellules sont certes incidentes à une p -macro-cellule matérialisant le contact, mais celle-ci est différente pour chacune d'entre elles ($0 \leq p \leq 2$).

De plus, l'ensemble des p -macro-cellules représentant un même contact ne possèdent pas toutes la même géométrie. Ces deux problèmes viennent du fait que les intersections entre les macro-cellules de F n'ont pas de signification géométrique. Ainsi, sauf si F est un modèle volumique *défini par frontières*, il ne peut pas constituer un complexe cellulaire. Ce modèle doit donc être modifié pour constituer une représentation valide.

Par ailleurs, et c'est le cas par exemple pour les surfaces des modèles volumiques *définis par frontières*, les macro-cellules de F n'ont pas nécessairement un maillage satisfaisant au regard des usages auxquels il est destiné. Il est donc également souhaitable de pouvoir remailler correctement toutes ces macro-cellules.

3.2 Proposition d'une représentation cellulaire valide : le *Soft Frame Model*

Cette partie présente un ensemble de concepts et de structures de données permettant d'assurer la validité représentative et applicative d'un modèle F donné, qu'il soit surfacique ($n = 2$) ou volumique ($n = 3$), dans l'hypothèse où celui-ci se présente sous la forme d'une collection de p -macro-cellules ($0 \leq p \leq n$) ne s'intersectant pas nécessairement au niveau de leurs bords, et d'informations sur les contacts qui les lient. Le macro-modèle que nous proposons, appelé *Soft Frame Model* de dimension n , constitue une contribution importante de notre travail. Il sera l'objet central des chapitres suivants.

3.2.1 Notion d'élément radial

Définitions des éléments radiaux

Au sein de la partition cellulaire F , les contacts de dimension p sont matérialisés par un ensemble de macro-cellules de F_p ($0 \leq p \leq n - 1$) correspondant à l'intersection virtuelle d'un ensemble fini de c macro-cellules de F_{p+1} . Soit r_p un élément abstrait attaché au contact entre ces c cellules. Par la suite, nous l'appellerons *élément radial* de dimension p , et c constituera son *cardinal* ($c \geq 1$). Les éléments radiaux de dimension 0 seront ainsi dénommés *nœuds radiaux*, ceux de dimension 1 *lignes radiales*, ceux de dimension 2 *surfaces radiales*, et ceux de dimension 3 *régions* (pour les modèles volumiques uniquement).

Par conséquent, un élément radial r_p de dimension p et de cardinal c est à la fois un ensemble de c macro-cellules de F_{p+1} , que nous regrouperons sous le terme *parents*, mais aussi un ensemble de e macro-cellules de F_p matérialisant le contact, et qui constituent ce que nous appellerons ses *enfants* dans F . Celles-ci sont les bords des parents de r_p . Rappelons qu'un parent de r_p ne possède pas toujours de bord constituant un enfant de r_p , dans quel cas il sera dit *flou*, et *déterminé* sinon. Par extension, nous dirons qu'un élément radial est déterminé si tous ces parents le sont (ce qui n'implique pas nécessairement $c = e$). D'après les hypothèses que nous avons formulées sur les contacts définis dans un modèle volumique, une surface radiale est donc toujours déterminée. La figure 3.3 donne quelques exemple schématiques de nœuds radiaux et de lignes radiales.

Les éléments radiaux de dimension n n'ont bien sûr pas de parents (il n'existe pas de macro-cellules de dimension $(n + 1)$ dans F), et elles ont un unique enfant qui est une macro-cellule de F_n .

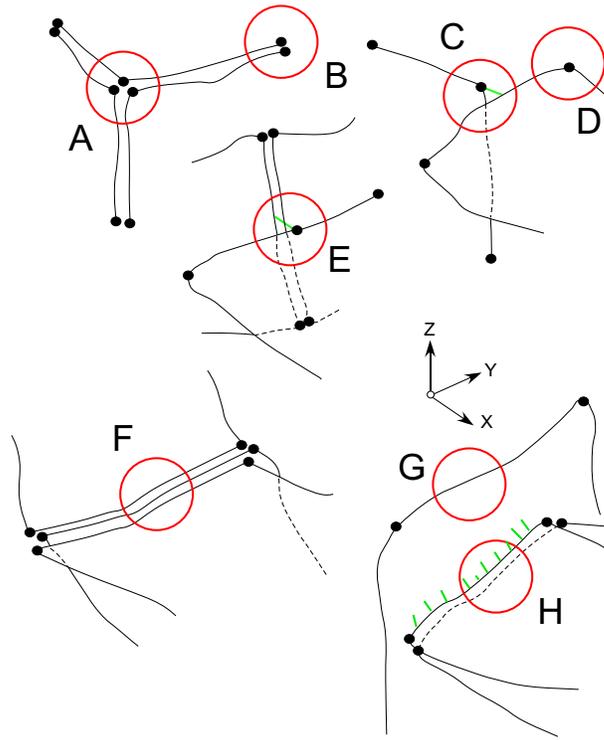


Figure 3.3 Quelques exemples schématiques de nœuds et de lignes radiales (encerclés en rouge). Les traits verts représentent des informations de contact. (A) : un nœud radial déterminé à 3 enfants et 6 parents. (B) : un nœud radial déterminé à 2 enfants et 2 parents. (C) : un nœud radial flou à 1 enfant et 3 parents (dont 1 flou). (D) : un nœud radial déterminé à 1 enfant et 2 parents. (E) : un nœud radial flou à 1 enfant et 4 parents (dont 2 flous). (F) : une ligne radiale déterminée à 3 enfants et 3 parents. (G) : une ligne radiale déterminée à 1 enfant et 1 parent. (H) : une ligne radiale floue à 2 enfants et 3 parents (dont 1 flou).

Propriétés des éléments radiaux

Il découle tout d'abord de ces définitions qu'un élément radial de cardinal 1 correspond à un bord libre. Si F est géologiquement valide, cette configuration ne peut seulement concerner en dimension 2 que les limites du domaine d'étude, et en dimension 1 que les bords des failles [Caumon 03-(1)].

Par ailleurs, étant donné qu'une macro-cellule du modèle F de dimension 0, 1 ou 2 ne peut logiquement prendre part qu'à un seul contact, toutes les macro-cellules de F_0 , F_1 et F_2 constituent un enfant d'un unique élément radial de même dimension. En d'autres termes, il est impossible qu'une macro-cellule de F_0 soit un enfant de plusieurs nœuds radiaux, qu'une macro-cellule de F_1 soit un enfant de plusieurs lignes radiales, et qu'une macro-cellule de F_2 soit un enfant de plusieurs surfaces radiales. Pour la même raison, tous les enfants d'un élément radial donné sont topologiquement équivalents, et ils ont en particulier le même nombre de bords.

Les éléments radiaux entretiennent entre eux des relations d'incidence et d'adjacence

que nous définissons comme suit (voir figure 3.4) :

- Un élément radial r_p et un élément radial r_{p+1} sont dits *incidents* si et seulement s'il existe un parent de r_p qui soit un enfant de r_{p+1} ($0 \leq p \leq n - 1$).
- Deux éléments radiaux de dimension p sont dits *adjacents* s'ils sont incidents à un même élément radial de dimension $(p - 1)$ ($1 \leq p \leq n$).

Par conséquent, si un élément radial r_p et un élément radial r_{p+1} sont incidents, alors tous les enfants de r_{p+1} possèdent le même nombre k ($k \geq 0$) de bords qui sont enfants de r_p . Tous les enfants de r_{p+1} sont de plus des parents tous *flous* ou tous *déterminés* de r_p , auquel cas r_{p+1} sera dit respectivement *fou* par rapport à r_p ou *déterminé d'ordre k* par rapport à r_p (k est alors non-nul). Enfin, nous appellerons *m-descendance* de r_p les éléments radiaux de dimension m tels qu'il existe une série $\{r_p, r_{p+1}, \dots, r_m\}$, où r_{k+1} est incident à r_k ($p + 1 \leq k + 1 \leq m \leq n$). De même, les *m-ancêtres* de r_p sont les éléments radiaux de dimension m tels qu'il existe une série $\{r_m, r_{m+1}, \dots, r_p\}$, où r_{k+1} est incident à r_k ($m + 1 \leq k + 1 \leq p \leq n$).

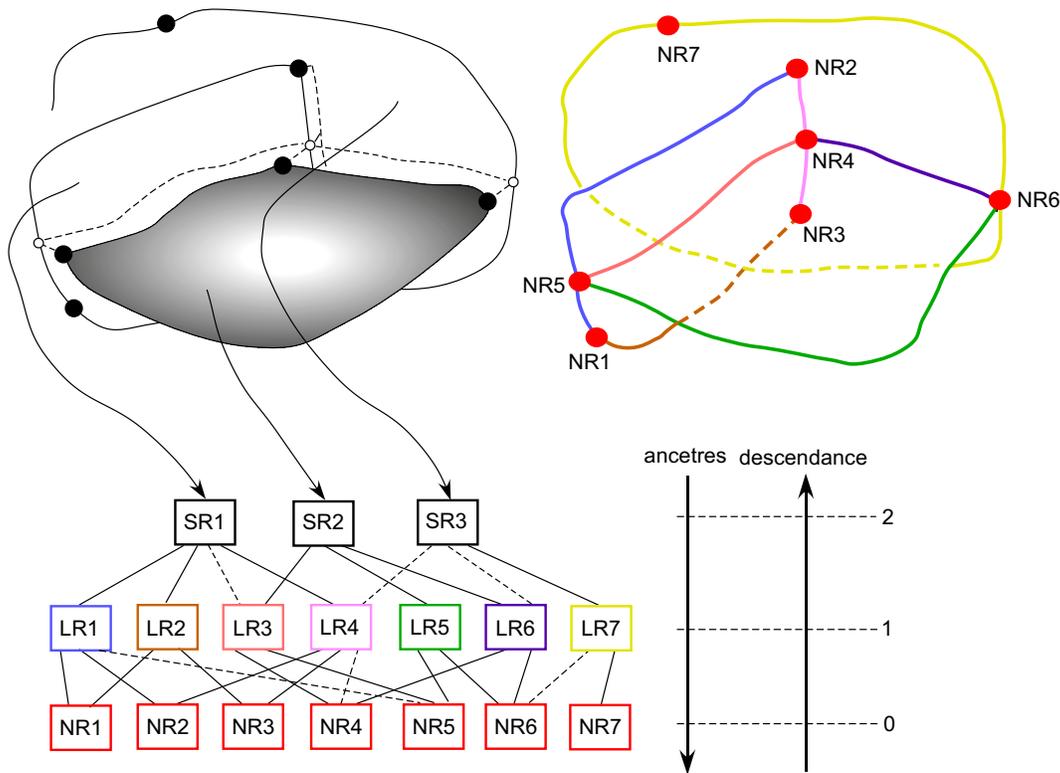


Figure 3.4 Cette figure illustre la notion d'incidence entre éléments radiaux. En haut : partition cellulaire de départ. Les pointillés représentent les informations de contact (à gauche). Visualisation des éléments radiaux (à droite). En bas : graphe d'incidence associé aux éléments radiaux. Les arcs en pointillés correspondent aux relations d'incidence floues.

Notion de *Soft Frame Model*

Un *Soft Frame Model* de dimension n est une représentation d'un modèle F surfacique ($n = 2$) ou volumique ($n = 3$) basée sur les éléments radiaux, où chaque macro-cellule de F_n est associée à une surface radiale ($n = 2$) ou à une région ($n = 3$), et chaque information de contact de dimension p à un élément radial de dimension p ($0 \leq p \leq n - 1$). Elle constitue un macro-modèle très flexible, car uniquement déterminée par des *informations* de contact. Un *Soft Frame Model* est par conséquent facile à mettre à jour en cas de modifications de ces données.

Comme les complexes cellulaires, un *Soft Frame Model* est entièrement décrit par un graphe d'incidence, dont les nœuds sont ses éléments radiaux. Ce graphe peut être valué si l'on associe à chaque relation d'incidence son ordre de détermination (un ordre nul caractérisant une relation d'incidence *floue*).

3.2.2 Validité d'un modèle basé sur des éléments radiaux

Assurance de la validité topologique

La validité topologique de ce modèle est inhérente à la définition des éléments radiaux. En effet, ceux-ci sont construits de sorte qu'un contact de dimension p défini dans un modèle surfacique ou volumique soit représenté par un ensemble d'éléments radiaux de dimension $(p+1)$ tous incidents à un unique élément radial de dimension p ($0 \leq p \leq n - 1$). En d'autres termes, un ensemble de macro-cellules de F_p qui s'intersectent virtuellement dans F sont toujours associées à des éléments radiaux de dimension p qui sont adjacents ($1 \leq p \leq n$).

Assurance de la validité géométrique

Principe

Chaque élément radial r_p d'un *Soft Frame Model* ($0 \leq p \leq n$), et donc chaque contact de dimension p défini dans le modèle F ($0 \leq p \leq n - 1$), doit avoir une unique signification géométrique. Supposons que cette signification prenne la forme d'un complexe cellulaire de dimension p , qui sera par la suite noté \mathcal{M}_{r_p} . Ce complexe doit alors nécessairement prendre en compte la géométrie :

- des éléments radiaux de dimension $(p - 1)$ incidents à r_p , autrement dit les $(p - 1)$ -ancêtres de r_p , qui constituent un premier ensemble noté $\mathcal{A}_{p-1}(r_p)$,
- des éléments radiaux de dimension q incidents aux éléments radiaux de $\mathcal{A}_{q+1}(r_p)$, c'est-à-dire les q -ancêtres de r_p , qui constituent les ensembles $\mathcal{A}_q(r_p)$ ($0 \leq q \leq p - 2$).

L'ensemble $\mathcal{C}(r_p) = \{\mathcal{A}_{p-1}(r_p), \dots, \mathcal{A}_0(r_p)\}$ définit ce que nous appellerons les éléments radiaux de *contrainte* sur la géométrie de r_p (la figure 3.5 en donne une illustration). Ces contraintes sont satisfaites si et seulement s'il existe dans le complexe \mathcal{M}_{r_p} une union de q -cellules qui sont en correspondance géométrique avec la totalité des q -cellules des

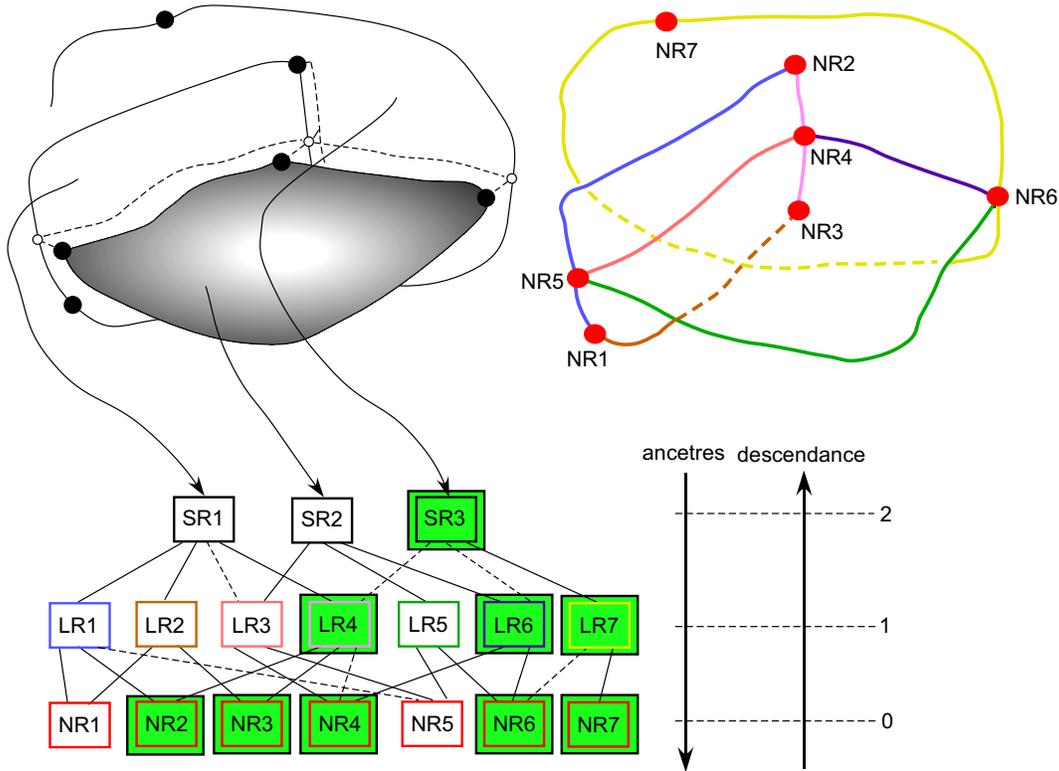


Figure 3.5 Les 1-ancêtres de la surface radiale SR_3 sont les lignes radiales LR_4 , LR_6 et LR_7 , et ses 0-ancêtres sont les nœuds radiaux NR_2 , NR_3 , NR_4 , NR_6 , et NR_7 . La géométrie de cette surface radiale doit donc être contrainte par celle de tous ces éléments radiaux.

complexes associés aux éléments radiaux de $\mathcal{A}_q(r_p)$ ($0 \leq q \leq p - 1$).

Les q -cellules de \mathcal{M}_{r_p} correspondant à celles du complexe associé à un élément de contrainte r_q ($0 \leq q \leq p - 1$) ont une localisation bien précise. En effet, si r_p est déterminé par rapport à au moins un élément de la $(p - 1)$ -descendance de r_q qui appartient à $\mathcal{A}_{p-1}(r_p)$, alors ces q -cellules sont toutes sur le bord de \mathcal{M}_{r_p} . Sinon, elles sont situées à l'intérieur de ce complexe.

Implications

Assurer la validité géométrique d'un *Soft Frame Model* implique d'avoir des outils permettant tout d'abord de créer des maillages de dimension p ($0 \leq p \leq n \leq 3$) dans un espace tridimensionnel. Il est de plus impératif de pouvoir *contraindre* ces maillages d'une manière ou d'une autre en y imposant des ensembles de q -cellules donnés ($0 \leq q \leq p - 1$). Les cas des nœuds radiaux et des lignes radiales est trivial, et sera abordé dans la suite de ce chapitre. Générer de tels complexes cellulaires en dimension 2 et 3 est plus délicat ; les parties suivantes (partie II et III) y seront d'ailleurs largement consacrées. Quoiqu'il en soit, cette validité doit être maintenue lors de modifications éventuelles du maillage associé à un élément radial. S'il est de dimension p , il suffit pour cela de re-contraindre les complexes de tous les éléments radiaux qui font partie de sa q -descendance ($p+1 \leq q \leq n$).

Le fait que les maillages associés aux éléments radiaux soient contraints a par ailleurs de très fortes répercussions sur la taille ou la forme de leurs cellules. Par exemple, un triangle auquel une arête de petite taille est imposée doit avoir une taille du même ordre de grandeur pour garder une forme raisonnable, et il en est de même pour un tétraèdre contraint par une arête de petite taille ou une face de petite taille mais avec une forme acceptable. En revanche, un tétraèdre contraint par une face dégénérée ne peut avoir de forme satisfaisante, quelle que soit sa taille [George 99]. Par conséquent, si un maillage doit satisfaire à des critères précis de taille ou de forme relatifs à ses cellules, alors les maillages qui le contraignent doivent aussi les accommoder.

Contraintes mises à part, toute liberté est donnée pour mailler les éléments radiaux, et donc assurer la validité applicative d'un *Soft Frame Model*. Ces maillages doivent toutefois être le plus proche possible de ceux de leurs enfants, s'ils existent (les régions d'un modèle volumique *défini par frontières*, par exemple, ne sont pas maillées), afin de rester cohérents avec les objets du modèle F initial.

3.2.3 Structures de données associées aux éléments radiaux

Topologie des éléments radiaux

Supposons que les macro-cellules de F_0 , F_1 , F_2 et éventuellement F_3 (si le modèle de départ est volumique), dont les relations d'incidence sont connues, soient respectivement représentées par des structures de type `Cell_0` (points), `Cell_1` (lignes), `Cell_2` (surfaces), et `Cell_3` (régions), sans plus de précision. Que le modèle F soit surfacique ou volumique, les structures de données représentant les éléments radiaux sont les mêmes (structures 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4) :

```

        typedef struct Radial_Node {
            List<Cell_1*> hard_parents_;
            List<Cell_1*> fuzzy_parents_;
            List<Cell_0*> children_;
            Table<Radial_Line*,int> incident_radial_lines_;
        } Radial_Node;
    
```

(3.1)

```

        typedef struct Radial_Line {
            List<Cell_2*> hard_parents_;
            List<Cell_2*> fuzzy_parents_;
            List<Cell_1*> children_;
            Table<Radial_Node*,int> incident_radial_nodes_;
            Table<Radial_Surface*,int> incident_radial_surfaces_;
        } Radial_Line;
    
```

(3.2)

```

typedef struct Radial_Surface {
    List<Cell_3*> hard_parents_;
    List<Cell_2*> children_;
    Table<Radial_Line*,int> incident_radial_lines_;
    Table<Region*,int> incident_regions_;
} Radial_Surface;

```

(3.3)

```

typedef struct Region {
    Cell_3* child_;
    Table<Radial_Surface*,int> incident_radial_surfaces_;
} Region;

```

(3.4)

Ces structures décrivent entièrement les relations qu'entretiennent entre eux les éléments radiaux du *Soft Frame Model*. En effet, chacun stocke :

- des informations sur le contact qu'il matérialise : ses enfants (variables `children_`), ses parents *déterminés* et *flous* (variables `hard_parents_` et `fuzzy_parents_`). Compte-tenu des hypothèses qui ont été faites sur la nature des contacts au sein d'un modèle volumique, les surfaces radiales n'ont jamais de parents *flous*.
- les éléments radiaux de dimension inférieure et supérieure qui lui sont incidents. Rappelons qu'à chacune de ces relations d'incidence est associée un *ordre de détermination*, représenté par un entier. Cette information ne nécessite pas obligatoirement d'être stockée, car elle peut être calculée relativement facilement.

Grâce à ces structures, les descendances ou les ancêtres de n'importe quel élément radial s'obtiennent très facilement. Notons que si le modèle F est surfacique, la variable `hard_parents_` de la structure 3.3 ne contient aucun élément, tout comme la variable `incident_regions_`. La variable `children`, quant à elle, n'en contient alors qu'un seul.

Géométrie des éléments radiaux

Comme nous l'avons vu précédemment, les structures de données associées aux maillages sont diverses et dépendent du modèle de représentation utilisé (demi-arêtes, n -Cartes, n -G-Cartes, ...). Toutefois, si les maillages en question constituent la géométrie d'un élément radial de dimension p , ces structures doivent intégrer le fait qu'ils sont contraints par des q -cellules d'autres maillages ($0 \leq q \leq p-1$). Considérons le complexe \mathcal{M}_{r_p} associé à cet élément radial r_p . Chacune de ses q -cellules ($0 \leq q \leq p-1$) peut correspondre à une q -cellule d'un des q -ancêtres de r_p . En même temps, chacune de ses p -cellules est une contrainte pour chacun des éléments radiaux de la q -descendance de r_p ($p+1 \leq q \leq n$). Par conséquent, toutes les cellules du complexe \mathcal{M}_{r_p} sont susceptibles de contenir des

informations relatives aux contraintes.

Par exemple, considérons un *Soft Frame Model* de dimension 3, où les maillages associés aux éléments radiaux sont tous représentés par des modèles topologiques de la famille des demi-arêtes (a priori, il est même envisageable d'utiliser un modèle topologique différent par élément radial) :

- Les 0-cellules des nœuds radiaux sont représentées par des structures de type `Node`,
- Les 0-cellules des lignes radiales sont représentées par des structures de type `Segment_Node`, et leurs 1-cellules par des structures de type `Segment_Half_Edge`,
- Les 0-cellules des surfaces radiales sont représentées par des structures de type `Polygon_Node`, leurs 1-cellules par des structures de type `Polygon_Half_Edge`, et leurs 2-cellules par des structures de type `Polygon`,
- Les 0-cellules des régions sont représentées par des structures de type `Polyhedron_Node`, leurs 1-cellules par des structures de type `Polyhedron_Half_Edge`, leurs 2-cellules par des structures de type `Polyhedron_Half_Polygon`, et leurs 3-cellules par des structures de type `Polyhedron`.

Sous ces hypothèses, les structures de données suivantes peuvent être utilisées pour matérialiser les contraintes sur les q -cellules des maillages des éléments radiaux de dimension p ($0 \leq q \leq p - 1 \leq n - 1$) :

- La structure 3.5 ci-dessous représente les contraintes associées aux 0-cellules des lignes radiales, surfaces radiales et régions (la variable `radial_node_` est un 0-ancêtre de ces éléments). Elle est donc attachée aux structures de type `Segment_Node`, `Polygon_Node` et `Polyhedron_Node` :

```
typedef struct Constraint_0d {
    Radial_Node* radial_node_;
    Node* node_;
} Constraint_0d;          (3.5)
```

- La structure 3.6 ci-dessous représente les contraintes associées aux 1-cellules des surfaces radiales et des régions (la variable `radial_line_` est un 1-ancêtre de ces éléments). Elle est donc attachée aux structures de type `Polygon_Half_Edge` et `Polyhedron_Half_Edge` :

```
typedef struct Constraint_1d {
    Radial_Line* radial_line_;
    Segment_Half_Edge* half_edge_;
} Constraint_1d;          (3.6)
```

- La structure 3.7 ci-dessous représente les contraintes associées aux 2-cellules des régions (la variable `radial_surface_` est un 2-ancêtre de ces éléments). Elle est donc attachée aux structures de type `Polyhedron_Half_Polygon` :

```

typedef struct Constraint_2d {
    Radial_Surface* radial_surface_;
    Polygon* polygon_;
} Constraint_2d;

```

(3.7)

Les contraintes définies sur la totalité des p -cellules des complexes représentant les éléments radiaux de dimension p ($0 \leq p \leq n - 1$), quant à elles, peuvent par exemple se décliner sous la forme suivante :

- La structure 3.8 ci-dessous est associée à la 0-cellule d'un nœud radial (structure de type `Node`), les variables `constraints_1d_`, `constraints_2d_` et `constraints_3d_` correspondant respectivement aux 1-, 2- et 3-descendances du nœud radial :

```

typedef struct Constraint_Node {
    Table<RadialLine*,Segment_Node*> constraints_1d_;
    Table<RadialSurface*,Polygon_Node*> constraints_2d_;
    Table<Region*,Polyhedron_Node*> constraints_3d_;
} Constraint_Node;

```

(3.8)

- La structure 3.9 ci-dessous est associée aux 1-cellules d'une ligne radiale (structures de type `Segment_Half_edge`), les variables `constraints_2d_` et `constraints_3d_` correspondant respectivement aux 2- et 3-descendances de la ligne radiale :

```

typedef struct Constraint_Segment_Half_Edge {
    Table<RadialSurface*,Polygon_Half_Edge*> constraints_2d_;
    Table<Region*,Polyhedron_Half_Edge*> constraints_3d_;
} Constraint_Segment_Half_Edge;

```

(3.9)

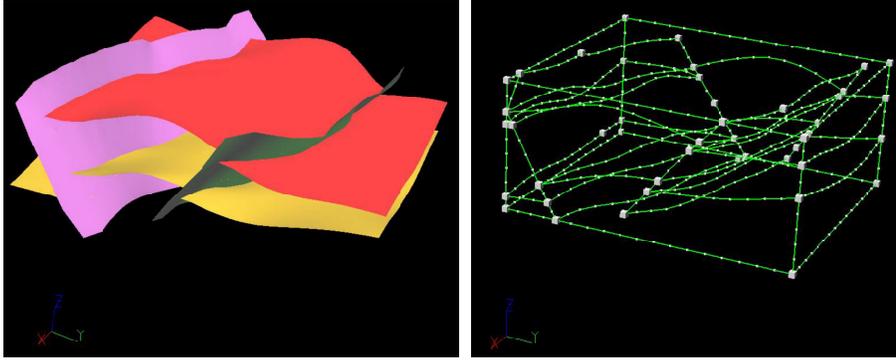


Figure 3.6 Un premier exemple de construction d'un *Soft Frame Model* à partir d'un modèle structural synthétique (à gauche). La géométrie des nœuds radiaux et des lignes radiales est affichée à droite.

- La structure 3.10 ci-dessous est associée aux 2-cellules d'une surface radiale (structures de type `Polygon`), les variables `constraints_3d_` correspondant à la 3-descendance de la surface radiale :

```

typedef struct Constraint_Polygon {
    Table<Region*,Polyhedron_Half_Polygon*> constraints_3d_;
} Constraint_Polygon;    (3.10)

```

Dans le cas d'un *Soft Frame Model* de dimension 2, les structures 3.7 et 3.10 n'ont bien sûr pas de raison d'être, tout comme les variables `constraints_3d_` des structures 3.8 et 3.9, qui ne contiennent alors aucun élément. Quoiqu'il en soit, le maintien de toutes ces structures, lors de la création du modèle ou de la modification d'un maillage attaché à un de ses éléments radiaux, est garant de sa validité géométrique.

3.2.4 Construction d'un *Soft Frame Model*

En guise de conclusion à cette partie, nous donnons quelques exemples concrets de *Soft Frame Models* construits à partir de modèles structuraux (voir figures 3.6 et 3.7). Rappelons que les éléments radiaux et leurs relations d'incidence sont uniquement déterminés par les informations de contact définies au sein des surfaces, lignes et points du modèle structural. Par conséquent, si ces contacts ne sont pas cohérents, le *Soft Frame Model* est invalide, ce qui peut rendre impossible l'assignation d'une géométrie aux éléments radiaux.

La détermination d'une géométrie *contrainte* pour les nœuds radiaux et les lignes radiales d'un *Soft Frame Model* ne pose aucune difficulté :

- Pour un nœud radial, nous prenons la moyenne de la position de ses enfants et des *points d'impacts* sur ses parents flous, c'est-à-dire les points les plus proches sur ces lignes.

- Pour une ligne radiale, nous prenons une ligne polygonale de résolution choisie, incluant comme sommets les points matérialisant la géométrie des nœuds radiaux incidents à la ligne radiale (ses 0-ancêtres). Les autres sommets de la ligne sont une moyenne des positions des points de même abscisse curviligne sur ses enfants, et des *points d'impacts* sur ses parents flous, c'est-à-dire les points les plus proches sur ces surfaces.

De cette façon, la géométrie des nœuds radiaux et des lignes radiales reste une bonne approximation de celle de leurs enfants. Les maillages des surfaces radiales et des régions d'un *Soft Frame Model* sont eux beaucoup plus délicats à construire. Ils seront abordés en détail dans les parties suivantes (parties II et III).

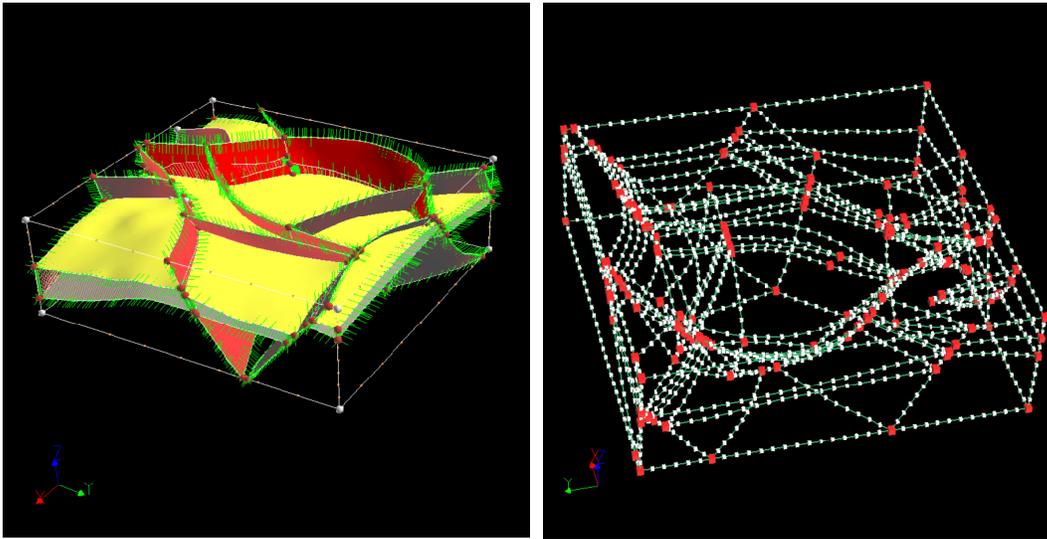


Figure 3.7 Un autre exemple de construction d'un *Soft Frame Model* à partir d'un modèle structural réel (modèle TOTAL), représenté à gauche. La géométrie des nœuds radiaux et des lignes radiales (avec une résolution uniforme) est affichée à droite.

Conclusions

Dans cette première partie, nous avons introduit plusieurs notions centrales, qui seront largement reprises dans les parties suivantes. Nous y avons vu que les maillages sont des objets à la fois géométriques et topologiques, et que ces deux aspects déterminent respectivement leur *régularité* et leur *structure*. Ces propriétés ont un impact fort sur l'efficacité et la précision des méthodes numériques couramment employées en géosciences pour résoudre des problèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, comme l'étude des déformations des couches du sous-sol, le tracé de rayons sismiques, ou encore les simulations d'écoulement de fluides au sein de réservoirs d'hydrocarbures. La modélisation de ces phénomènes physiques par des maillages tridimensionnels nécessite une connaissance des interfaces du domaine d'étude, qui constituent un *modèle structural*, et surtout des *contacts* qu'ils entretiennent. Pour cela, nous avons proposé un macro-modèle, baptisé *Soft Frame Model*, qui permet non seulement de gérer sagement la définition des contacts au sein de modèles structuraux, mais aussi de leur assurer une validité géométrique. Ceci constitue une première contribution de notre travail.

La construction d'une géométrie *contrainte* pour les éléments de *Soft Frame Models* est ainsi l'objet des deux parties suivantes.

Partie II

Génération de maillages simpliciaux pour les surfaces tridimensionnelles

Méthodes de génération de maillages de simplexes

Notre problématique est de générer un maillage simplicial pour matérialiser la géométrie des surfaces radiales d'un *Soft Frame Model*, qui satisfasse différents critères de forme et de taille. Avant d'aborder précisément les algorithmes que nous avons conçus en conséquence, ce chapitre introduit plusieurs notions indispensables qui nous permettront de justifier les choix que nous avons faits sur les méthodes de construction de maillages de simplexes adoptées dans notre travail.

4.1 Algorithmes classiques de construction de maillages de simplexes

Les simplexes sont de loin les mailles constitutives les plus courantes des maillages non-structurés. Cette partie de synthèse présente un ensemble de méthodes et d'algorithmes fréquemment employés dans le domaine de la génération de complexes simpliciaux bi- et tridimensionnels. Rappelons que les simplexes de ces maillages sont *constraints*, et doivent inclure des ensembles connus de 0-, 1- et 2-simplexes connus (pour le cas tridimensionnel, qui sera abordé dans la partie III). Toutes ces méthodes peuvent se ranger dans trois grandes catégories : les méthodes par propagation de front, celles basées sur des arbres octaux, et enfin celles dites de Delaunay. Les méthodes développées dans notre travail appartiennent à cette dernière catégorie, et seront présentées plus en détail dans les chapitres suivants (chapitres 5 et 6).

4.1.1 Maillages générés par méthodes frontales

Présentation de l'algorithme de propagation de front

Avec cette méthode, le maillage est construit par additions progressives de simplexes sur un front constitué par une union de 1- ou de 2-simplexes (cas respectivement bi- ou tridimensionnel). Ce front est initialisé avec les simplexes de contrainte sur la maillage, et maintenu au fur et à mesure que le maillage se complète élément par élément et que le front progresse vers l'intérieur du domaine d'étude Ω .

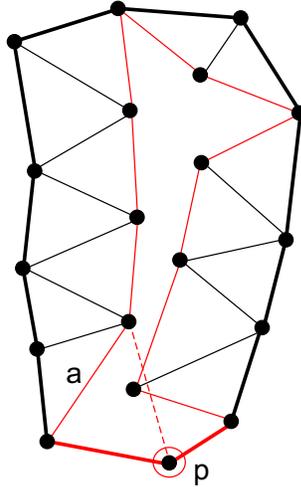


Figure 4.1 Sur cette figure, les contraintes sur la triangulation sont matérialisées par des lignes plus épaisses. Le front est représenté par les lignes rouges. Le point p encerclé, bien qu'idéalement situé, n'est pas un candidat valide pour former un nouveau triangle avec l'arête a , car celui-ci intersecterait des arêtes déjà formées.

Chaque nouveau triangle ou tétraèdre du maillage est donc formé à partir d'un simplexe du front et d'un point supplémentaire. Le choix de la position de ce nouveau point est crucial (voir figure 4.1). En général, il fait intervenir la définition d'une région qui englobe tous les points de l'espace qui sont tels que le triangle ou le tétraèdre résultant soit satisfaisant en termes de forme et de taille ([Seveno 97], [Fleischmann 97], [Rassineux 98]). Ensuite, tous les nœuds du front appartenant à cette région sont classés en fonction de la qualité du simplexe ainsi construit. S'il n'y en a aucun, un nouveau nœud est créé dans le maillage à une position idéale. En plus de ces considérations, une attention toute particulière doit être portée aux éventuelles intersections (souvent appelées *collisions*) d'un simplexe nouvellement formé avec le front courant ([Fleischmann 99]) :

- Aucun des 1-simplexes nouvellement formés ne doit intersecter les 1- et 2-simplexes (pour le cas tridimensionnel) du front (voir figure 4.1),
- Aucun des 2-simplexes nouvellement formés ne doit intersecter les 1-simplexes du front (pour le cas tridimensionnel uniquement),

- Le 2- ou 3-simplexe nouvellement formé ne doit contenir aucun 0-simplexe du maillage.

Si ces conditions ne sont pas remplies, le 1- ou 2-simplexe du front en question est rejeté, mais seulement temporairement, car il peut très bien constituer un support valide une fois le front modifié ([Frey 96], [Martha 01]). La génération du maillage s'arrête lorsqu'aucun nouveau simplexe ne peut être formé sans violer les contraintes de taille et de forme, ou intersecter le front.

Discussion

Un intérêt immédiat des méthodes par propagation de front est que les simplexes de contrainte sont par construction présents dans le maillage final. De plus, la taille des éléments générés est facilement contrôlable et s'intègre naturellement dans l'algorithme ([Seveno 97], [Owen 98], [Borouchaki 00], [Martha 01]). Ces deux points sont incontestablement des points forts de ces méthodes. Toutefois, la mise en œuvre de ces méthodes est en général très délicate, et peu d'entre elles produisent des maillages satisfaisants ([Frey 96], [Shewchuk 97]). En effet, elles requièrent non-seulement des tests géométriques d'inter-section robustes, souvent coûteux en temps calcul, mais aussi la mise en place de nombreuses heuristiques, notamment en ce qui concerne la définition des régions de l'espace dans lesquelles doivent être situés les points complétant le front, et les tests d'appartenance de points dans ces régions [Frey 96].

Par ailleurs, l'algorithme présenté auparavant laisse presque toujours dans le domaine Ω des régions qui ne sont pas maillées, et des post-traitements sont alors impératifs pour remplir les cavités restantes avec des simplexes qui ne satisfont logiquement pas les impératifs de forme ou de taille (surtout si cette taille varie brusquement). Pour ces raisons, la qualité du maillage final est souvent bonne près des simplexes de contrainte, mais se dégrade systématiquement vers l'intérieur du domaine d'étude Ω [Shewchuk 97], sauf post-traitements spécifiques. Il est donc souhaitable que les simplexes de contrainte aient eux-mêmes une qualité satisfaisante.

Les méthodes par propagation de front semblent donc plus adaptées aux cas où les collisions sont rares, comme par exemple lorsque c'est plutôt l'extérieur et non plus l'intérieur d'un objet qui doit être maillé.

4.1.2 Maillages basés sur des arbres octaux

Principe de la méthode

Définition des arbres octaux

Les *quadrtrees* et *octrees* sont des structures de données représentant des arbres où tous les nœuds non-terminaux sont respectivement reliés à 4 et 8 nœuds *enfants*. Le premier nœud de cet arbre (sa *racine*) est un quadrilatère ou un parallépipède rectangle englobant le domaine d'étude Ω à mailler, et chaque nœud non-terminal de l'arbre (ses *cellules*) peut

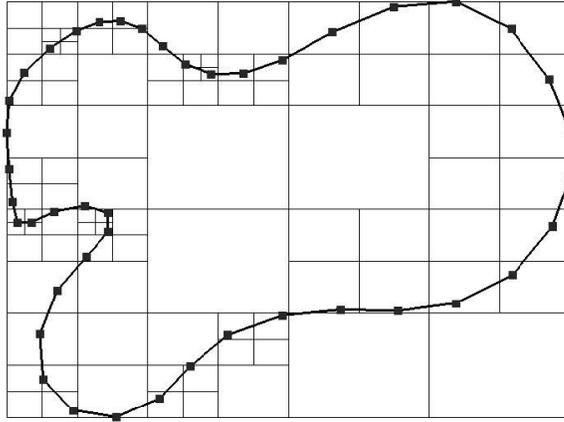


Figure 4.2 Un exemple de *quadtree* construit à partir d’une ligne polygonale fermée. Les cellules ont été récursivement subdivisées en quatre de manière à ce que chaque sommet de la ligne soit contenu dans une seule cellule.

ainsi être récursivement décomposé en 4 ou 8 quadrilatères ou parallélépipèdes rectangles adjacents, comme le montre la figure 4.2 dans le cas bidimensionnel.

La profondeur de subdivision de l’arbre est du ressort de l’utilisateur. En général, elle est cohérente avec les données de contrainte sur le maillage à générer, et une cellule contenant entièrement ou non un simplexe de contrainte doit être divisée si sa taille n’est pas k fois inférieure à celle du simplexe ([Shephard 91], [Martha 01]). Le réel k doit être choisi inférieur à 1 et de sorte à ne pas générer trop de cellules dans l’arbre, la valeur 0.4 semblant être couramment utilisée. Par conséquent, au final, chaque 0-cellule de contrainte est seule dans la cellule de l’arbre qui le contient.

Génération du maillage

Une fois la décomposition du domaine Ω effectuée, la génération du maillage en elle-même est relativement simple. Chaque cellule terminale de l’arbre est maillée indépendamment et spécifiquement, de manière à créer des simplexes adjacents avec ceux issus des cellules terminales voisines. Le maillage final est donc l’union des maillages des toutes les cellules terminales. La génération du maillage d’une cellule terminale ne contenant pas de simplexes de contrainte ne pose pas de problème. Il inclue les sommets de la cellule et éventuellement les points d’intersection avec les cellules voisines. En revanche, plusieurs approches peuvent être envisagées pour générer celui des cellules contenant des simplexes de contrainte :

- Elle peuvent tout d’abord être maillées de la même manière que les autres. Ensuite, un post-traitement spécifique modifie la géométrie des nœuds du maillage global de manière à respecter au mieux les contraintes et à ne pas créer de recouvrement entre les simplexes. Ceci peut aussi être vu comme un pré-traitement sur la géométrie des cellules de l’arbre, dont la topologie est conservée [Bern 99].

- Chaque cellule contenant un 0-simplexe de contrainte peut aussi être maillée de sorte à inclure en plus ce point dans le maillage. Ensuite, la géométrie du maillage global est modifiée de manière à respecter au mieux les contraintes et à ne pas créer de recouvrement entre les simplexes [Frey 98].

Il faut noter que le maillage final n'est pas celui du domaine d'étude Ω , mais celui d'un quadrilatère ou d'un parallélépipède rectangle *englobant* Ω . Beaucoup de simplexes extérieurs à Ω ont donc été générés, et doivent être retirés du maillage.

Avantages et inconvénients de la méthode

L'inconvénient majeur de cette approche est de ne pas respecter strictement les simplexes de contrainte. En effet, rien n'est fait pour assurer qu'il existe au sein du maillage global un ensemble de 1- et éventuellement 2-simplexes correspondant aux contraintes. Par conséquent, ces contraintes ne sont qu'*approximées* géométriquement. De plus, des post-traitements sont souvent nécessaires pour améliorer la beauté des simplexes du maillage ([Shewchuk 97], [Owen 98]).

Toutefois, l'intérêt de l'utilisation de *quadtrees* ou d'*octrees* réside dans le contrôle très fort de la taille des simplexes générés. En effet, celle-ci est directement gouvernée de manière très simple par la taille des cellules de l'arbre. Pour éviter de trop brusques variations, qui induisent des simplexes de forme peu acceptable, la différence maximum de niveaux de subdivision entre cellules adjacentes de l'arbre est souvent limitée à 1. Ce contrôle est souvent exploité par les méthodes de propagation de front décrites précédemment [Martha 01].

4.1.3 Génération de maillages de Delaunay

Qu'est-ce qu'un maillage de Delaunay ?

Premières définitions

Soit P un ensemble $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{m-1}\}$ de m points de l'espace bidimensionnel, avec $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j$ $\forall i \neq j$. La *triangulation de Delaunay* de P , introduite dans [Delaunay 34], est l'unique complexe simplicial dont les sommets sont les éléments de P , et dont tous les triangles ont un cercle circonscrit vide, c'est-à-dire ne contenant aucun point de P dans leur intérieur. Cette définition se généralise aux *complexes simpliciaux de Delaunay* de dimension n , dont les n -sphères circonscrites aux n -simplexes sont vides (voir figure 4.3), et qui sera désormais noté $\mathcal{T}_n(P)$. En particulier, dans une *tétraédration de Delaunay* de points de l'espace tridimensionnel, toutes les sphères circonscrites aux tétraèdres du maillage sont vides.

Les maillages de simplexes de Delaunay peuvent être définis d'une autre manière : soit $\mathcal{V}(\mathbf{x}_i)$ ($0 \leq i < m$) la région de l'espace n -dimensionnel associée au point \mathbf{x}_i de P , définie comme suit (équation 4.1) :

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}_i) = \{\mathbf{x}, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\| \forall j \neq i, j \in [0, m]\} \quad (4.1)$$

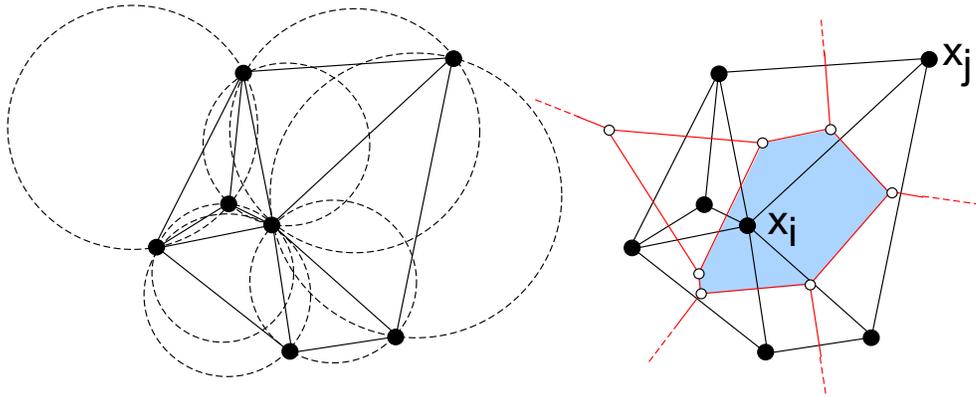


Figure 4.3 À gauche : la triangulation des points figurés en noir est de Delaunay car tous les triangles ont un cercle circonscrit vide. À droite : le *diagramme de Voronoï* (en rouge) en est un complexe cellulaire dual. Ses sommets sont les centres des cercles circonscrits aux triangles (points blancs). Un point appartenant à la *cellule de Voronoï* associée au sommet \mathbf{x}_i , figurée en bleu, est plus proche de \mathbf{x}_i que de tous les autres sommets. Celle associée à \mathbf{x}_j est non-bornée car ce sommet est situé sur le bord de la triangulation, c'est-à-dire sur l'enveloppe convexe de ses sommets.

En d'autres termes, $\mathcal{V}(\mathbf{x}_i)$ est la région de l'espace qui contient tous les points qui sont plus proches (au sens des distances euclidiennes) de \mathbf{x}_i que de tous les autres \mathbf{x}_j de P ($0 \leq j < m$). Cette région s'appelle la *cellule de Voronoï* associée au point \mathbf{x}_i [Voronoi 08]. Les figures 4.3 et 4.4 en donnent une illustration.

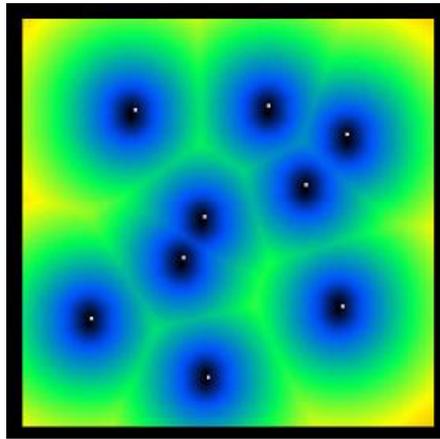


Figure 4.4 En calculant une distance euclidienne à un ensemble de points donnés (en blanc), les contours des *cellules de Voronoï* se dessinent au niveau des zones d'égales distances entre les couples de points (d'après [Ledez 03]).

Il est possible de montrer que chaque cellule de Voronoï est convexe, et que leur union forme un complexe cellulaire de dimension n , appelé *diagramme de Voronoï* de P . Ce complexe est le *dual* du complexe simplicial de Delaunay $\mathcal{T}_n(P)$. D'un point de vue géométrique, un sommet du diagramme de Voronoï situé à la jonction des cellules $\{\mathcal{V}(\mathbf{x}_i), \dots, \mathcal{V}(\mathbf{x}_j)\}$ est le centre des n -sphères circonscrites aux points $\{\mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_j\}$, comme

le montre la figure 4.3. Par ailleurs, les cellules du diagramme de Voronoï de l'ensemble P ne sont pas toutes des polytopes bornés. En effet, si \mathbf{x}_i est sur l'enveloppe convexe de P ($0 \leq i < m$), alors $\mathcal{V}(\mathbf{x}_i)$ est non-bornée. Ainsi, l'ensemble des p -simplexes de $\mathcal{T}_n(P)$ qui sont situés sur son bord ($0 \leq p < n$) constituent l'enveloppe convexe de P .

Les diagrammes de Voronoï ont de très nombreuses applications, dans les études de voisinage principalement [Ledez 03]. Il faut noter que ces diagrammes peuvent être définis non seulement sur des ensembles de points, mais aussi sur des ensembles de segments [Held 01], de polygones ou encore de polyèdres. Par ailleurs, d'autres métriques que la métrique euclidienne peuvent être utilisées pour calculer les distances.

Propriétés des maillages de Delaunay

Au sein du complexe $\mathcal{T}_n(P)$, les n -sphères circonscrites aux n -simplexes (triangles, tétraèdres) sont vides. Une première propriété importante est que tous les p -simplexes ($1 \leq p < n$) de $\mathcal{T}_n(P)$ ont alors eux-mêmes une n -sphère circonscrite vide (voir figure 4.5). La réciproque est également vraie : si tous les p -simplexes ($1 \leq p < n$) de $\mathcal{T}_n(P)$ ont une n -sphère circonscrite vide, alors les n -sphères circonscrites aux n -simplexes de $\mathcal{T}_n(P)$ sont vides [Shewchuk 97]. Ainsi, tous les simplexes de $\mathcal{T}_n(P)$ sont dits *de Delaunay*. Notons que les p -simplexes ($1 \leq p < n$) du maillage n'ont pas une unique n -sphère circonscrite. S'ils sont *de Delaunay*, alors ils ont au moins une n -sphère circonscrite vide, et en particulier celle de plus petit rayon.

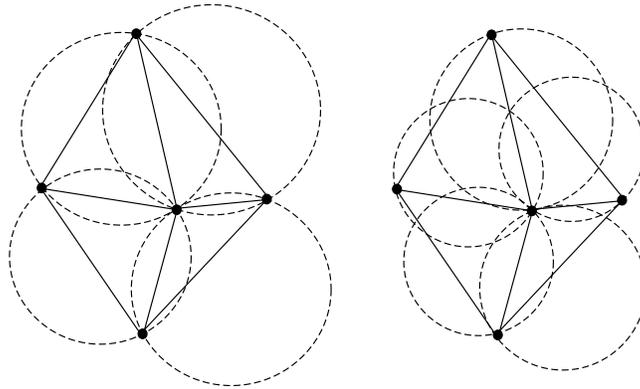


Figure 4.5 Dans une triangulation de Delaunay, tous les triangles ont un cercle circonscrit vide (à gauche). Ceci implique que toutes les arêtes ont *au moins un* cercle circonscrit vide (à droite), et réciproquement. Notons qu'il n'est pas nécessaire de considérer les arêtes du bord de la triangulation, car il est toujours possible de leur trouver un cercle circonscrit qui soit vide.

Au regard de ces propriétés, il peut être démontré que le complexe simplicial de Delaunay $\mathcal{T}_n(P)$ est unique. Ainsi, s'il existe au moins une n -sphère circonscrite à p points distincts de l'ensemble P qui soit vide (ce qui constitue un test non ambigu), alors il existe nécessairement dans $\mathcal{T}_n(P)$ un p -simplexe formé par ces points ($0 \leq p \leq n$). Cette propriété d'unicité peut donc aussi s'exprimer sous cette forme : s'il n'existe pas dans $\mathcal{T}_n(P)$ un p -simplexe formé par p points distincts de P , alors il n'existe pas de n -sphère

circonscrite à ces points qui soit vide.

Toutefois, des sous-ensembles *dégénérés* de P peuvent briser l'unicité du n -complexe simplicial de Delaunay $\mathcal{T}_n(P)$. En effet, si au moins $(n+2)$ points de P sont *cosphériques*, c'est-à-dire situés sur le bord d'une n -sphère qui ne contient pas d'autres points de P , alors le centre de cette n -sphère est nécessairement un sommet du diagramme de Voronoï de P situé à la jonction d'au moins $(n+2)$ cellules de Voronoï. Ceci implique que le *dual* du diagramme est constitué certes de n -simplexes, mais aussi localement de polytopes à au moins $(n+2)$ sommets [Fleischmann 99], comme le montre la figure 4.6. Pour constituer un complexe simplicial, il faut donc diviser chacun de ces polytopes en un ensemble de n -simplexes dont la topologie n'est pas définie : $\mathcal{T}_n(P)$ n'est donc pas unique. Ces configurations ne sont pas les seuls cas de dégénérescence. En fait, tous les sous-ensembles de P formés de $(n+2-k)$ points situés sur le bord d'une $(n-k)$ -sphère qui ne contient pas d'autres points de P peuvent être qualifiés de *cosphériques* ($0 \leq k \leq n-2$).

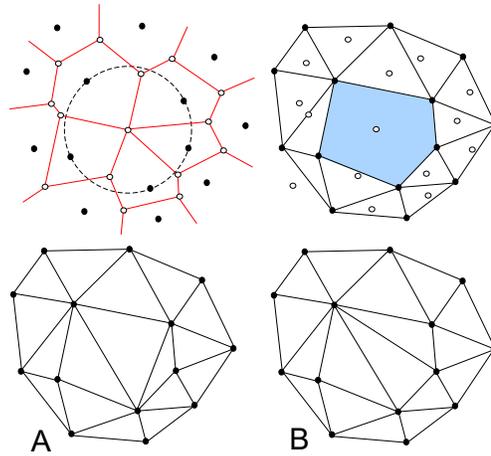


Figure 4.6 En haut : Les sommets (points blancs) d'un diagramme de Voronoï d'un ensemble de points contenant des sous-ensembles *dégénérés* (ici 5 points sont cocycliques) correspondent localement à la jonction de plus de 3 cellules (à gauche). La maillage dual n'est alors pas entièrement constitué de triangles (à droite). En bas : il existe donc plusieurs triangulations de Delaunay de l'ensemble de points.

D'autres propriétés fondamentales des n -complexes simpliciaux de Delaunay concernent la beauté des n -simplexes du maillage : en effet, de tous les complexes simpliciaux possibles de l'ensemble de points P , $\mathcal{T}_n(P)$ est celui qui a la plus faible *granularité* [Rajan 91]. La granularité d'un complexe simplicial est la valeur la plus élevée des rayons des plus petites n -sphères contenant les n -simplexes du complexe (ce ne sont pas forcément les n -sphères circonscrites aux n -simplexes). Cette propriété est la seule qui soit valable en dimension n . Dans le cas particulier de la dimension 2, la triangulation de Delaunay est aussi celle qui maximise le plus petit angle au sommet des triangles, et qui minimise le rayon du plus grand cercle circonscrit aux triangles. Grâce à ces propriétés, un complexe simplicial de Delaunay de dimension n est en général constitué de beaux p -simplexes ($2 \leq p \leq n$), autrement dit proches de leur forme régulière (voir partie I). Ces maillages sont par conséquent très attractifs.

Méthodes de construction d'un maillage de Delaunay

Le critère *des sphères vides* ne constitue pas en lui-même un algorithme pour générer le maillage de Delaunay $\mathcal{T}_n(P)$ d'un ensemble P de m points distincts $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{m-1}\}$. Cependant, dans un tel algorithme, il doit guider la manière avec laquelle sont connectés les nœuds. Il existe de très nombreuses méthodes pour construire des maillages de Delaunay, et en particulier dans le cas bidimensionnel des triangulations ([Shewchuk 97], [Fleischmann 99]). Une présentation de ces méthodes et une comparaison de leurs performances sont données dans [Su 97]. Par choix, nous ne présentons ici que celles qui peuvent être utilisées à la fois en dimension 2 et 3.

Méthodes incrémentales

Avec ces méthodes, les points de l'ensemble P sont insérés un par un dans un n -complexe simplicial qui est de Delaunay avant la première insertion, et maintenu comme tel après chaque insertion d'un nouveau point dans le maillage (voir figure 4.7). Elles nécessitent donc d'avoir à disposition un complexe initial $\mathcal{T}_n(P)$ englobant tous les points de P mais où aucun point n'a encore été ajouté. Ce complexe prend en général la forme d'un quadrilatère divisé en deux triangles adjacents pour $n = 2$ basés sur 4 sommets *artificiels*, et celle d'un parallélépipède rectangle divisé en 5 ou 6 tétraèdres adjacents basés sur 8 sommets *artificiels* pour $n = 3$. Deux principales voies sont possibles pour ensuite réaliser chaque insertion d'un point \mathbf{x}_i de P ($0 \leq i < m$) :

- La première consiste à trouver tout d'abord le n -simplexe de $\mathcal{T}_n(P)$ qui contienne \mathbf{x}_i et à le supprimer. Cette suppression crée une cavité bordée par $(n + 1)$ $(n - 1)$ -simplexes étoilés par rapport à \mathbf{x}_i , c'est-à-dire visibles depuis ce point. À partir de cette cavité, $(n + 1)$ nouveaux n -simplexes ayant \mathbf{x}_i comme sommet sont ensuite construits. Ces nouveaux éléments ne sont pas dans le cas général de Delaunay, comme le montre la figure 4.7. Pour qu'ils le soient effectivement, des changements locaux de la connexion des nœuds sont alors réalisés. Le maillage $\mathcal{T}_n(P)$ est alors de Delaunay, et une nouvelle insertion peut avoir lieu. Cette approche, dont le succès est garanti, est par exemple proposée dans [Guibas 92] pour les triangulations, et dans [Joe 91] ou [Mücke 98] pour les tétraédrisations.
- La deuxième, introduite simultanément dans [Bowyer 81] et [Watson 81], commence de manière similaire à la première, à savoir par trouver le n -simplexe de $\mathcal{T}_n(P)$ qui contienne \mathbf{x}_i . Ensuite, ce simplexe et ses voisins sont récursivement examinés pour déterminer ceux qui contiennent \mathbf{x}_i dans leur n -sphère circonscrite, et à les supprimer si c'est le cas. Cette suppression crée une cavité bordée par des $(n - 1)$ -simplexes étoilés par rapport à \mathbf{x}_i , c'est-à-dire visibles depuis ce point. À partir de cette cavité, des nouveaux n -simplexes ayant \mathbf{x}_i comme sommet sont ensuite construits, comme le montre la figure 4.7. Il est possible de montrer que ces nouveaux éléments sont nécessairement de Delaunay. Une nouvelle insertion peut alors avoir lieu.

L'algorithme de *Bowyer-Watson*, présenté ci-dessus, est un standard de la génération de maillages de Delaunay par méthodes incrémentales. Ces méthodes sont relativement simples à réaliser, et très robustes à condition d'éviter certains problèmes de précision

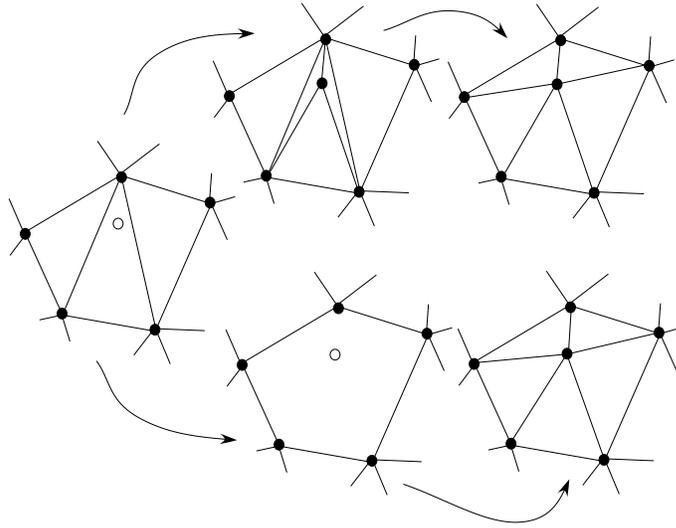


Figure 4.7 Deux méthodes incrémentales pour construire une triangulation de Delaunay. En haut : une cavité est formée en éliminant du maillage le triangle contenant le point à ajouter (en blanc), trois nouveaux triangles sont créés, et des changements de connexions sont réalisés de manière à ce que les triangles et les arêtes soient de Delaunay. En bas : une cavité est formée en éliminant du maillage tous les triangles contenant le point à ajouter dans leur cercle circonscrit.

numérique ([Borouchaki 95], [Devilleers 03]) : par exemple, elles nécessitent la mise en place de mécanismes permettant de trouver dans $\mathcal{T}_n(P)$ un n -simplexe contenant un point donné, ce qui peut se faire de manière exacte à l'aide de prédicats géométriques localisant ce point par rapport à des $(n - 1)$ -hyper-plans [Mücke 98]. Il est aussi possible d'utiliser de tels prédicats pour déterminer de manière exacte si un point donné est situé dans une n -sphère circonscrite à un n -simplexe de $\mathcal{T}_n(P)$ [George 99].

Il faut noter que le maillage final obtenu par ces méthodes n'est pas celui de l'ensemble de points P , car il contient aussi des n -simplexes s'appuyant sur les sommets *artificiels* d'un domaine qui englobe P . Ils doivent donc être supprimés, afin que le bord de $\mathcal{T}_n(P)$ soit effectivement l'enveloppe convexe de P .

Méthode par balayage

Soient $(d_0, d_1, \dots, d_{n-1})$ les n dimensions de l'espace auquel appartiennent les points de l'ensemble P , et supposons que les points de cet ensemble soient classés dans une liste L par coordonnée croissante selon d_0 . Pour éviter toute ambiguïté, si deux points de P ont la même coordonnée selon d_i , alors ils sont discriminés par leur coordonnée selon d_{i+1} ($0 \leq i \leq n - 2$). Initialisons maintenant un *front* par deux $(n - 1)$ -simplexes adjacents reliant les $(n + 1)$ points de P de coordonnée minimum selon d_0 , et enlevons ces points de la liste L . La construction du maillage de Delaunay $\mathcal{T}_n(P)$ des points de P par une méthode de balayage est basée sur les mécanismes de base suivants (voir figure 4.8) :

1. Deux $(n - 1)$ -simplexes du front adjacents définissent un *pseudo- n -simplexe* dont le centre et le rayon de la n -sphère circonscrite sont connus. Avec ces données, il est

possible de calculer le point de cette sphère de coordonnée maximum selon d_0 . Ce point est inséré en bonne place dans la liste L .

2. Si le premier élément de L (de coordonnée minimum selon d_0) est un point associé à un *pseudo- n -simplexe*, alors le nouveau n -simplexe correspondant est ajouté à $\mathcal{T}_n(P)$, et cet élément est retiré de L . Par construction, ce nouveau n -simplexe est de Delaunay, car il ne peut pas contenir de points de P .
3. Si le premier élément de L (de coordonnée minimum selon d_0) est un point de P , alors un nouveau $(n-1)$ -simplexe est formé à partir de ce point et du $(n-2)$ -simplexe du front le plus proche. Cet élément est retiré de L , et des points correspondant à des *pseudo- n -simplexes* y sont ajoutés ou retirés (voir point 1).
4. Le maillage $\mathcal{T}_n(P)$ est terminé lorsque la liste L est vide.

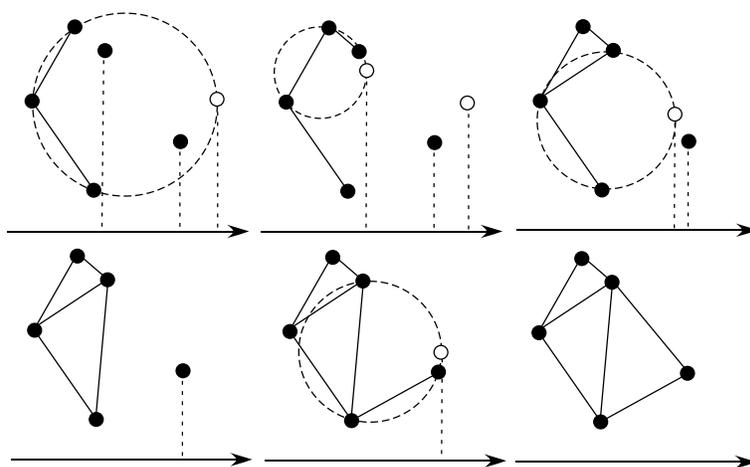


Figure 4.8 Construction d'une triangulation de Delaunay par balayage. Les points sont classés par coordonnée croissante selon l'axe horizontal. Les centres des cercles circonscrits aux *pseudo-triangles* sont en blanc.

Les méthodes par balayage sont en général moins rapides que les méthodes incrémentales, même si de nombreuses techniques peuvent les rendre plus efficaces ([Fortune 87], [Su 97], [Shewchuk 00-(2)]). Elles nécessitent de plus le maintien de plusieurs structures de données, ne serait-ce que la liste L , ce qui rend leur réalisation souvent compliquée [Shewchuk 02].

Méthode dite de Gift-Wrapping

Cette méthode maintient tout au long de la génération du maillage une liste de $(n-1)$ -simplexes constituant le bord de $\mathcal{T}_n(P)$, initialisée avec les $(n+1)$ faces de dimension $(n-1)$ d'un n -simplexe donné qui est de Delaunay. Ensuite, chacun des éléments de cette liste est associé à un point judicieusement choisi de P pour former un nouveau n -simplexe dont la n -sphère circonscrite soit vide, et l'ajouter au maillage. La liste est alors mise à jour et la procédure peut se répéter. Le maillage final obtenu est alors de Delaunay par

construction.

La mise en œuvre d'un algorithme basé sur ce mécanisme simple est toutefois délicate, car la difficulté est de trouver *rapidement* les points de P qui sont des candidats valides pour la formation des nouveaux n -simplexes du maillage [Dwyer 91]. Par ailleurs, cette méthode est souvent mise en défaut par les sous-ensembles dégénérés de P , qui peuvent induire des recouvrements dans le maillage [Shewchuk 98-(1)]. Il existe des solutions à ces problèmes, mais l'algorithme final est en général rendu beaucoup plus lent que ceux inspirés des méthodes incrémentales ou par balayage ([Su 97], [Shewchuk 02]).

Méthodes de respect des contraintes dans un maillage de Delaunay

Les méthodes présentées précédemment permettent de construire un maillage de Delaunay de dimension n basé sur un ensemble de points P , noté $\mathcal{T}_n(P)$. Cependant, ce maillage est potentiellement *contraint* et doit inclure des p -simplexes donnés ($0 \leq p \leq n - 1$), supposés ne pas s'intersecter. Le fait d'incorporer les sommets de ces contraintes dans le maillage ne garantit pas qu'elles soient naturellement honorées (sauf évidemment dans le cas trivial des 0-simplexes de contrainte). En effet, comme nous l'avons vu, ce n'est le cas que si les p -simplexes de contrainte sont de Delaunay ($1 \leq p \leq n - 1$), condition qui n'est dans le cas général pas vérifiée. Nous présentons maintenant trois approches bien distinctes pour contraindre un maillage de Delaunay. Chacune d'entre elles a plusieurs dénominations ; nous suivons ici celles données par [George 97] et [Shewchuk 02]. Comme nous allons le voir, le respect de ces contraintes nécessite parfois l'insertion de nouveaux points dans le maillage, appelés *points de Steiner*.

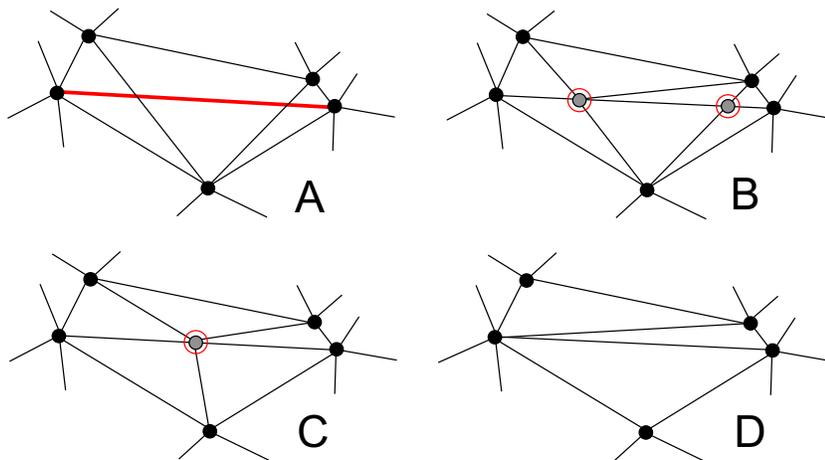


Figure 4.9 Méthodes de respect des contraintes dans un maillage de Delaunay (les éventuels *points de Steiner* sont gris et encadrés en rouge). (A) : la contrainte à respecter dans la triangulation est l'arête rouge plus épaisse. (B) : approche par cassage des contraintes. (C) : approche conforme. (D) : approche par forçage des contraintes.

Approche par cassage des contraintes

Cette approche, proposée par exemple dans [Hazlewood 93] et [Cavalcanti 99], produit des maillages qui sont dits *approximativement de Delaunay*. Son mécanisme est relativement simple : si un p -simplexe de contrainte n'est pas présent dans $\mathcal{T}_n(P)$ ($1 \leq p \leq n - 1$), alors des points de Steiner sont insérés dans le maillage aux endroits précis où le simplexe de contrainte intersecte les q -simplexes de $\mathcal{T}_n(P)$ ($1 \leq q \leq n - 1$), comme le montre la figure 4.9. Cette approche assure donc l'existence des simplexes de contrainte sous la forme d'une partition de ces simplexes dans le maillage résultant. Autrement dit, chaque p -simplexe de contrainte est présent dans $\mathcal{T}_n(P)$ sous la forme d'une union de p -simplexes de $\mathcal{T}_n(P)$ ($1 \leq p \leq n - 1$).

Les contraintes ne sont donc pas honorées *strictement* dans $\mathcal{T}_n(P)$, elles ont été au besoin subdivisées et ce sont ces subdivisions qui sont présentes dans $\mathcal{T}_n(P)$ ([Frey 99], [George 99]). Lors de ce processus, l'insertion des points de Steiner est faite de manière à créer dans la mesure du possible des simplexes de Delaunay (d'où le nom de cette méthode), mais aussi et surtout de manière à éviter de détruire des simplexes qui correspondent à des contraintes déjà honorées. Le maillage final $\mathcal{T}_n(P)$ n'est donc pas entièrement de Delaunay. Cette approche est garantie de succès quelle que soit la dimension du maillage (en particulier pour $n = 2$ et $n = 3$), et elle est pour cette raison souvent utilisée. Toutefois, à proximité des contraintes, les simplexes de $\mathcal{T}_n(P)$ peuvent être de qualité très médiocre, que ce soit au niveau de leur forme ou de leur taille.

Approche conforme

Cette méthode repose sur la construction d'un ensemble de simplexes de contrainte qui soient tous de Delaunay dans l'espace à n dimensions considéré, afin qu'ils soient naturellement respectés dans $\mathcal{T}_n(P)$. Ce n'est généralement pas le cas des simplexes de contrainte initiaux, et ceux-ci doivent alors être remplacés. Ces substitutions se font à l'aide d'insertion de points de Steiner ne créant que des simplexes de Delaunay, mais localisés à des endroits judicieusement choisis, ne serait-ce que pour garantir que le processus arrive à terme (voir entre autres [Ruppert 92], [Pébay 98], [Cavalcanti 99], [Shewchuk 00-(1)], [Murphy 01], [Boivin 02], [Cohen-Steiner 02], ou encore [Miller 02]). Là encore, les contraintes ne sont donc pas *strictement* honorées : ce sont seulement des unions de p -simplexes du maillage ($1 \leq p \leq n - 1$) qui les représentent (voir figure 4.9).

Le principal attrait de cette méthode est de générer un maillage final $\mathcal{T}_n(P)$ qui est de Delaunay, constitué de simplexes de forme optimale. Cependant, le nombre de points de Steiner nécessaires prend souvent des proportions très importantes [Shewchuk 02], et par conséquent, la taille des simplexes du maillage final peut ne plus correspondre aux éventuels critères de taille imposés. Par exemple, pour des cas tridimensionnels, il n'est pas rare que le nombre final de sommets dans la tétraédrisation soit entre 3 et 10 fois plus grand que le nombre de sommets des simplexes de contrainte initiaux [Cohen-Steiner 02]. Ceci peut ralentir de manière conséquente les éventuelles simulations de type éléments finis réalisés sur ces maillages (voir partie I).

Approche par forçage des contraintes

Le but de cette méthode, contrairement aux deux précédentes, est d'assurer la présence de chaque p -simplexe de contrainte ($1 \leq p \leq n - 1$) sous la forme d'un unique p -simplexe de $\mathcal{T}_n(P)$. Aucun point de Steiner n'est inséré théoriquement dans le maillage, et les contraintes sont alors honorées *strictement*, comme le montre la figure 4.9. Le maillage obtenu est dit *Contraint-Delaunay*¹. Les techniques utilisées pour parvenir à ce résultat sont nombreuses [Owen 98]. La plupart font intervenir des heuristiques et fonctionnent par des modifications locales de la connexion des nœuds de $\mathcal{T}_n(P)$ situés au voisinage des simplexes de contrainte absents, de manière à faire apparaître ces-derniers dans le maillage (voir par exemple [Chew 89], [Joe 92], [Weatherhill 94], [Borouchaki 95], [George 99]). D'autres techniques consistent à modifier les algorithmes de génération de maillages de Delaunay par balayage ou Gift-Wrapping pour prendre en compte directement les contraintes ([Shewchuk 00-(2)], [Shewchuk 02]).

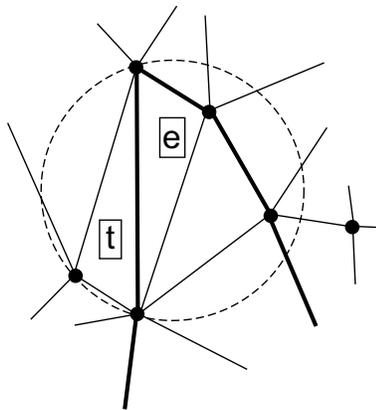


Figure 4.10 Le triangle t est Contraint-Delaunay, car les points qui sont contenus dans son cercle circonscrit (en pointillés) ne sont pas *visibles* depuis son intérieur, du fait de la présence d'arêtes de contrainte (lignes plus épaisses). L'arête e est également Contraint-Delaunay, car il est possible de lui trouver un cercle circonscrit qui ne contienne pas de points *visibles* depuis son intérieur.

Quoi qu'il en soit, après forçage des contraintes, le maillage n'est bien sûr plus de Delaunay ([George 97], [Owen 98]), car certains de ses simplexes n'ont pas de n -sphère circonscrite qui soit vide. Seulement, dans ce maillage, si un p -simplexe de $\mathcal{T}_n(P)$ n'est pas de Delaunay ($1 \leq p \leq n$), alors il n'existe pas de ligne joignant un point de son intérieur et un sommet du maillage contenu dans une de ses n -sphères circonscrites, qui n'intersecte pas un $(n - 1)$ -simplexe de contrainte ([Shewchuk 97], [Baker 98]). Ces p -simplexes sont alors dits *Contraint-Delaunay*, comme le maillage auquel ils appartiennent (voir figure 4.10). Les maillages Contraint-Delaunay conservent une bonne partie des propriétés des maillages de Delaunay, y compris celles sur la qualité des éléments générés : ainsi, en dimension 2, parmi toutes les triangulations contraintes possibles où aucun point de Steiner n'a été ajouté, celle qui est Contraint-Delaunay maximise le plus petit angle

¹Dans la littérature de langue anglaise, ces maillages sont appelés indifféremment *Boundary-Constrained Delaunay Meshes* ou *Constrained Delaunay Meshes*, plus simplement.

au sommet des triangles [Shewchuk 00-(2)].

Malheureusement, pour un ensemble de p -simplexes de contrainte donnés ($0 \leq p \leq n - 1$), l'existence d'un maillage Constraint-Delaunay sans insertion de Point de Steiner n'est prouvée que pour $n = 2$. Pour des dimensions supérieures, il n'est pas possible de démontrer qu'un maillage Constraint-Delaunay existe (il existe même des cas où il est prouvé qu'il n'en existe pas), mais cela ne veut pas dire qu'il n'existe pas, et les techniques présentées précédemment fonctionnent la plupart du temps [George 97]. Cependant, si elles échouent, il est nécessaire d'insérer des points de Steiner, mais dans une moins grande proportion que les deux approches précédentes ([George 91], [Shewchuk 02]). Ces nouveaux points sont nécessairement des points internes pour les maillages *stricte-ment* Constraint-Delaunay ([Borouchaki 95], [Liu 00]), mais certaines approches autorisent l'ajout de points de Steiner situés à l'intérieur des p -simplexes de contrainte. Dans ce cas, ils seront présents dans le maillage sous la forme d'une union de p -simplexes de $\mathcal{T}_n(P)$, et le maillage est alors dit *Constraint-Delaunay Conforme* ([Shewchuk 98-(1)], [Murphy 01]). Quoiqu'il en soit, la détermination du nombre minimal et de la position de ces nouveaux points constitue un problème délicat.

4.2 Techniques propres aux maillages de surfaces tridimensionnelles

Dans le cadre de la modélisation tridimensionnelle, les données, quelle que soit la forme sous laquelle elles se présentent, s'appuient sur des points de l'espace. Ceci implique que les résultats connus sur la génération de maillages à base de triangles *dans le plan*, présentés dans la partie précédente de ce chapitre (partie 4.1), ne sont pas utilisables directement dans le cas des surfaces clairement curvilinéaires auxquelles nous avons affaire (appelées aussi surfaces $2D$ et $1/2$) dans le domaine des géosciences [Mallet 02]. Cette partie présente les solutions les plus couramment employées pour résoudre ce problème : certaines consistent à générer des triangles directement dans l'espace tridimensionnel ; d'autres consistent à définir un espace bidimensionnel dans lequel le maillage est construit, puis à revenir dans l'espace tridimensionnel par une transformation appropriée [Owen 98]. Dans notre travail, une solution originale de ce dernier type a été mise en œuvre, et nous expliquerons pourquoi et comment.

4.2.1 Maillage des surfaces dans l'espace tridimensionnel

Cette méthode consiste à mailler une surface curvilinéaire quelconque directement dans l'espace tridimensionnel avec une approche de type propagation de front. Pour que le front puisse progresser correctement, des données sur la normale à la surface sont nécessaires [Owen 98]. Il faut de plus assurer que les sommets du maillage sont bien situés effectivement sur la surface, et que les triangles générés ne se recouvrent pas, tâche plus délicate et surtout plus coûteuse en temps calcul que dans un espace bidimensionnel.

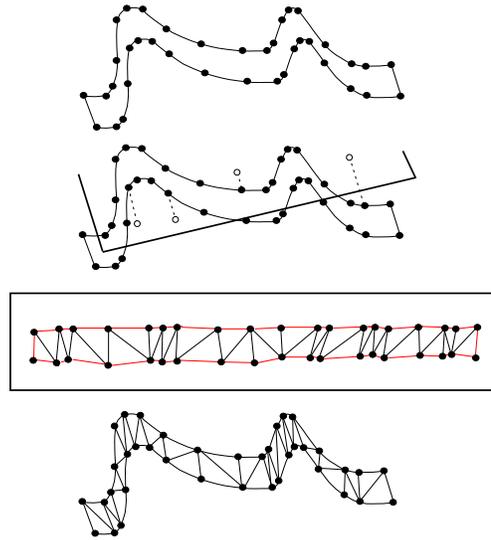


Figure 4.11 Principe de la triangulation par projection, avec de haut en bas : contraintes dans l'espace tridimensionnel (ligne polygonale fermée), projection dans le plan moyen, triangulation contrainte dans le plan moyen (les arêtes de contrainte sont en rouge), et retour dans l'espace tridimensionnel.

4.2.2 Méthodes par projection des contraintes

Principe de la projection

La triangulation à construire est contrainte par un ensemble de p -simplexes ($0 \leq p \leq 1$) plongés dans un espace tridimensionnel. Un moyen simple de générer les triangles est de projeter orthogonalement l'ensemble de ces simplexes dans un plan (mais en gardant une trace de la géométrie des sommets), puis d'utiliser une méthode classique de triangulation contrainte dans l'espace bidimensionnel correspondant, comme le montre la figure 4.11. Une fois la triangulation terminée, il suffit de restaurer la géométrie des sommets pour obtenir le maillage final. Par ailleurs, les positions tridimensionnelles des éventuels points de Steiner ajoutés à la triangulation sont obtenues par un procédé d'interpolation barycentrique.

Inconvénients de la méthode

Même si cette technique est très simple, elle n'est souvent pas garantie de fonctionner [Mallet 02]. En effet, le plan doit tout d'abord être choisi tel que les 1-simplexes une fois projetés ne s'y intersectent pas : si c'est le cas, il ne devient plus possible d'honorer ces contraintes dans la triangulation. Ce problème n'est pas trivial, et dans beaucoup de configurations, il n'a pas de solution. C'est le cas par exemple lorsque les 1-simplexes de contrainte forment une ou plusieurs lignes polygonales tridimensionnelles complexes, ouvertes ou fermées. Il existe toutefois des techniques permettant de générer une triangulation honorant ces contraintes ([Conraud 95], [Mallet 02]).

Par ailleurs, même si les 1-simplexes de contrainte ne s'intersectent pas dans le plan de projection, le succès de la méthode n'est pas non plus garanti : la construction d'une

triangulation honorant les contraintes est certes possible, mais la surface correspondante dans l'espace tridimensionnel peut comporter soit de nombreuses intersections entre ses simplexes, soit ne pas reproduire la géométrie souhaitée, ce qui la rend inutilisable. Il n'existe pas de moyen simple pour assurer que le plan de projection choisi assure que la surface générée soit valide en trois dimensions [Conraud 95]. Cette méthode a donc peu d'applications dans un contexte de *remaillage* de surfaces par exemple.

4.2.3 Remaillage des surfaces dans un espace paramétrique

Calcul d'une paramétrisation sur une surface triangulée

Problématique

Cette méthode suppose que la surface tridimensionnelle est déjà représentée par un 2-complexe simplicial initial C , mais qui ne satisfait pas aux critères de forme ou de taille des simplexes imposés. Cette surface doit donc être *remaillée* en conséquence et rester géométriquement proche de sa forme initiale [Hormann 01]. Pour cela, le maillage initial doit être mis en bijection avec un domaine bidimensionnel D inclus dans R^2 , de manière à pouvoir y générer une triangulation ([Botsch 01], [Alliez 02], [Alliez 03]). La fonction Φ^{-1} , qui à un point de D associe un point de l'espace tridimensionnel R^3 situé sur C , est appelée *paramétrisation* de C (équation 4.2) :

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D, D \subset R^2 \rightarrow \Phi^{-1}(\mathbf{p}) = \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in C, C \subset R^3 \quad (4.2)$$

Le domaine D est appelé *domaine paramétrique* (voir figure 4.12). Par définition, la fonction Φ^{-1} est bijective. Elle a donc une fonction inverse Φ , appelée *paramétrisation inverse* de C , définie comme suit (équation 4.3) :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in C, C \subset R^3 \rightarrow \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{p} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D, D \subset R^2 \quad (4.3)$$

Si $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{m-1}\}$ sont les m sommets du complexe simplicial C , les valeurs de la paramétrisation inverse Φ sont stockées dans C sous la forme d'une fonction discrète ϕ définie au niveau des \mathbf{x}_i ($0 \leq i \leq m-1$). De cette façon, Φ est une fonction définie par morceaux comme l'interpolation linéaire de ϕ sur chacun des triangles de C ([Lévy 98], [Mallet 02]), et si t^c est un triangle de C dont les trois sommets sont les points \mathbf{x}_i , \mathbf{x}_j et \mathbf{x}_k ($i, j, k \in [0, m[$), alors un point \mathbf{x} situé à l'intérieur de t^c a pour valeur de paramétrisation inverse (équation 4.4) :

$$\Phi(\mathbf{x}) = (1 - \lambda - \mu) \cdot \phi(\mathbf{x}_i) + \lambda \cdot \phi(\mathbf{x}_j) + \mu \cdot \phi(\mathbf{x}_k) \quad (4.4)$$

avec λ et μ les coordonnées barycentriques de \mathbf{x} dans le triangle t^c (comprises entre 0 et 1). Ainsi, la connaissance des valeurs de ϕ suffit pour définir complètement la paramétrisation inverse de C . Ces valeurs doivent être calculées avec soin, car il ne doit pas y avoir trop de *distorsion* entre les triangles t^c de C et leur image t^d dans le domaine paramétrique

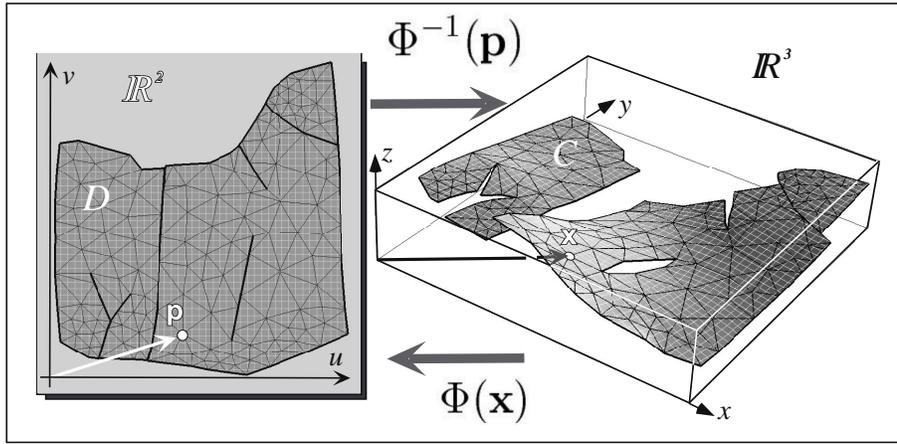


Figure 4.12 La fonction de paramétrisation inverse Φ associe des points du complexe simplicial tridimensionnel C à des points du domaine paramétrique bidimensionnel D , et la fonction de paramétrisation Φ^{-1} est son inverse (d'après [Mallet 02]).

D . Autrement dit, il est souhaitable que la paramétrisation conserve le plus possible les *distances* et les *angles* ([Owen 98], [Lévy 99], [Sander 01]). De cette façon, un triangle de forme régulière dans D aura une forme quasi-régulière dans R^3 . Mathématiquement, une distorsion nulle implique que le tenseur métrique fondamental $\underline{\mathbf{G}}$ associé à la fonction de paramétrisation Φ^{-1} soit égal au tenseur unité sur tout le domaine D [Mallet 02], soit (équation 4.5) :

$$\forall \mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D, \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi^{-1}}{\partial u^2}(u_0, v_0) & \frac{\partial^2 \Phi^{-1}}{\partial v \partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial^2 \Phi^{-1}}{\partial u \partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial^2 \Phi^{-1}}{\partial v^2}(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Cette équation peut se scinder en deux équations distinctes, l'une assurant la préservation des distances (équation 4.6), et l'autre assurant la préservation des angles (équation 4.7) :

$$\forall \mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D, \frac{\partial^2 \Phi^{-1}}{\partial u^2}(u_0, v_0) = \frac{\partial^2 \Phi^{-1}}{\partial v^2}(u_0, v_0) = 1 \quad (4.6)$$

$$\forall \mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D, \frac{\partial^2 \Phi^{-1}}{\partial u \partial v}(u_0, v_0) = 0 \quad (4.7)$$

Si l'on imagine que les valeurs de la paramétrisation inverse sont deux propriétés scalaires u et v définies sur C , ces conditions de non-distorsion sur Φ^{-1} contraignent le *gradient* de ces propriétés sur la triangulation : les vecteurs tangents aux lignes iso- u et iso- v doivent être en tout point de C orthogonaux et de même longueur, ce qui correspond dans l'idéal à une paramétrisation dite *conforme* [Lévy 02]. Il existe de très nombreuses méthodes pour calculer des valeurs de paramétrisation inverse sur les nœuds de C qui minimisent la distorsion ([Lévy 98], [Mallet 02], [Khodakovsky 03]) ; elles ne seront pas

discutées ici dans le détail.

Cette technique s'applique très bien dans notre contexte de travail. En effet, si l'on souhaite générer une triangulation contrainte pour matérialiser la géométrie d'une surface radiale d'un *Soft Frame Model*, il est tout à fait possible de calculer dans un premier temps une paramétrisation d'un des enfants de cet élément radial. Ensuite, si l'on associe aux sommets des simplexes de contrainte des coordonnées dans le domaine paramétrique correspondant, la construction du maillage peut alors être effectuée sans problème, la forme tridimensionnelle des triangles étant toutefois directement affectée par la distorsion de la paramétrisation.

Techniques de paramétrisation

Dans notre contexte, une autre contrainte peut être ajoutée au calcul de la paramétrisation : en effet, il est nécessaire qu'il n'y ait pas de recouvrements entre les images des triangles de C dans le domaine paramétrique [Hormann 01]. Ceci arrive en particulier près des paires de *bords internes* des horizons géologiques du modèle surfacique ou volumique que nous considérons. Une solution simple consiste à faire en sorte que ces bords aient des images proches dans le domaine paramétrique [Lévy 99].

La plupart de techniques de paramétrisation conforme du complexe C sont basées sur l'inversion d'une matrice creuse de dimension $(m \times m)$, dont les coefficients sont issus de la géométrie du maillage et d'autres contraintes éventuelles ([Sander 01], [Alliez 02], [Lévy 02], [Mallet 02]). Cette inversion est réalisée par exemple à l'aide d'un solveur de type *Gradient Conjugué* ou *SSOR* (avec préconditionnement). Les critères de non-distorsion de la paramétrisation sont donc minimisés au sens des moindres carrés. Pour fonctionner efficacement, une solution initiale est souvent nécessaire. Celle-ci peut se calculer très rapidement en utilisant la méthode décrite dans [Massot 02], que nous rappelons brièvement :

- Les gradients \mathbf{grad}_u et \mathbf{grad}_v des propriétés u et v sont supposés définis et constants sur les triangles de C , mais leurs valeurs sont stockées au niveau des m sommets de C , comme celles des propriétés u et v .
- Soit t^c un triangle de C , de sommets \mathbf{x}_i , \mathbf{x}_j et \mathbf{x}_k ($i, j, k \in [0, m]$), et de vecteur normal \mathbf{n}_t . Si la valeur des propriétés u et v sur le sommet \mathbf{x}_i , notées $u(\mathbf{x}_i)$ et $v(\mathbf{x}_i)$, sont connues, alors celle sur les autres sommets de t^c s'obtient de la manière suivante (équations 4.8 et 4.9) :

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}_j) &= u(\mathbf{x}_i) + \mathbf{grad}_u(t^c) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \\ u(\mathbf{x}_k) &= u(\mathbf{x}_i) + \mathbf{grad}_u(t^c) \cdot (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}_j) &= v(\mathbf{x}_i) + (\mathbf{n}_t \wedge \mathbf{grad}_u(t^c)) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \\ v(\mathbf{x}_k) &= v(\mathbf{x}_i) + (\mathbf{n}_t \wedge \mathbf{grad}_u(t^c)) \cdot (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \end{aligned} \quad (4.9)$$

- L'algorithme de calcul, basé sur les principes ci-dessus, est le suivant : les sommets du complexe C sont parcourus plusieurs fois de manière explosive. À chaque fois qu'un sommet \mathbf{x}_i est considéré ($i \in [0, m[$), la valeur de $\mathbf{grad}_u(\mathbf{x}_i)$ est utilisée pour calculer dans chacun des triangles t^c ayant \mathbf{x}_i comme sommet, à l'aide d'une projection, les valeurs $\mathbf{grad}_u(t^c)$ et $\mathbf{grad}_v(t^c)$ propres au triangle. Ensuite, à l'aide des équations 4.8 et 4.9, les valeurs des propriétés u et v sont mises à jour sur les sommets \mathbf{x}_j et \mathbf{x}_k de t^c différents de \mathbf{x}_i ($j, k \in [0, m[$), en même temps que celles des gradients $\mathbf{grad}_u(\mathbf{x}_j)$ et $\mathbf{grad}_u(\mathbf{x}_k)$ (à l'aide de $\mathbf{grad}_u(t^c)$), et $\mathbf{grad}_v(\mathbf{x}_j)$ et $\mathbf{grad}_v(\mathbf{x}_k)$ (à l'aide de $\mathbf{grad}_v(t^c)$).

Des traitements spécifiques permettent en plus de prendre en compte les contraintes sur les valeurs des propriétés u et v sur les paires de bords internes des surfaces, comme énoncé plus haut. Cet algorithme donne une solution initiale en général satisfaisante, sauf pour les surfaces fortement plissées ou possédant de nombreuses discontinuités [Massot 02].

Limites de la méthode

Seules les surfaces dites *développables* peuvent être paramétrisées sans aucune distorsion, car leur courbure totale est nulle en tout point [Lévy 99]. Cependant, les surfaces des modèles surfaciques et volumiques auxquels nous avons affaire ne sont en général jamais strictement développables, et leur paramétrisation présente donc toujours une certaine distorsion, quelle que soit la technique utilisée pour la calculer. Nous l'avons dit, cette distorsion induit proportionnellement des biais entre les propriétés géométriques des triangles générés dans l'espace paramétrique et celles de leur image dans l'espace tridimensionnel², qui sont celles qui nous intéressent au final (notamment leur forme). Deux solutions sont envisageables pour minimiser ce problème [Owen 98] :

1. Modifier les algorithmes de génération de triangulations afin qu'ils produisent dans l'espace paramétrique des triangles étirés ou anisotropes (cohérents avec les données du tenseur métrique associé à Φ^{-1}), tels que leur image dans l'espace tridimensionnel soit optimale [George 97],
2. Réduire au maximum la distorsion de la paramétrisation. Pour cela, une technique très répandue (surtout dans le domaine du plaquage de textures - [Sander 01], [Lévy 02]) consiste à réaliser une partition du complexe simplicial C en sous-ensembles adjacents de triangles, appelés *patches*. Les patches sont créés de telle sorte que leur paramétrisation puisse être conforme (autrement dit avec le minimum de distorsion). Ils sont ensuite remaillés indépendamment dans leur espace paramétrique, l'union des images tridimensionnelles de ces maillages formant le remaillage final de C . La figure 4.13 donne une illustration de ce principe.

²Il faut noter que même avec une paramétrisation conforme, les aires des triangles ne sont jamais conservées. Par conséquent, un maillage uniforme en taille dans l'espace paramétrique l'est rarement dans l'espace tridimensionnel ([Hormann 01], [Alliez 02]).

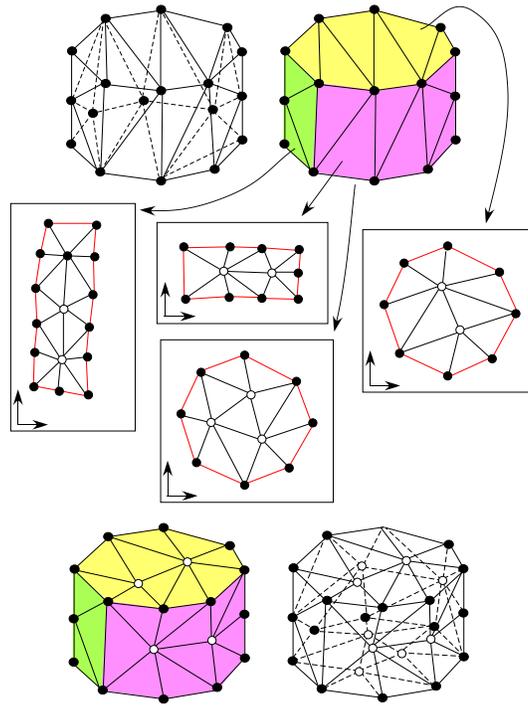


Figure 4.13 Principe du remaillage par patches d’une surface tridimensionnelle. La surface initiale (un prisme) est fermée et ne peut donc pas être paramétrisée de manière conforme. C’est le cas des 4 patches résultant de sa partition. Chacun peut être remaillé indépendamment dans un espace paramétrique (les contraintes sont en rouge et les nouveaux points en blanc). L’union des nouveaux maillages dans l’espace tridimensionnel forme le remaillage final de la surface.

Dans notre travail, nous avons opté pour la deuxième solution. Sa mise en œuvre nécessite de trouver les paramètres adéquats permettant la construction de patches qui sont *les plus développables possibles*. Ceci implique de prendre en compte d’une manière ou d’une autre la courbure du complexe simplicial C .

Calcul d’une partition de la surface en patches

Choix d’une technique de partition

Il existe deux grandes familles de techniques pour réaliser une partition en patches d’une surface tridimensionnelle (que nous supposons, sans perdre en généralité, faite de triangles) :

- La première consiste à extraire tout d’abord des lignes de forte courbure sur la surface, puis de contraindre les patches à avoir ces lignes comme frontière ([Lévy 02], [Alliez 02], [Alliez 03]).
- La deuxième consiste à partir d’une situation initiale avec un patch par triangle de la surface, puis à fusionner les patches entre eux jusqu’à atteindre des critères donnés ([Garland 01], [Inoue 01], [Sander 01], [Sheffer 01]).

Dans la majorité des cas, les lignes de forte courbure sont construites à partir d'un ensemble d'arêtes constituant les *crêtes* de la surface. Ces crêtes peuvent par exemple être identifiées à partir des *ellipsoïdes de corrélation* [Gumhold 01] calculés sur les sommets (qui caractérisent la forme générale du voisinage), ou bien à partir des plus fortes variations angulaires du vecteur normal associé aux triangles ([Kobbelt 01], [Alliez 03]). La distance aux lignes de forte courbure ainsi extraites est ensuite calculée sur les triangles de la surface. Les maxima locaux de cette fonction servent finalement de *graines* pour construire les patches, qui se rencontrent donc nécessairement au niveau des crêtes [Lévy 02]. Même si ces techniques donnent de bons résultats en pratique, elles sont peu applicables aux surfaces où il n'existe pas de variations franches de courbure (comme sur une sphère par exemple), car dans ces cas les crêtes identifiées n'ont pas de véritable signification. Des traitements spécifiques sont alors nécessaires [Lévy 02]. Ces configurations sont toutefois très courantes dans notre contexte : en effet, même si la morphologie des surfaces du sous-sol est parfois très perturbée, comme sur des dômes ou des lentilles de sel, les variations de courbure sont toujours relativement lisses.

En revanche, un procédé itératif de fusion de paires de patches (appelé *iterative pairwise merging* dans la littérature de langue anglaise) s'applique très bien aux surfaces tridimensionnelles que nous considérons. Les algorithmes basés sur ce principe sont tous construits sur le même mode ; les seuls points qui les différencient sont les critères permettant d'*ordonner* toutes les fusions possibles entre patches. En effet, à chaque étape du processus de croissance des patches, c'est la fusion la plus *avantageuse* qui est réalisée. Pour cela, de nombreux critères sont envisageables. Par la suite, nous noterons p_{ij} le patch virtuel résultant de la fusion entre deux patches adjacents p_i et p_j .

- Il est tout d'abord nécessaire d'obtenir les patches les plus plans possibles :
 - En général, la planarité de p_{ij} est mesurée par la distance au carré moyenne entre les points de p_{ij} et son plan moyen ([Garland 01], [Sander 01], [Pauly 02]), plan obtenu par exemple à l'aide d'une *analyse en composantes principales* (ACP). Tel quel, ce critère de planarité est inutilisable, car le vecteur normal au plan moyen de p_{ij} n'est pas toujours une bonne approximation des normales à ses triangles : par exemple, dans le cas d'un horizon géologique fortement plissé et retourné sur lui-même, les vecteurs normaux à la surface sont sur un côté du pli l'inverse du vecteur normal au plan moyen.
 - Pour prendre en compte ce phénomène, il faut associer à la planarité de p_{ij} un critère d'*orientation*, qui peut se définir comme la moyenne des écarts entre le vecteur normal à son plan moyen et les vecteurs normaux à ses triangles, moyenne pondérée par leur aire [Garland 01]. De cette façon, les fortes variations très localisées du vecteur normal sont ignorées [Inoue 01].
 - Un autre moyen pour obtenir des patches relativement plans est d'éviter les fusions entre patches dont les arêtes communes présentent localement de fortes courbures [Sheffer 01]. Toutefois, la mise en place de ce procédé nécessite de définir un seuil discriminant les courbures *acceptables* des autres, ce qui est peu

pratique car fortement dépendant de la surface considérée. Nous n'emploierons donc pas ce critère de planarité.

- Il est aussi nécessaire de contrôler la *taille* des patches (autrement dit leur aire), car ceux-ci doivent être de taille homogène. Il faut donc éviter les fusions entraînant la création de patches trop grands. Dans [Sheffer 01], les patches de petite taille sont encouragés à fusionner avec un de leurs patches voisins éventuellement de grande taille, sauf si le patch résultant dépasse une aire fixée par l'utilisateur. Une fois de plus, ceci nécessite de fixer une aire de patch limite, facteur très dépendant de la surface considérée. Cette solution n'est donc pas envisageable. Cette remarque vaut également pour la technique présentée dans [Inoue 01], qui garantit une aire minimale de patch. Laissons pour l'instant le problème du contrôle de la taille ouvert. Nous verrons par la suite la solution que nous y apportons.
- Enfin, les patches résultant de la partition doivent avoir une *forme* acceptable. Deux solutions sont alors envisageables : soit faire en sorte que les patches soient dans la mesure du possible de forme circulaire ([Garland 01], [Sander 01]), soit favoriser les fusions entre les patches qui ont les frontières communes les plus longues ([Inoue 01], [Sheffer 01]). Nous pensons que cette dernière solution est plus générale, car il n'est pas toujours possible ou souhaitable d'avoir des patches qui soient proches de disques. Par ailleurs, elle tend plus naturellement à éviter les configurations où un patch se retrouve inclus totalement à l'intérieur d'un autre.

Ainsi, dans notre approche, nous choisissons tout d'abord comme critère de planarité c_p celui défini dans [Inoue 01], qui traduit la variance du vecteur normal au sein des triangles des patches. Initialement, les patches sont tous formés d'un seul triangle, et donc cette variance est nulle. Si une fusion est ensuite réalisée entre les patches p_i et p_j , alors la variance du patch résultant vaut (équation 4.10) :

$$c_p(p_{ij}) = \frac{A(p_i) \cdot c_p(p_i) + A(p_j) \cdot c_p(p_j)}{A(p_{ij})} + \frac{A(p_i) \cdot A(p_j)}{A(p_{ij})^2} \cdot \|\mathbf{n}_i - \mathbf{n}_j\|^2 \quad (4.10)$$

avec $A(p_i)$ l'aire du patch p_i , et \mathbf{n}_i le vecteur normal à son plan moyen. Ce critère a toujours des valeurs positives ou nulles, mais il ne peut pas être facilement borné. Les valeurs faibles de c_p correspondent à des fusions affectant peu la planarité des patches.

Comme critère de taille c_t , afin d'éviter l'utilisation d'heuristiques définissant une taille minimale [Inoue 01] ou maximale [Sheffer 01] de patch, dépendantes de la surface considérée, nous proposons d'utiliser le critère suivant (équation 4.11) :

$$c_t(p_{ij}) = \frac{1 - e^{-k \cdot \frac{A(p_{ij})}{A_t}}}{1 - e^{-k}} \quad (4.11)$$

où $A(p_{ij})$ représente l'aire du patch virtuel p_{ij} , A_t l'aire totale de la surface, et k un réel constant strictement positif (voir figure 4.14). Ce critère est borné et varie dans l'intervalle $]0, 1[$ quelle que soit la valeur de k . Il tend vers 0 quand la fusion génère des patches de relativement petite taille, et vers 1 dans le cas contraire. De plus, comme on peut le voir sur

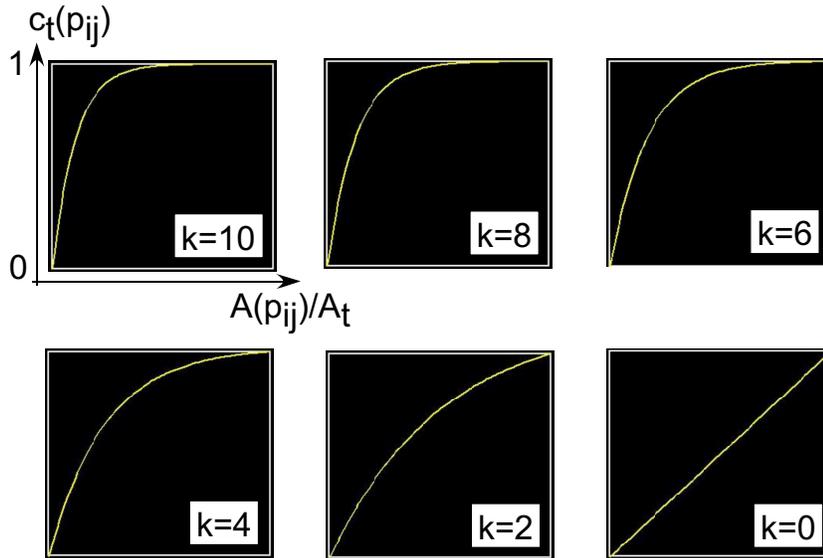


Figure 4.14 Allure générale du critère de taille c_t choisi dans notre approche. Comme on peut le voir, plus le paramètre k est grand, et plus c_t devient rapidement proche de 1. Le cas $k = 0$ est une exception (voir équation 4.11).

la figure 4.14, plus k est grand, et plus c_t se rapproche *rapidement* de 1 lorsque la taille relative des patches devient grande. Ce critère est donc modulable, et permet de discriminer de manière plus ou moins forte les fusions générant de grands patches, selon la valeur de k .

Enfin, comme critère de forme c_f pour les patches, nous choisissons également celui décrit dans [Inoue 01], qui tend à favoriser les fusions entre les patches qui ont une longue frontière commune. Ainsi, si $L(p_i)$ est le périmètre du patch p_i , et que la frontière commune aux patches p_i et p_j a une longueur l , le critère c_f vaut (équation 4.12) :

$$c_f(p_{ij}) = \max\left(\frac{l}{L(p_i)}, \frac{l}{L(p_j)}\right) \quad (4.12)$$

Ce critère est borné, et varie dans l'intervalle $]0, 1]$. Les valeurs faibles correspondent à des fusions à éviter, car les patches en question ont une courte frontière commune. Au contraire, les valeurs proches de 1 sont des fusions recommandées. En particulier, la valeur maximum 1 traduit l'inclusion entière d'un patch dans un autre (voir figure 4.15).

Nous l'avons dit, il faut maintenant trouver un moyen de combiner ces différents critères de planarité, de taille et de forme, pour pouvoir ordonner correctement les fusions de patches et obtenir ainsi une partition satisfaisante de la surface. Cette étape de l'algorithme fait souvent intervenir de nombreuses heuristiques, et une simple addition de la forme suivante (équation 4.13) est en général proposée pour définir le critère final c ([Garland 01], [Inoue 01], [Sander 01], [Sheffer 01]) :

$$c = w_p \cdot c_p + w_t \cdot c_t + w_f \cdot c_f, \text{ avec } w_p + w_t + w_f = 1 \quad (4.13)$$

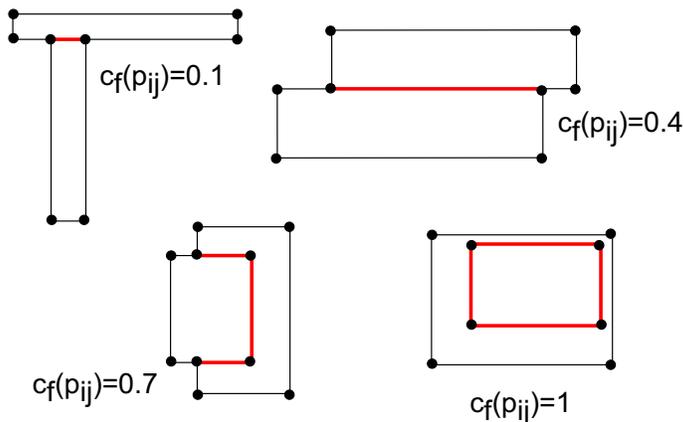


Figure 4.15 Quelques exemples de valeurs du critère de forme c_f choisi dans notre approche. Les lignes rouges plus épaisses matérialisent les frontières entre deux patches adjacents.

avec w_p , w_t et w_f trois réels compris entre 0 et 1 caractérisant les poids relatifs des différents critères. Cette approche est à première vue très séduisante, car elle permet de moduler facilement l'influence des différents critères. Cependant, nous pensons qu'elle présente les inconvénients suivants :

1. Pour que le critère global c ainsi défini soit valide, il est nécessaire que les valeurs de c_p , c_t et c_f soient *comparables*, c'est-à-dire qu'elles varient dans le même sens et dans le même intervalle, ce qui n'est a priori pas le cas (notamment pour le critère de planarité). Si jamais les différents critères ne sont pas bornés, ou bornés mais ne variant pas dans le même intervalle, la partition finale sera sujette aux *effets d'échelle* : par exemple, si toutes les coordonnées des sommets de la surface étaient multipliés par une constante (ce qui conserverait ses propriétés géométriques, dont sa courbure), les valeurs des critères varieraient dans des proportions différentes, et si les poids restaient les mêmes, la partition finale serait elle différente, ce qui n'est pas acceptable : une fois de plus, des ajustements au cas pas cas seraient alors obligatoires.
2. Les poids affectés aux différents critères sont constants au cours de la partition de la surface. Nous pensons cependant que leur rôle est d'importance variable :
 - (a) lors de ce processus, la taille des patches ne peut qu'augmenter à chaque fusion, ce qui n'est pas le cas de leur forme ou de leur planarité. L'intérêt du critère de taille est d'éviter de générer des patches d'aire trop faible. Ainsi, lorsque tous les patches ont une aire acceptable, ce critère devient obsolète et son poids doit devenir minime.
 - (b) le poids de la forme de patches doit être lui conservé lors de la partition.
 - (c) enfin, la planarité doit avoir tout au long de la partition une importance prépondérante par rapport à la taille ou à la forme de patches, car c'est le critère qui a le plus d'influence sur la distorsion de la paramétrisation. De plus, cette priorité doit être accentuée sur la fin de la partition, à partir du

moment où les limites des patches deviennent véritablement les lignes de forte courbure de la surface.

Notre méthode apporte une solution simple à ces différents problèmes et prérequis. En premier lieu, afin que la planarité soit le critère le plus discriminant tout au long de la partition de la surface, nous définissons la fusion la plus avantageuse comme celle qui, parmi une *fraction* des fusions présentant les plus faibles valeurs de c_p , possède le meilleur *compromis* de taille et de forme. De plus, pour que le poids de la planarité devienne plus important au fil des fusions, nous faisons naturellement diminuer cette fraction au cours du temps, en la définissant comme un pourcentage constant p du nombre courant de patches sur la surface. La sélection de la fusion la plus avantageuse se fait d'ailleurs exclusivement selon la planarité à partir du moment où le nombre de patches devient inférieur à l'entier le plus proche de $200/p$. En pratique, nous prenons comme fraction 10 ou 15%.

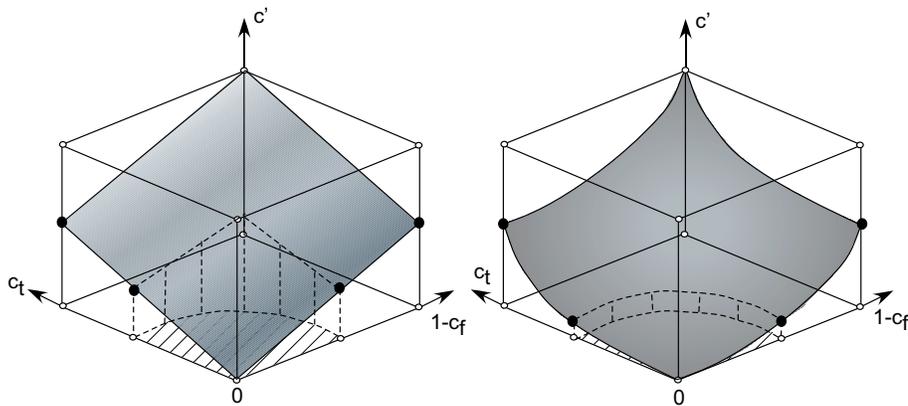


Figure 4.16 À gauche, les compromis taille/forme acceptables ($c_t \leq 0.5$, $(1 - c_f) \leq 0.5$) sont associés à des valeurs de c' allant de 0 jusqu'à 1, ce qui est un intervalle très large (voir équation 4.14). À droite, les mêmes compromis sont beaucoup mieux discriminés, avec des valeurs de c' comprises entre 0 et 0.25 (voir équation 4.15).

Pour caractériser la fusion qui a le meilleur compromis de taille et de forme c' , de la même manière que dans l'équation 4.13, une moyenne entre les valeurs de c_t et $(1 - c_f)$ pourrait être classiquement utilisée (voir équations 4.11 et 4.12), car ces deux critères varient dans le même sens et dans le même intervalle $[0, 1]$ (équation 4.14) :

$$c' = c_t + (1 - c_f) \quad (4.14)$$

Plus la valeur de c' serait faible ($c' \in [0, 2]$), et meilleur serait le compromis. Cette solution ne semble toutefois pas optimale. En effet, dans ce cas, comme le montre la figure 4.16, aucune différence ne serait faite entre :

1. les fusions à la fois très bénéfiques pour la forme des patches ($c_f \approx 1$) et très pénalisantes pour leur taille ($c_t \approx 1$), soit $c' \approx 1$,

2. les fusions à la fois très bénéfiques pour la taille des patches ($c_t \approx 0$) et très pénalisantes pour leur forme ($c_f \approx 0$), soit une nouvelle fois $c' \approx 1$,
3. les fusions moyennement pénalisantes (ou bénéfiques) pour la taille ($c_t \approx 0.5$) et la forme des patches ($c_f \approx 0.5$), soit encore $c' \approx 1$.

Or, nous pensons que cette dernière famille de fusions doit être favorisée par rapport aux deux premières. À cette fin, nous proposons plutôt de caractériser le compromis en taille et en forme par le critère suivant (équation 4.15) :

$$c' = c_t^2 + (1 - c_f)^2 \quad (4.15)$$

Là encore, plus le critère c' est faible, et plus le compromis est meilleur ($c' \in [0, 2]$). Ce critère discrimine beaucoup mieux que le précédent (équation 4.14) les différentes situations (voir figure 4.16). De plus, nous avons défini le critère de taille de telle sorte que sa valeur soit plus ou moins rapidement très proche de 1, en fonction d'un unique paramètre k . Ainsi, en fonction de cette valeur, l'influence du critère de taille devient plus ou moins rapidement minime, car on a alors $c' \approx (1 - c_f)^2 + 1$ (voir figure 4.17). Notons que le choix d'un k proche de 0 assure que la taille de patches soit toujours prise en compte.

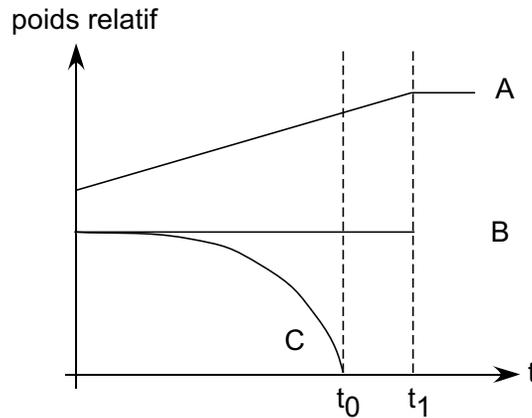


Figure 4.17 Évolution du poids relatif des critères de planarité (A), de forme (B) et de taille (C) au cours du processus de partition en patches. Avec le temps, le nombre de patches diminue, et le poids du critère de planarité (équation 4.10) devient constamment plus fort. Au temps t_1 , il est même le seul à être pris en compte. Par ailleurs, l'aire des patches ne fait également qu'augmenter, et à partir d'une certaine taille (temps t_0), le critère c_t ne devient plus discriminant (équation 4.11). Le poids du critère de forme (équation 4.12), quant à lui, reste constant. On peut très bien avoir aussi $t_1 < t_0$.

Pour résumer, notre méthode de partition a l'avantage de faire intervenir très peu d'heuristiques : en effet, il est seulement nécessaire de définir la proportion p de fusions à considérer pour trouver le meilleur compromis c' , et le nombre k qui détermine l'influence du critère de taille dans le même compromis c' . Ces deux valeurs ne sont pas sujettes aux effets d'échelle et n'ont pas besoin d'être adaptées à la surface considérée. Pour arriver à terme, le processus de partition n'a besoin d'aucun seuil fourni par l'utilisateur, mais

seulement du nombre désiré de patches. Comme le montre la figure 4.17, notre approche permet en plus de faire varier naturellement l'influence des critères de taille, de forme et de planarité au cours du temps, ce-dernier étant choisi comme le plus prépondérant, car plus influent sur la distorsion de la paramétrisation.

D'une manière plus classique, l'application d'un post-traitement permet au final de lisser les frontières entre les patches. Pour cela, tous les triangles d'un patch p_i qui ont deux arêtes situées sur une frontière avec un patch adjacent p_j sont affectés au patch p_j . Ce procédé est à la fois simple et efficace.

Résultats

La figure 4.18 ci-dessous donne un exemple de partition en patches réalisée sur une surface triangulée représentant le toit d'une couche de sel (modèle UNOCAL). Comme on peut le voir, sa morphologie est très perturbée.

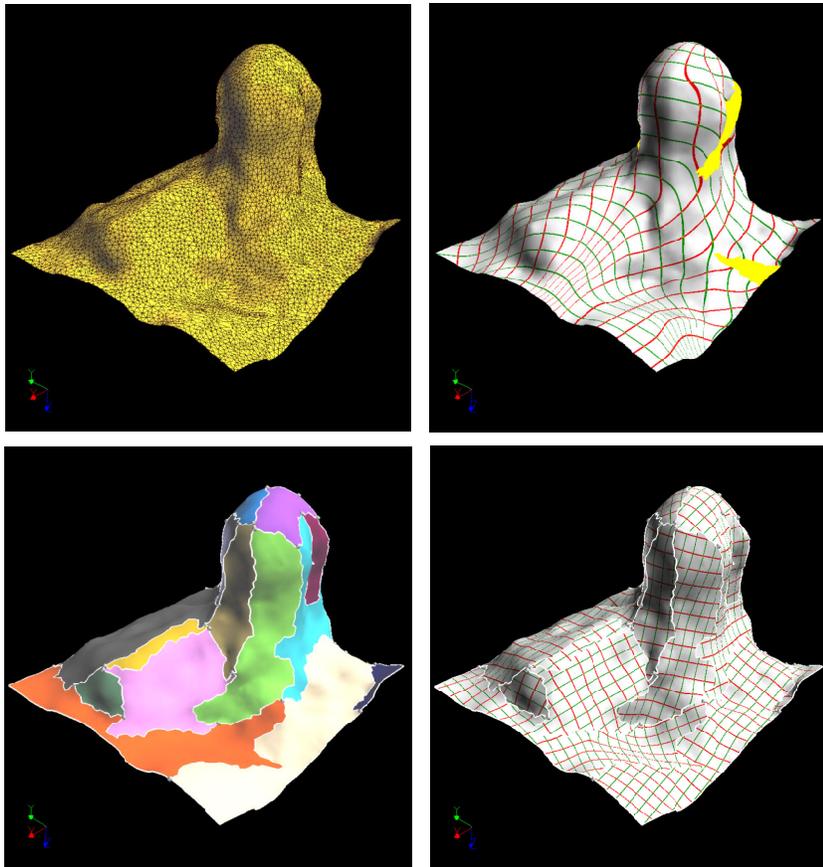


Figure 4.18 Exemple de partition en patches d'une surface triangulée (modèle UNOCAL). La surface initiale figure en haut à gauche. Telle quelle, cette surface ne peut être paramétrisée simplement et rapidement de manière conforme (en haut à droite, les lignes iso- u et iso- v sont affichées). En bas à gauche, la surface est divisée en patches (ici 20), et les paramétrisations obtenues sont valides (en bas à droite).

Génération de maillages triangulés par raffinement de Delaunay

Ce chapitre présente l'ensemble des techniques que nous avons mises en place pour construire des maillages à base de triangles, afin de matérialiser la géométrie des surfaces radiales d'un *Soft Frame Model*. Ces maillages sont non seulement contraints par un ensemble de 0- et de 1-simplexes donnés, mais doivent aussi satisfaire à des critères portant à la fois sur la forme et la taille des mailles. Nous avons opté pour une approche de type *raffinement de Delaunay* (notion introduite dans [Ruppert 92], [Chew 93], [Ruppert 95]), c'est-à-dire que tous les simplexes du maillage sans exception sont maintenus de Delaunay, quelles que soient les modifications apportées au maillage, et en particulier lors du respect des contraintes, qui suit une approche conforme (voir partie 4.1).

5.1 Satisfaction des contraintes par une approche conforme

Cette partie présente tout d'abord les méthodes qui sont classiquement employées dans une approche de type raffinement de Delaunay pour respecter un ensemble de 0- et 1-simplexes de contraintes au sein d'une triangulation. Ensuite, nous montrons pourquoi elles ne sont pas directement applicables dans notre contexte, et présentons une technique originale qui atteint effectivement cet objectif.

5.1.1 Présentation des méthodes existantes

Principes de base

Triangulations dans un espace bidimensionnel

À notre connaissance, la totalité des triangulations obtenues par raffinement de Delaunay dans un espace bidimensionnel sont construites à partir de *PSLGs* (pour *Planar Straight Line Graphs*), c'est-à-dire des ensembles de points et de segments de contrainte pour la triangulation, qui vérifient les conditions suivantes [Shewchuk 97] :

1. Les extrémités de tous les segments d'un PSLG font partie du PSLG.
2. Deux segments d'un PSLG ne peuvent s'intersecter qu'au niveau de leurs extrémités.

Les points et les segments d'un PSLG P sont tous coplanaires, et sa triangulation $\mathcal{T}(P)$ est par exemple construite dans le plan qu'ils définissent. Nous allons supposer que nous partons d'une situation initiale où $\mathcal{T}(P)$ est une triangulation de Delaunay dans laquelle tous les points de P sont représentés par un sommet. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent (chapitre 4), cette triangulation de départ peut par exemple avoir été obtenue par une méthode incrémentale de type Bowyer-Watson. Ceci satisfait de manière triviale les contraintes de dimension 0 sur $\mathcal{T}(P)$.

Les segments du PSLG P sont aussi des contraintes, et une approche conforme est adoptée pour les honorer. Autrement dit, il est nécessaire d'assurer que tous ces segments soient de Delaunay ([Pébay 98], [Boivin 02]). Ainsi, un segment de P sera dit *accroché* si son cercle circonscrit diamétral contient dans son intérieur au moins un sommet de la triangulation $\mathcal{T}(P)$, ou s'il n'est pas présent dans la triangulation sous forme d'une arête ([Ruppert 92], [Shewchuk 97]). Ainsi, si tous les *accrochages* sont éliminés, alors les contraintes de dimension 1 seront satisfaites. L'algorithme présenté à cette fin dans [Ruppert 92] est basé sur les règles suivantes :

- Si un segment n'est pas accroché, alors son cercle circonscrit diamétral est vide, et il est présent dans $\mathcal{T}(P)$ sous la forme d'une arête: il est de Delaunay.
- Si un segment est accroché, cela ne signifie pas nécessairement qu'il n'est pas de Delaunay, car il peut très bien être présent dans $\mathcal{T}(P)$ sous la forme d'une arête, mais qui contient au moins un sommet dans son cercle circonscrit diamétral. Par conséquent, ce segment est divisé en deux nouveaux segments par l'insertion d'un point de Steiner en son milieu qui préserve le caractère de Delaunay de $\mathcal{T}(P)$, comme le montre la figure 5.1. Ces nouveaux segments ont certes un cercle circonscrit diamétral plus petit, mais ils peuvent tout à fait être accrochés à leur tour.

Ces règles sont appliquées jusqu'à ce que tous les segments du PSLG soient présents dans la triangulation sous la forme d'une arête (voir figure 5.1). Ainsi, lorsque l'algorithme se termine, chaque segment initial est représenté par une série contiguë d'arêtes. Cette méthode très simple est garantie de succès, car elle exploite une des propriétés des maillasses de Delaunay qui stipule qu'il existe toujours une arête reliant un sommet et son plus

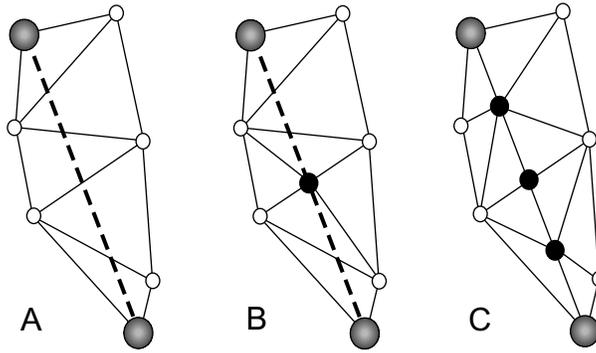


Figure 5.1 Un segment de contrainte (en pointillés) n'est pas présent dans la triangulation de Delaunay car son cercle circonscrit diamétral n'est pas vide (A). Ce segment est divisé en deux nouveaux segments de contrainte, et un nouveau point est ajouté à la triangulation. Ces deux segments sont *accrochés* à leur tour (B). Finalement, deux nouvelles bisections permettent d'honorer les contraintes dans la triangulation (C).

proche voisin [Cavalcanti 99].

Cependant, utilisé tel quel, ce procédé peut induire des insertions de points excessives au niveau des segments constituant le bord d'éventuelles cavités ou de zones de concavités dans le PSLG. Toutefois, les accrochages ne concernent alors que des parties du maillage qui ne seront au final pas maillées [Ruppert 95]. Une solution consiste alors à construire dans un premier temps une triangulation Contraint-Delaunay dont les contraintes sont les segments situés *sur le bord* du PSLG, triangulation qui existe nécessairement et qui ne demande l'insertion d'aucun point de Steiner, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent (partie 4.1). Ensuite, les triangles situés à l'extérieur du PSLG ou dans les cavités sont enlevés de la triangulation, et l'approche conforme décrite précédemment peut prendre place. Cependant, les accrochages concernant les segments du bord ne doivent alors être pris en compte que si le sommets de la triangulation qui en sont responsables sont les sommets des triangles ayant comme arêtes ces segments [Shewchuk 97]. Cette solution est également très facile à mettre en œuvre et évite parfois des insertions inutiles de points de Steiner.

Triangulations dans un espace tridimensionnel

Pour générer des triangulations plongées dans un espace tridimensionnel, les données initiales sont traditionnellement des *PLCs* (pour *Piecewise Linear Complexes*). En plus de points et de segments, un PLC contient des *facettes* qui sont des plans de l'espace. Les points, segments et facettes d'un PLC sont appelés ses *faces* [Cohen-Steiner 02]. Les conditions de validité d'un PLC sont les mêmes que celles des PSLGs :

1. Le bord d'une face d'un PLC est une union de faces du PLC.
2. L'intersection de deux faces d'un PLC est soit vide, soit une union de faces du PLC.

La triangulation de chacune des facettes d'un PLC peut être réalisée dans le plan qu'elle définit, indépendamment de celle des autres, en suivant la méthode adoptée pour

les PSLGs décrite précédemment [Shewchuk 98-(2)]. En effet, l'ensemble des segments et des points constituant le bord de chaque facette du PLC est un PSLG, matérialisant les contraintes pour la triangulation. Cependant, lorsqu'un segment du PLC est à un moment ou à un autre divisé en deux nouveaux segments, l'insertion d'un point de Steiner doit se faire dans toutes les triangulations existantes qui ont ce segment comme contrainte. Ces nouveaux points ont bien sûr tous la même géométrie.

Prise en compte des angles faibles

Caractérisation des configurations problématiques

Malgré tout, il existe des configurations où la convergence d'un algorithme basé sur des bisections récursives de segments d'un PSLG ou d'un PLC n'est pas assurée ([Ruppert 95], [Shewchuk 97], [Cavalcanti 99]). Ceci concerne les segments incidents à un même point qui sont séparés par des angles relativement faibles. Par la suite, nous appellerons *épi* un ensemble des segments incidents à un même point d'un PSLG ou PLC.

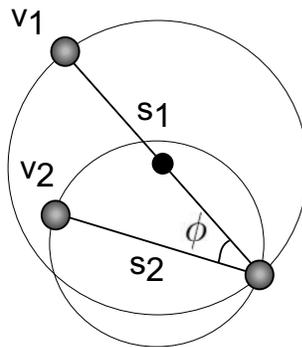


Figure 5.2 Le segment s_1 est accroché par l'extrémité v_2 du segment s_2 . Un nouveau point (en noir) est donc ajouté en son milieu. Si ce nouveau point accroche à son tour le segment s_2 , alors une cascade infinie de bisections s'enchaîne. Ceci ne peut arriver que si l'angle ϕ est inférieur à 45 degrés.

La configuration de base provoquant une cascade infinie de bisections correspond à un épi fait de deux segments s_1 et s_2 incidents qui ne sont pas de longueur égale. Nous allons noter ces longueurs respectivement l_1 et l_2 , avec $l_1 > l_2$. Supposons que l'extrémité opposée au centre de l'épi de s_2 accroche s_1 (voir figure 5.2). Ceci peut arriver a priori quelle que soit la valeur de l'angle ϕ formé par les deux segments ($\phi < \pi/2$). En effet, il suffit que (inégalité 5.1) :

$$l_2 < l_1 \cdot \cos \phi \quad (5.1)$$

Le segment s_1 est par conséquent divisé en deux nouveaux segments de longueur égale, et l'épi est alors formé de deux segments, l'un de longueur l_2 (segment s_2), l'autre de longueur $l_1/2$. Toutefois, si le point milieu de s_1 accroche à son tour le segment s_2 , une bisection de ce dernier doit également être faite, ce qui aboutit à un épi fait de deux segments de longueur $l_1/2$ et $l_2/2$. L'angle entre ces deux segments vaut toujours ϕ , et

comme l'inégalité 5.1 est satisfaite, le segment de longueur $l_1/2$ est à son tour nécessairement accroché par le point milieu de s_2 . Cette situation est tout à fait équivalente à celle de départ ; il est donc impossible d'éviter les accrochages par des bisections. Toutefois, nous avons fait les hypothèses suivantes :

- Les deux segments initiaux de l'épi s_1 et s_2 ne sont pas de longueur égale. Dans le cas contraire, les extrémités des deux segments opposées au centre de l'épi ne pourraient pas être responsables d'un accrochage, et la convergence serait assurée.
- Suite à la première bisection, le point milieu du plus grand segment s_1 doit accrocher le plus petit segment s_2 , autrement dit (inégalité 5.2) :

$$\frac{l_1}{2} < l_2 \cdot \cos \phi \quad (5.2)$$

L'inégalité 5.1 étant par ailleurs satisfaite, ceci implique que $\cos \phi > \sqrt{2}/2$, soit $\phi < \pi/4$. Ainsi, la convergence serait assurée si les deux segments incidents s_1 et s_2 formaient un angle supérieur à 45 degrés, quelle que soit leur longueur respective.

Solution adoptée

D'une manière générale, nous allons désormais considérer les épis formés d'un ensemble de nb segments incidents à un même point ($nb \geq 2$), tels que chacun d'entre eux forme un angle inférieur à 45 degrés avec au moins un autre segment de l'épi. Une condition nécessaire et suffisante pour assurer la convergence est que tous les segments de cet épi aient strictement la même longueur. En effet, dans ce cas, ils sont tous de Delaunay et aucun accrochage ne peut exister. Un premier algorithme assurant cette condition a été proposé dans [Ruppert 95] pour les PSLGs, puis une forme plus générale en a été donnée dans [Cavalcanti 99] et [Shewchuk 00-(1)] pour les PLCs. La problématique est de diviser un minimum de segments et d'éviter de créer des segments trop hétérogènes en taille, ce qui aurait des conséquences néfastes sur la qualité de la triangulation. Imaginons que les nb segments $\{s_0, s_1, \dots, s_{nb-1}\}$ de l'épi soient ordonnés par longueur décroissante. Plusieurs segments peuvent avoir des longueurs identiques, et on a $l_i \geq l_{i+1} \forall i \in [0, nb-2]$, avec l_i la longueur du segment s_i . Ainsi, cette séquence de segments correspond à une séquence $\{l_0, l_1, \dots, l_{m-1}\}$ de m longueurs décroissantes strictement différentes ($m \leq nb$). Le principe de l'algorithme est le suivant :

1. Soit S_0 l'ensemble des segments de longueur l_0 , et S_1 l'ensemble des segments de longueur l_1 , avec $l_0 > l_1$. Soit r le ratio l_1/l_0 ($0 < r < 1$) :
 - (a) Si $r > 2/3$, le meilleur compromis pour assurer des longueurs égales est de diviser les segments de S_1 en leur milieu, et ceux de S_0 à la distance $l_1/2$ du centre de l'épi (voir figure 5.3).
 - (b) Si $1/3 \leq r \leq 2/3$, le meilleur compromis pour assurer des longueurs égales est de diviser les segments de S_0 à la distance l_1 du centre de l'épi (voir figure 5.3).

- (c) Si $0 < r < 1/3$, le meilleur compromis pour assurer des longueurs égales est de diviser les segments de S_0 en leur milieu, puis de se ramener au cas b ou c (voir figure 5.3).
2. Une fois que les segments de S_0 et éventuellement de S_1 ont été divisés pour former des nouveaux segments de longueur égale, la liste des segments de l'épi est mise à jour, et l'algorithme repart au point numéro 1.

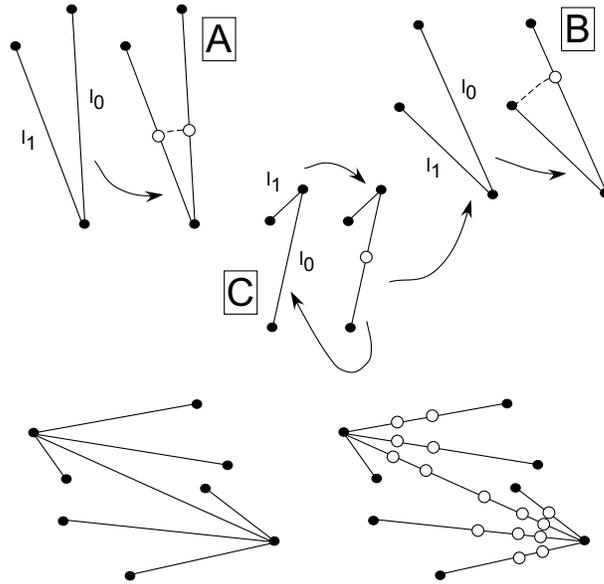


Figure 5.3 En haut : les trois règles de divisions de deux segments adjacents séparés par un angle faible, selon que le rapport de longueur l_1/l_0 est supérieur à $2/3$ (A), compris entre $1/3$ et $2/3$ (B), ou inférieur à $1/3$ (C). En bas : l'application de ces règles permet d'éviter les séquences infinies d'accrochages au niveau des angles faibles. Les autres accrochages se règlent ensuite de manière classique, par des bisections.

Toutefois, les divisions assurant une longueur identique aux segments d'un épi peuvent concerner des segments appartenant à d'autres épis, centrés sur les extrémités des segments opposées au centre de cet épi. Si jamais les segments de ces épis *adjacents* sont tous de même longueur, alors ils doivent tous être divisés en leur milieu. Cet algorithme est très efficace et produit les divisions les plus équilibrées possibles. En effet, lorsqu'un segment de longueur l est divisé, les segments générés ont nécessairement une longueur comprise entre un et deux tiers de l , ce qui conserve une certaine homogénéité dans la taille des segments.

En conclusion, une fois les épis traités, si jamais un segment d'un PSLG ou d'un PLC doit être divisé (qu'il s'agisse ou non d'une bisection), et que ce segment appartienne à un épi, alors tous les segments de l'épi doivent être divisés, et autant de nouveaux points de même géométrie doivent être insérés dans les triangulations des facettes situées autour de ces segments. Ceci garantit qu'aucun accrochage ne sera créé et que tous les segments de l'épi seront présents sous forme d'arêtes dans les triangulations.

5.1.2 Application aux surfaces radiales des *Soft Frame Models*

Problématique

Rappels sur la nature des données

Dans notre contexte de travail, les données disponibles ne se présentent pas sous la forme d'un PLC, mais plutôt d'un *Soft Frame Model* de dimension 2, où :

1. chaque nœud radial r_0 est représenté par un point de l'espace \mathcal{M}_{r_0} , autrement dit un 0-simplexe de l'espace tridimensionnel. Le point \mathcal{M}_{r_0} est supposé *approximer au mieux* la géométrie des enfants de r_0 .
2. chaque ligne radiale r_1 est représentée par une ligne polygonale \mathcal{M}_{r_1} faite de 0- et 1-simplexes plongés dans l'espace tridimensionnel, incluant les points correspondant à la géométrie des nœuds radiaux incidents à la ligne radiale (ses 0-ancêtres). La ligne polygonale \mathcal{M}_{r_1} est supposée *approximer au mieux* la géométrie des enfants de r_1 .
3. Un enfant de chaque surface radiale r_2 (celui-ci provenant éventuellement d'une partition en patches d'un ancien enfant d'une ancienne surface radiale - voir partie 4.2) a été *paramétrisé*, et se trouve donc en correspondance avec un espace paramétrique bidimensionnel $D(r_2)$, dans lequel est réalisée la triangulation matérialisant la géométrie \mathcal{M}_{r_2} de r_2 . Cette triangulation doit *approximer au mieux* la géométrie des enfants de r_2 , et satisfaire à des critères de forme et de taille.

Pour générer le maillage de chaque surface radiale, il aurait été possible de considérer un de ses enfants et, sous l'hypothèse que ce-dernier se présente sous la forme d'un 2-complexe cellulaire, construire un PLC dont les points, segments et facettes seraient respectivement les 0-, 1- et 2-cellules du complexe. Dans ce cas, chacune des faces du PLC se retrouverait dans la triangulation finale sous la forme d'une union de 0-, 1- ou 2-simplexes ([Cavalcanti 99], [Murphy 01], [Cohen-Steiner 02]). Même si la triangulation finale approxime alors parfaitement la géométrie de l'enfant de la surface radiale considéré, cette approche n'a pas de sens dans notre contexte :

- Il n'est pas possible de prendre en compte les contraintes provenant des lignes radiales par rapport auxquelles la surface radiale est *floue*, ni celles provenant des nœuds radiaux par rapport auxquels les 1-ancêtres de la surface radiale sont *flous*.
- Sauf si les géométries des enfants de chaque nœud et ligne radiale étaient identiques, la géométrie des lignes radiales ne serait pas unique, ce qui violerait la validité géométrique du *Soft Frame Model*.
- Nous avons choisi de contraindre les triangulations par des lignes polygonales *arbitraires*, où la longueur des 1-segments s'adapte à des critères de taille précis. Si jamais les segments du PLC sont trop petits, la triangulation peut générer des triangles qui certes satisfont les critères de forme, mais pas nécessairement ceux de taille.

Pour ces raisons, nous suivons l'approche suivante : comme nous l'avons déjà spécifié auparavant, la triangulation de chaque surface radiale r_2 est contrainte par un ensemble de 0-simplexes qui constituent la géométrie de ses 0-ancêtres, et par un ensemble de 1-simplexes qui constituent la géométrie de ses 1-ancêtres. Pour inclure ces éléments dans la triangulation, une *image dans le domaine paramétrique* $D(r_2)$ doit être attribuée à chacun d'entre eux, comme le montre la figure 5.4. De cette façon, nous nous ramenons au cas de la triangulation conforme d'un PSLG.

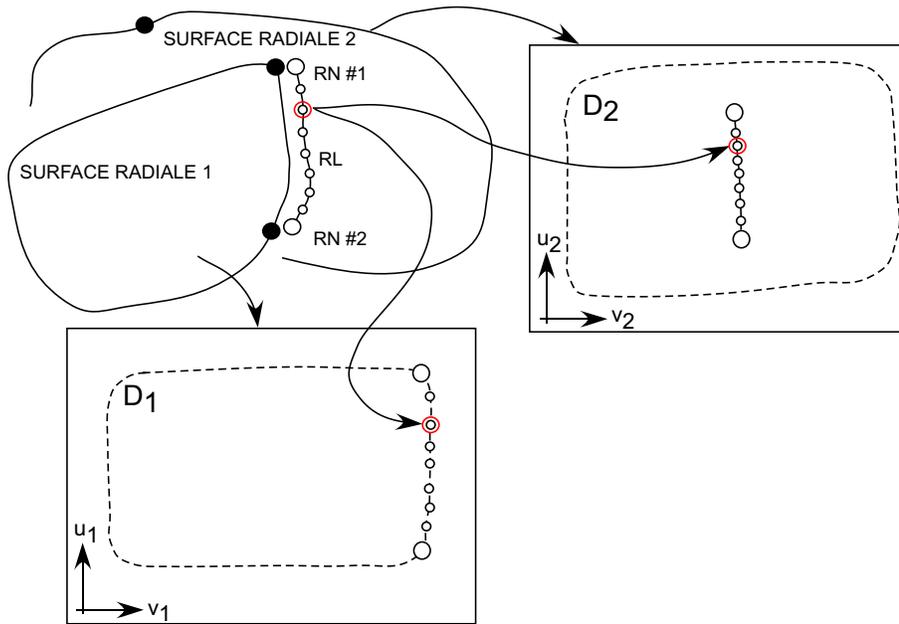


Figure 5.4 Les triangulations matérialisant la géométrie des surfaces radiales se font chacune dans un espace paramétrique différent. Ici, la ligne polygonale aux points blancs représente la géométrie assignée à une ligne radiale d'un *Soft Frame Model*. Elle a deux parents (dont un est flou), et chaque point blanc (dont les extrémités) a une *image paramétrique* (encadrées en rouge) dans chacun des domaines associés.

Par la suite, nous appellerons s_0^d et s_1^d les images paramétriques dans $D(r_2)$ respectivement d'un 0-simplexe s_0 et d'un 1-simplexe s_1 faisant partie respectivement de la géométrie d'un nœud et d'une ligne radiale de contrainte pour une surface radiale r_2 donnée.

Difficultés de la prise en compte des angles faibles

Pour régler le problème des angles faibles, supposons tout d'abord que nous adoptons la solution présentée précédemment pour un espace tridimensionnel, en considérant cette fois des épis faits de 1-simplexes s_1 incidents à un même 0-simplexe s_0 . Nous voyons un inconvénient majeur à cette méthode : dans le cas des PLCs, le résultat obtenu suffit à garantir que les segments soient tous de Delaunay dans le plan de la triangulation des facettes. Ce n'est cependant plus vérifié dans notre cas, car du fait de la distorsion des paramétrisations, la longueur d'un segment s_1^d n'est pas *rigoureusement* identique à celle de son image s_1 dans l'espace tridimensionnel. De même, les angles entre paires de segments incidents de l'espace tridimensionnel ne sont pas *parfaitement* conservés dans un

espace paramétrique. Par conséquent il n'est pas possible d'affirmer que les 1-simplexes de contrainte soient de Delaunay dans chaque domaine paramétrique, et donc automatiquement présents sous la forme d'arêtes dans les triangulations (voir figure 5.5).

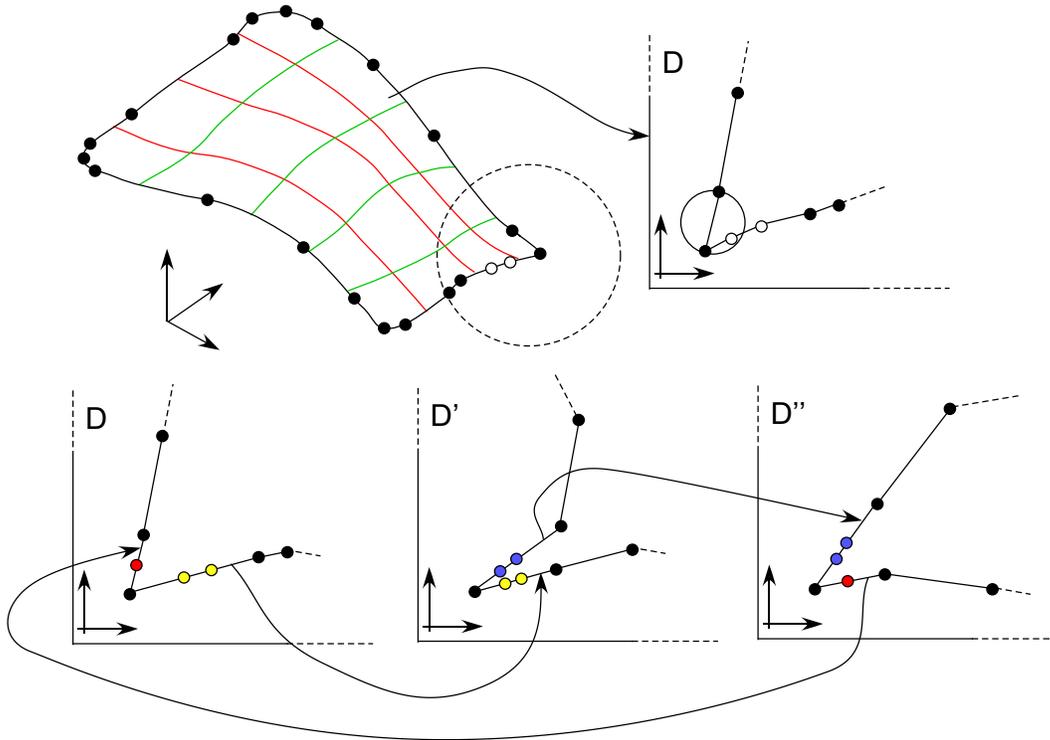


Figure 5.5 En haut : un épi a été détecté et résolu dans l'espace tridimensionnel au niveau de la géométrie d'une ligne radiale (zone encerclée). Toutefois, dans le domaine paramétrique D où ses segments ont une image, des accrochages peuvent exister du fait de la distorsion de la paramétrisation. En bas : le même épi est d'abord résolu dans le domaine paramétrique D par insertion des deux points jaunes, qui sont aussi ajoutés dans le domaine paramétrique D' . Un autre épi est résolu dans D' par ajout des points bleus, qui ont leur équivalent dans D'' . Un troisième épi est résolu dans D'' par insertion du point rouge, qui a lieu également dans D . Cette dernière insertion va provoquer des bissections infinies des segments des trois épis.

Supposons maintenant que le problème des angles faibles soit réglé dans chacun des espaces paramétriques, en considérant cette fois des épis faits de 1-simplexes s_1^d incidents à un même 0-simplexe s_0^d . Cette méthode n'est pas non plus optimale, en effet :

1. Les nouveaux 0-simplexes matérialisant les divisions des 1-simplexes n'appartiennent pas nécessairement au domaine paramétrique, et ces points n'ont alors pas d'image dans l'espace tridimensionnel. Remarquons que ce problème ne se pose que lorsque le domaine paramétrique $D(r_2)$ n'est pas convexe.
2. Faisons abstraction du problème ci-dessus, et considérons que tous les 0-simplexes résultant des divisions ont une image dans l'espace tridimensionnel. Dans ce cas,

lorsqu'un 1-simplexe s_1^d est divisé, il l'est aussi dans tous les autres domaines paramétriques où s_1 a une image. Cependant, si jamais les images de s_1 n'ont pas initialement toutes la même longueur, cette division peut entraîner en cascade des séries infinies d'autres divisions de s_1^d et des images paramétriques des 1-simplexes incidents à s_1 , comme le montre la figure 5.5.

Par ailleurs, indépendamment de ces considérations, le moyen d'attribuer des images paramétriques aux 0- et 1-simplexes de contrainte doit être précisé.

Solutions adoptées

Pour régler le problème des angles faibles, nous avons donc le choix de travailler soit dans l'espace tridimensionnel, soit dans les espaces paramétriques associés aux surfaces radiales, chacune des méthodes ayant ses inconvénients. Nous pensons que le problème soulevé par l'approche tridimensionnelle n'a pas de solution simple. En revanche, pour le cas bidimensionnel, des solutions peuvent être apportées.

Garantie d'une image tridimensionnelle valide

Nous devons tout d'abord trouver une image tridimensionnelle à tous les nouveaux 0-simplexes de contrainte s_0^d ajoutés pour assurer que les épis soient tous faits de 1-simplexes s_1^d de même longueur, s'ils n'en ont pas déjà une qui soit valide. Pour cela, il serait par exemple possible d'*agrandir* le domaine paramétrique en suivant la technique prometteuse présentée dans [Lévy 03], car elle permettrait d'ajuster naturellement la géométrie de ces points à celle des enfants des lignes radiales. Cependant, elle n'a pas pu être intégrée dans notre travail.

Nous avons opté pour une technique plus simple, mais moins élégante : soit s_0^d un point situé à *l'extérieur* d'un domaine paramétrique. Une première géométrie lui est attribuée à partir de ses coordonnées barycentriques par rapport aux extrémités de l'ancien 1-simplexe sur lequel il a été ajouté. Si une de ces extrémités n'a pas elle-même d'image tridimensionnelle, celle-ci est alors calculée de la même manière. Récursivement, nous pouvons ainsi dans tous les cas trouver une image initiale à s_0^d dans l'espace tridimensionnel. Ensuite, ces positions peuvent être interpolées de manière à ne pas trop déformer les triangles et à s'ajuster au mieux à la géométrie de l'enfant de la ligne radiale concernée. Cette technique sera présentée plus en détail dans la dernière partie de ce chapitre.

Règles de division des 1-simplexes de contrainte dans les domaines paramétriques

Il est aussi nécessaire d'assurer la terminaison de l'algorithme et d'éviter les boucles infinies de divisions de 1-simplexes dans les domaines paramétriques. Nous l'avons déjà dit, ces problèmes de convergence sont liés au fait que les images paramétriques d'un 1-simplexe de contrainte de l'espace tridimensionnel n'ont pas toutes strictement la même longueur. Pour éviter ce phénomène, lorsqu'un 1-simplexe de contrainte $s_1^{d_p}$ est divisé dans un domaine paramétrique d'indice p , pour supprimer les accrochages dans un épi centré sur le 0-simplexe $s_0^{d_p}$, la division de son image $s_1^{d_q}$ dans un autre domaine paramétrique d'indice q se fait selon les règles suivantes :

1. Si $s_1^{d_q}$ fait partie d'un épi centré sur le 0-simplexe $s_0^{d_q}$, alors la division est faite de manière à ce que la *longueur* des nouveaux 1-simplexes incidents à $s_0^{d_p}$ et $s_0^{d_q}$ soit la même (voir figure 5.6).
2. Si $s_1^{d_q}$ ne fait partie d'aucun épi centré sur le 0-simplexe $s_0^{d_q}$, alors la division est faite de manière à ce que les *poids des extrémités* de $s_1^{d_p}$ et $s_1^{d_q}$ soient les mêmes.

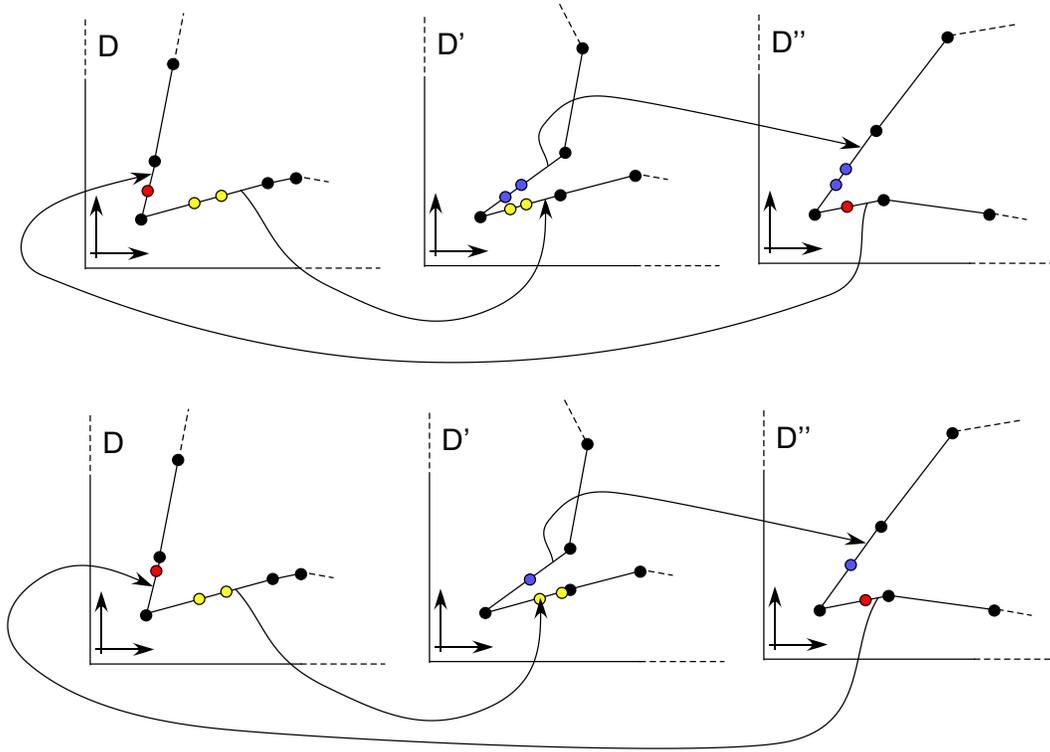


Figure 5.6 En haut, les insertions de nouveaux points sur les segments se font en conservant les poids des extrémités dans chaque domaine paramétrique. Ceci entraîne des cascades infinies de bisections (voir figure 5.5). En bas : les insertions de nouveaux points se font en conservant les longueurs des segments incidents au centre des épis dans chaque domaine paramétrique. Ceci règle le problème des épis. Les divisions sont peu équilibrées, mais en pratique, les longueurs d'un segment varient peu en fonction du domaine paramétrique, ce qui limite ce phénomène.

Nécessité d'un pré-traitement des images des 1-simplexes de contrainte

La règle numéro 2 présentée précédemment peut s'appliquer dans toutes les configurations, mais ce n'est pas le cas de la règle numéro 1. En effet, supposons que la division du 1-simplexe $s_1^{d_p}$, de longueur l^{d_p} , se fasse en un point qui a pour poids par rapport à $s_0^{d_p}$ le réel x ($0 < x < 1$). Pour produire un nouveau 1-simplexe de longueur $(1 - x) \cdot l^{d_p}$ incident à $s_0^{d_q}$ dans le domaine paramétrique d'indice q , la condition $l^{d_p} \cdot (1 - x) < l^{d_q}$ doit être satisfaite, avec l^{d_q} la longueur de $s_1^{d_q}$. Or, comme nous l'avons vu précédemment, le poids x est toujours dans l'intervalle $[1/3, 2/3]$. Par conséquent, une condition suffisante de

convergence pour notre algorithme est que pour tout segment s_1 faisant partie d'au moins deux épis dans les domaines paramétriques d'indices p , on ait initialement (inégalité 5.3) :

$$\min_p(l^{d_p}) > \frac{2}{3} \cdot \max_p(l^{d_p}) \quad (5.3)$$

Cette condition est largement remplie avec des paramétrisations même légèrement distordues, et ne remet donc pas en cause notre méthode¹. Une fois cette condition assurée, le traitement des angles faibles peut avoir lieu, et se fait épi par épi, dans chaque domaine paramétrique, en respectant les règles que nous avons prescrites.

Calcul des images des 0- et 1-simplexes de contrainte dans un domaine paramétrique

Pour pouvoir construire la triangulation conforme matérialisant la géométrie d'une surface radiale, il ne nous reste plus qu'à déterminer les images initiales des 0- et 1-simplexes de contrainte dans le domaine paramétrique associé. Ces simplexes correspondent à la géométrie des nœuds et lignes radiales qui sont les 0- et 1-ancêtres de la surface radiale. Les images paramétriques des 1-simplexes sont déterminées par celles de leurs extrémités. Par conséquent, nous pouvons nous focaliser sur le calcul des images paramétriques des 0-simplexes uniquement.

Nous partons du principe qu'une paramétrisation a été calculée sur un des enfants de la surface radiale, et que les valeurs de la *paramétrisation inverse* sont deux propriétés u et v définies sur cet enfant. Les contraintes que nous devons prendre en compte pour déterminer ces images paramétriques sont les suivantes :

- Les différentes images paramétriques d'un 1-simplexe doivent être dans la mesure du possible homogènes en taille, pour les raisons que nous avons précisées auparavant (équation 5.3).
- Pour un domaine paramétrique donné, les 1-simplexes doivent seulement s'intersecter au niveau de leurs extrémités. Sinon, il ne sera pas possible de construire une triangulation.

Pour calculer l'image paramétrique du 0-simplexe matérialisant la géométrie d'un nœud radial, nous considérons tout d'abord les lignes radiales qui sont à la fois incidentes à la surface radiale, et qui appartiennent aussi à la 1-descendance du nœud radial. Ensuite, nous procédons comme suit :

1. Supposons qu'il n'existe aucune de ces lignes radiales par rapport à laquelle la surface radiale en question soit *déterminée*. Autrement dit, tous les enfants de la surface radiale n'ont pas de bord qui soit un enfant de ces lignes radiales. Dans ce cas, l'image paramétrique du nœud radial est quelque part à *l'intérieur* de l'enfant de la surface radiale sur lequel a été calculée la paramétrisation (voir figure 5.7).

¹Des divisions préalables des 1-simplexes permettraient de satisfaire cette condition au cas où elle ne le serait pas.

2. Supposons maintenant que ces lignes radiales sont au moins deux, et qu'il n'existe qu'une seule de ces lignes radiales par rapport à laquelle la surface radiale en question soit *déterminée*. Considérons alors l'enfant de la surface radiale sur lequel a été calculée la paramétrisation, et son (ou éventuellement un de ses) bord(s) qui soit un enfant de cette ligne radiale. Dans ce cas, l'image paramétrique du nœud radial est *quelque part à l'intérieur* de ce (ou éventuellement d'un de ces) bord(s), comme le montre la figure 5.7.
3. Supposons enfin que la surface radiale est *déterminée* par rapport à la totalité ou à plusieurs de ces lignes radiales. Considérons alors l'enfant de la surface radiale sur lequel a été calculée la paramétrisation, et les bords de cet enfant qui soient enfants de ces lignes radiales. Dans ce cas, ces bords sont nécessairement incidents, et l'image paramétrique du nœud radial est *l'extrémité commune* de ces bords (voir figure 5.7).

Il n'existe donc que trois situations possibles pour calculer l'image d'un nœud radial dans le domaine paramétrique associé à une surface radiale. Pour résumer, cette image est soit *à l'intérieur* (cas numéro 1), soit *à l'intérieur d'un des bords* (cas numéro 2) ou soit *sur le bord d'un des bords* (cas numéro 3) de l'enfant sur lequel la paramétrisation a été calculée. Si nous supposons maintenant que cet enfant se présente sous la forme d'un 2-complexe cellulaire C , alors nous proposons l'approche suivante :

- Le cas numéro 3 ne pose aucune difficulté, et son image paramétrique est un point bidimensionnel dont les coordonnées sont les valeurs des propriétés u et v définies sur un sommet du bord de C .
- Dans le cas numéro 2, l'image paramétrique est un point bidimensionnel dont les coordonnées sont les valeurs des propriétés u et v du point du bord de C qui est *le plus proche* du 0-simplexe matérialisant la géométrie du nœud radial. Pour calculer ce point, il est d'abord nécessaire de trouver la 1-cellule du bord de C la plus proche.
- Dans le cas numéro 3, l'image paramétrique est un point bidimensionnel dont les coordonnées sont les valeurs des propriétés u et v du point de C qui est *le plus proche* du 0-simplexe matérialisant la géométrie du nœud radial. Pour calculer ce point, il est d'abord nécessaire de trouver la 2-cellule de C la plus proche.

Penchons nous désormais sur le calcul des images paramétriques des 0-simplexes constituant la géométrie des lignes radiales de contrainte (s'ils ne correspondent pas à des nœuds radiaux, auquel cas leur image a déjà été calculée). Deux configurations seulement sont envisageables :

1. Supposons que la surface radiale en question ne soit pas *déterminée* par rapport à la ligne radiale. Autrement dit, tous les enfants de la surface radiale n'ont pas de bord qui soit un enfant de la ligne radiale. Dans ce cas, l'image paramétrique des 0-simplexes est *quelque part à l'intérieur* de l'enfant de la surface radiale sur lequel a été calculée la paramétrisation (voir figure 5.7).

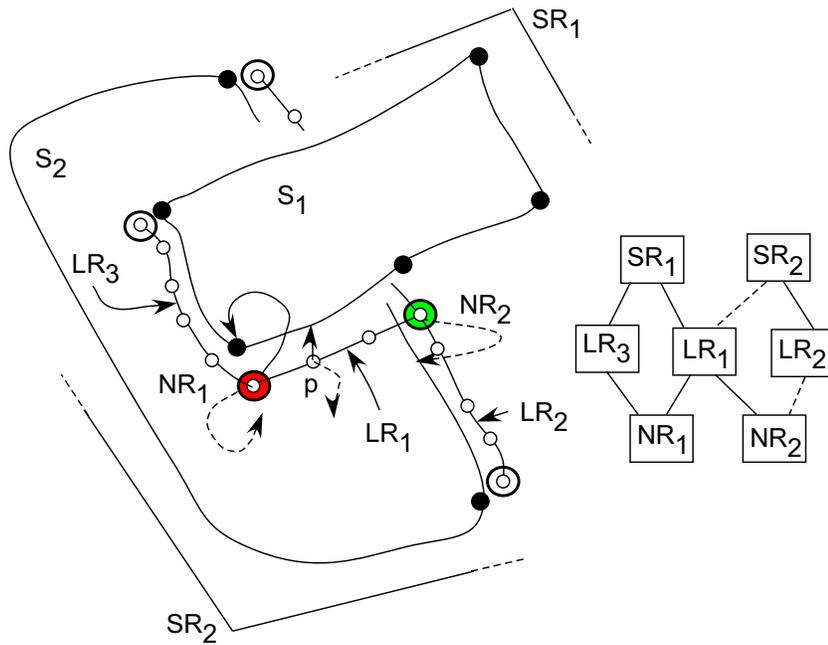


Figure 5.7 Principe du calcul des images paramétriques. Le graphe d'incidence des éléments radiaux est à droite. Les lignes en pointillés représentent les relations d'incidence floues. La surface radiale SR_2 n'est pas *déterminée* par rapport à la ligne radiale LR_1 , donc l'image paramétrique du nœud radial NR_1 (en rouge) sur SR_2 est à l'intérieur de la surface S_2 . La ligne radiale LR_2 est la seule par rapport à laquelle la surface SR_2 soit *déterminée*, donc l'image paramétrique du nœud radial NR_2 (en vert) sur SR_2 est à l'intérieur d'un bord de la surface S_2 . La surface radiale SR_1 est déterminée par rapport aux deux lignes radiales LR_1 et LR_3 , donc l'image paramétrique du nœud radial NR_1 (en rouge) sur SR_1 est sur le bord d'un bord de la surface S_1 . La surface radiale SR_1 est *déterminée* par rapport à la ligne radiale LR_1 , donc l'image paramétrique du nœud p sur SR_1 est à l'intérieur d'un bord de S_1 . La surface radiale SR_2 n'est pas *déterminée* par rapport à la ligne radiale LR_1 , donc l'image paramétrique du nœud p sur SR_2 est à l'intérieur de S_2 .

2. Supposons que la surface radiale soit *déterminée* par rapport à la ligne radiale. Considérons alors l'enfant de la surface radiale sur lequel a été calculée la paramétrisation, et son (ou éventuellement un de ses) bord(s) qui soit un enfant de la ligne radiale. Dans ce cas, l'image paramétrique des 0-simplexes est *quelque part à l'intérieur* de ce (ou éventuellement d'un de ces) bord(s), comme le montre la figure 5.7.

Pour traiter la situation numéro 1, nous utilisons le même procédé que pour les nœuds radiaux, à savoir, sous l'hypothèse que l'enfant de la surface radiale sur lequel a été calculée la paramétrisation se présente sous la forme d'un 2-complexe cellulaire C , trouver les 2-cellules de C les plus proches des 0-simplexes, et en déduire les valeurs des propriétés u et v définissant les images paramétriques.

Nous pourrions également utiliser cette technique pour régler la situation numéro 2, en calculant cette fois-ci les 1-cellules de C les plus proches des 0-simplexes, mais nous préférons adopter la méthode suivante, à la fois plus rapide et plus précise : en effet, si

une *abscisse curviligne* est associée au 0-simplexe le long de la ligne polygonale à laquelle il appartient, alors son image paramétrique est un point bidimensionnel dont les coordonnées sont les valeurs des propriétés u et v du point de même abscisse curviligne sur le bord de C qui est l'enfant de la ligne radiale.

Nous ne discuterons pas de la manière avec laquelle nous déterminons la 1- ou 2-cellule de C qui est la plus proche (avec toutes les différentes significations que peut prendre ce terme) d'un point donné de l'espace tridimensionnel. De nombreuses techniques, présentées par exemple dans [Euler 99] ou [Mallet 02], permettent de remédier à ce problème.

Synthèse sur la méthode proposée

Pour conclure, nous rappelons les principales étapes de l'algorithme que nous avons mis en place pour respecter de manière conforme les contraintes pour la triangulation des surfaces radiales d'un *Soft Frame Model*, dont les résultats ont été présentés dans [Lepage 02-(1)] et [Lepage 02-(2)] :

1. Au préalable, les surfaces radiales sont éventuellement partitionnées en patches, ce qui induit la création de nouveaux nœuds, lignes et surfaces radiales. Le *Soft Frame Model* est mis à jour en conséquence, et une paramétrisation est calculée sur un enfant de chaque surface radiale.
2. Les géométries des nœuds et lignes radiales du *Soft Frame Model* sont ensuite fixées arbitrairement, de manière à constituer une bonne approximation de la géométrie de leurs enfants, et à satisfaire différents critères de taille donnés. Au final, nous avons à disposition des ensembles de 0- et 1-simplexes de l'espace tridimensionnel.
3. Une image paramétrique est calculée pour chaque 0-simplexe des nœuds radiaux, et ce dans tous les domaines paramétriques correspondant à des surfaces radiales pour lesquelles ils sont un 0-ancêtre.
4. Une image paramétrique est calculée pour chaque 0-simplexe des lignes radiales ne correspondant pas à un nœud radial, et ce dans tous les domaines paramétriques correspondant à des surfaces radiales avec lesquelles elles sont incidentes.
5. Pour chacune des surfaces radiales, nous avons désormais à disposition un ensemble de 0- et 1-simplexes de contrainte plongés dans le domaine paramétrique. Une triangulation Contraint-Delaunay est alors construite (sans ajout de points de Steiner), puis les triangles situés à l'extérieur du domaine maillé sont retirés. Comme nous l'avons expliqué précédemment, ceci évite des insertions de points inutiles lors du traitement des épis.
6. Les épis sont détectés et traités un par un, dans les domaines paramétriques, selon la technique que nous avons présentée. Elle s'inspire des méthodes classiques, mais modifie légèrement la localisation de certaines divisions de manière à assurer une convergence. Dans chaque triangulation, tous les 1-simplexes de contrainte sont désormais de Delaunay. Ils y sont donc naturellement présents sous forme d'arêtes.

7. Notons enfin que la géométrie tridimensionnelle de tous les points des triangulations est connue, sauf (éventuellement) celle des 0-simplexes ajoutés lors du traitement des épis. Toutefois, il est possible d'en calculer une facilement selon la méthode que nous avons présentée.

Nous avons donc pu nous ramener au cas standard de la triangulation d'un PSLG dans un plan. Désormais, si jamais un 1-simplexe de contrainte appartenant à un épi doit être divisé (qu'il s'agisse ou non d'une bissection), alors tous les 1-simplexes de l'épi doivent l'être également, ainsi que toutes leurs images dans les autres espaces paramétriques. Le maillage tridimensionnel des lignes radiales concernées est par ailleurs mis à jour en conséquence.

5.2 Optimisation de la forme et de la taille des triangles

Dans la partie précédente (partie 5.1), nous avons décrit la manière avec laquelle nous honorons de manière conforme les contraintes sur les triangulations des surfaces radiales d'un *Soft Frame Model*. Le résultat est certes valide, mais constitue une approximation très pauvre de la géométrie des surfaces initiales. En effet, les triangles ne satisfont ni les critères de forme, ni ceux de taille que nous sommes susceptibles d'imposer. Cette partie présente ainsi les solutions apportées permettant de satisfaire ces contraintes. Elles concernent dans un premier temps les optimisations en forme, puis celles en taille.

5.2.1 Optimisation de la forme des triangles

Choix d'un critère de beauté

Avant tout, améliorer la forme des triangles implique de pouvoir *mesurer* ce qui les sépare de leur forme régulière. Comme nous l'avons vu dans la partie I, il existe de très nombreux critères valides permettant d'évaluer la *beauté* d'un triangle donné [George 97], et, comme mis en évidence dans [Labbé 99], plusieurs optimisations gouvernées chacune par un critère de forme différent conduisent à des résultats équivalents. Le choix du critère est donc a priori libre.

Au sein d'une méthode de type raffinement de Delaunay, l'optimisation consiste à ajouter de nouveaux points au maillage jusqu'à ce que sa qualité atteigne les objectifs fixés. Ces points sont les centres des cercles circonscrits aux triangles dont la forme n'est pas satisfaisante. En effet, puisque tous les simplexes sont maintenus de Delaunay, l'insertion d'un centre du cercle circonscrit à un triangle t , de rayon R , provoque à coup sûr l'élimination de t dans le maillage. Par ailleurs, les nouvelles arêtes formées ont nécessairement une longueur supérieure ou égale à R [Shewchuk 97], comme le montre la figure 5.8.

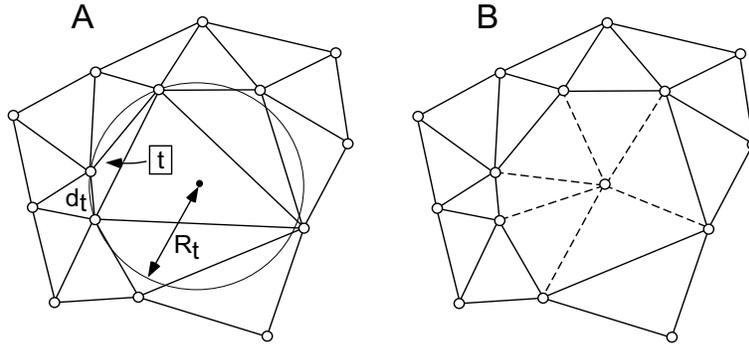


Figure 5.8 Le *mauvais* triangle t a été raffiné en insérant le centre de son cercle circonscrit dans le maillage (A). Les nouvelles arêtes créées (en pointillés) ont toutes une longueur supérieure à R_t (B). Si on a $R_t/d_t > B$, alors leur longueur est aussi supérieure à $B.d_t$.

Soit c le critère de beauté d'un triangle t défini comme le rapport entre le rayon R_t du cercle circonscrit à t et la longueur l_t de sa plus petite arête. Il est lié à la valeur du plus petit angle α_t dans le triangle par la relation (équation 5.4) :

$$c(t) = \frac{R_t}{l_t} = \frac{1}{2 \cdot \sin \alpha_t} \quad (5.4)$$

Ce critère semble naturellement optimisé pour les algorithmes de type raffinement de Delaunay. En effet, supposons que le centre du cercle circonscrit à un triangle, dont le critère de beauté vaut $c_0 = R_0/l_0$, soit ajouté au maillage. Dans ce cas, les nouvelles arêtes formées ont nécessairement une longueur supérieure ou égale à $c_0.l_0$, et donc si $c_0 \geq 1$, alors il n'est pas possible de créer de nouvelles arêtes qui soient plus courtes que celles existant déjà dans le maillage (voir figure 5.8). Par conséquent, les nouveaux points insérés dans le maillage lors de l'optimisation seront toujours séparés de leur plus proche voisin d'une distance supérieure à celle de la plus petite arête dans le maillage initial [Shewchuk 97].

En conclusion, si les centres des cercles circonscrits à tous les triangles du maillage ayant un critère c supérieur à un seuil B sont systématiquement ajoutés au maillage (avec $B \geq 1$), et que ce processus se termine, alors le plus petit angle α_{min} entre deux arêtes incidentes de la triangulation finale aura pour valeur (équation 5.5) :

$$\alpha_{min} = \arcsin \frac{1}{2.B} \quad (5.5)$$

Algorithme de raffinement

Principe

Le principe d'un algorithme de raffinement de Delaunay est très simple. Il est basé sur les deux règles données ci-après. Nous qualifierons désormais les triangles dont la valeur du critère de beauté c est supérieure à un seuil B de triangles *B-mauvais* ($B \geq 1$).

1. Si une arête de contrainte est accrochée par un point v (c'est-à-dire que son cercle circonscrit diamétral contient v), alors elle est divisée en son point milieu en deux nouvelles arêtes de contrainte, et ainsi de suite jusqu'à ce que les accrochages liés au point p disparaissent. Ce processus fonctionne si les épis ont été préalablement traités, comme nous l'avons énoncé dans la partie précédente (partie 5.1).
2. Chaque B -mauvais triangle du maillage est éliminé en insérant le centre v de son cercle circonscrit dans la triangulation. Toutefois, si le point v accroche une ou plusieurs arêtes de contrainte, alors il n'est pas inséré (il sera alors dit *rejeté*), et ces arêtes sont divisées conformément à la règle numéro 1, opération susceptible d'éliminer le triangle du maillage. Si ce n'est pas le cas, v est inséré dans le maillage.

Discussions sur la convergence du raffinement

Cependant, la convergence de cet algorithme n'est atteinte que pour certaines valeurs de B . En effet, lorsque le centre du cercle circonscrit d'un B -mauvais triangle, dont le critère de beauté vaut $c_0 = R_0/l_0$ ($c_0 \geq B \geq 1$), est considéré pour une nouvelle insertion, et que ce point accroche des arêtes de contrainte, les nouvelles arêtes formées n'ont pas nécessairement une longueur supérieure ou égale à R_0 , ce qui empêche l'algorithme d'arriver à son terme. Toute la problématique est donc de caractériser et de traiter les configurations responsables de la création d'arêtes *encore plus petites*. Pour cela, nous introduisons les notions suivantes :

- Le *rayon d'insertion* d'un sommet v de la triangulation est la longueur de la plus petite arête incidente à v directement après l'ajout de v au maillage. Ainsi :
 - Si v est un sommet de la triangulation, son rayon d'insertion est la distance à son plus proche voisin.
 - Si v est le point milieu d'une arête de contrainte, son rayon d'insertion est égal à la demi-longueur de cette arête.
 - Si v est le centre du cercle circonscrit à un triangle, son rayon d'insertion est égal au rayon de ce cercle.
- Le *parent* d'un sommet v de la triangulation est le point *intuitivement responsable* de l'insertion de v . Autrement dit :
 - Si v est un sommet initial de la triangulation, il n'a pas de parent.
 - Si v est le point milieu d'une arête de contrainte, son parent est le centre d'un cercle circonscrit qui a été rejeté (le parent n'est donc dans ce cas pas un sommet de la triangulation).
 - Si v est le centre du cercle circonscrit à un triangle, son parent est, parmi les deux extrémités de la plus petite arête du triangle, celui qui a été le plus récemment ajouté au maillage.

Ces notions sont moins générales que celles utilisées habituellement dans les méthodes de raffinement de Delaunay (voir par exemple [Shewchuk 97], [Shewchuk 00-(1)]), car dans notre contexte, nous partons d'une situation initiale où toutes les arêtes de contrainte sont déjà de Delaunay. Dans ce cas, les accrochages ne peuvent donc provenir que du centre d'un cercle circonscrit à un B -mauvais triangle du maillage. Deux situations peuvent alors se présenter :

1. Le centre v du cercle circonscrit à un B -mauvais triangle t n'accroche aucune arête de contrainte. Par conséquent, ce point sera inséré dans le maillage. Le rayon d'insertion r_p du parent p de v est au moins égal à la longueur de la plus petite arête de t . Comme t est B -mauvais et que le rayon d'insertion r_v de v est égal au rayon du cercle circonscrit à t , on a (inégalité 5.6) :

$$\frac{r_v}{r_p} \geq B \quad (5.6)$$

2. Le centre p du cercle circonscrit à un B -mauvais triangle t accroche une arête de contrainte. Par conséquent, p est rejeté et une bisection sera faite sur cette arête, résultant en un nouveau point v , de parent p (voir figure 5.9). Le rayon d'insertion r_v de v est la demi-longueur de l'arête, et celui de son parent r_p est égal au rayon du cercle circonscrit à t . Il est alors possible de montrer qu'on a (inégalité 5.7) :

$$\frac{r_v}{r_p} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (5.7)$$

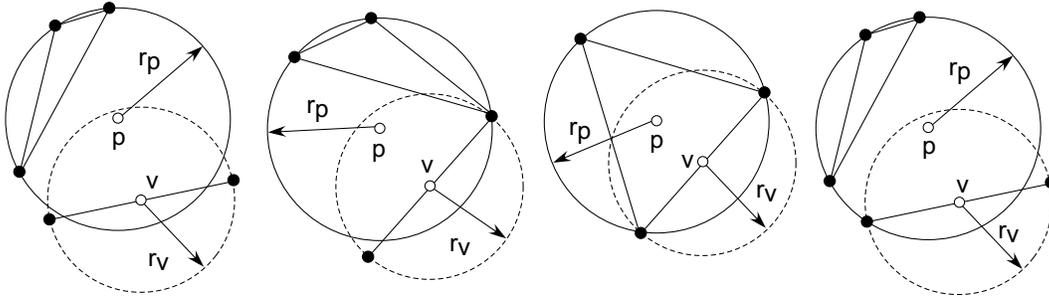


Figure 5.9 Le centre p du cercle circonscrit à un *mauvais* triangle accroche une arête de contrainte. Par conséquent, le point v est ajouté au maillage. On a alors $r_v/r_p \geq \sqrt{2}/2$.

Toutefois, le point p n'a pas été ajouté au maillage. Dans ce cas, le rayon d'insertion à considérer pour r_p est celui du parent de p (le *grand-parent* de v), c'est-à-dire l'extrémité de la plus petite arête de t la plus récemment ajoutée au maillage. Ceci nous ramène au cas numéro 1, et on a donc (inégalité 5.8) :

$$\frac{r_v}{r_p} \geq B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (5.8)$$

En conclusion, pour éviter la création d'arêtes plus courtes que celles existant déjà dans le maillage, il suffit d'assurer que $r_v \geq r_p$ en toutes circonstances, soit a priori $B \geq \sqrt{2}$, ce qui équivaut à un angle minimum de 20.7 degrés d'après l'équation 5.5.

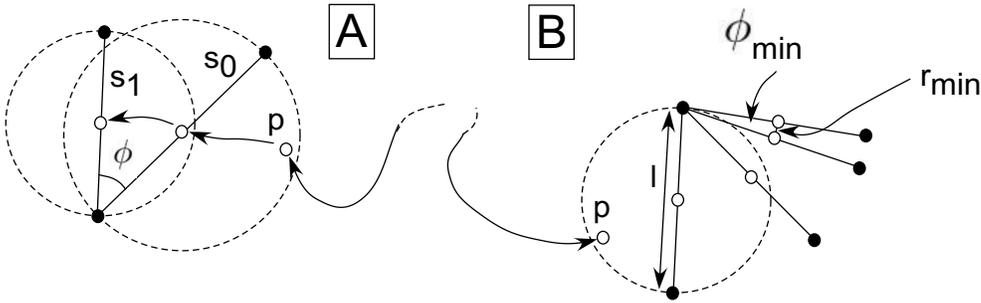


Figure 5.10 (A) : les segments s_0 et s_1 ne sont pas initialement accrochés. Le point p est ajouté au maillage mais il accroche le segment s_0 . Le point milieu de s_0 est par conséquent ajouté au maillage, mais ceci va provoquer l'accrochage du segment s_1 , et donc l'insertion de son point milieu. Au final, les deux nouveaux segments ne sont pas accrochés. Cette situation ne peut arriver que si $\phi \leq \pi/3$. (B) : si tous les segments formant entre eux des angles inférieurs ou égaux à 60 degrés ont la même longueur l , alors la bissection de l'un provoque celle de tous les autres, et la plus petite arête formée vaut alors $r_{min} = l \cdot \sin(\phi_{min}/2)$.

Malheureusement, dans certaines configurations bien précises, cette condition n'est pas suffisante pour assurer la convergence. En effet, la bissection d'une arête de contrainte accrochée s_0 (de longueur l_0) est susceptible d'induire la bissection d'une autre arête incidente s_1 (de longueur l_1 , formant un angle ϕ avec s_0), si celle-ci se trouve à son tour accrochée par le point milieu de s_0 . Ceci ne peut arriver que dans le cas où $l_0 \geq l_1$ et $\cos \phi \geq 0.5$, soit $\phi \leq \pi/3$, comme le montre la figure 5.10. Si jamais le rayon d'insertion du point milieu de s_1 est inférieur à celui de s_0 , alors l'algorithme risque de ne pas terminer [Shewchuk 00-(1)]. Avant de réaliser une bissection sur une arête accrochée, il est donc nécessaire d'évaluer le rayon d'insertion minimum r_{min} de tous les points dont elle induit la création. Le calcul de r_{min} est facile si toutes les arêtes incidentes en un point formant entre elles des angles ϕ_i inférieurs ou égaux à 60 degrés ont la même longueur l (voir figure 5.10). En effet, on a alors (équation 5.9) :

$$r_{min} = l \cdot \sin\left(\frac{\min_i(\phi_i)}{2}\right) \quad (5.9)$$

Afin d'assurer une longueur commune aux arêtes, il est possible, en préalable au raffinement, d'employer l'algorithme présenté dans la partie précédente concernant le traitement des épis (où l'angle limite était cette fois de 45 degrés - voir partie 5.1), ce qui élargit ou crée de nouveaux épis. Ainsi, si r_p est le rayon d'insertion du parent du centre du cercle circonscrit accrochant une arête de longueur l appartenant à un épi dont l'angle minimal est ϕ_{min} , et r_v est le plus petit rayon d'insertion des points insérés en conséquence, alors on a (inégalité 5.10) :

$$\frac{r_v}{r_p} \geq B \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\phi_{min}}{2}\right) \quad (5.10)$$

La condition 5.10 implique en particulier d'écartier du processus de raffinement tous les B -mauvais triangles incidents à deux arêtes de contrainte faisant partie d'un épi [Shewchuk 00-(1)]. En conclusion, avant le début du raffinement, si toutes les arêtes de contraintes adjacentes qui forment entre elles des angles inférieurs ou égaux à 60 degrés, mais supérieurs ou égaux à ϕ_{min} , ont la même longueur, alors la convergence est assurée si les B -mauvais triangles considérés vérifient (inégalité 5.11) :

$$B \geq \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \sin\left(\frac{\phi_{min}}{2}\right)} \quad (5.11)$$

Améliorations de la qualité du maillage

Le choix d'un seuil B constant vérifiant la condition 5.11 garantit de mener le processus de raffinement à terme. Toutefois, la valeur de B utilisée peut alors être arbitrairement grande, et ainsi affecter la qualité de la triangulation finale dans les zones non-situées à proximité des arêtes de contrainte. En effet, le fait d'insérer le centre du cercle circonscrit à un B -mauvais triangle qui n'accroche aucune arête de contrainte ne menace en rien la convergence si $B \geq 1$ (inégalité 5.6). Par conséquent, nous pensons qu'une stratégie visant à utiliser comme seuil $B = 1$, *mais à contrôler à chaque insertion qu'il n'y a pas diminution du rayon d'insertion*, produit des triangulations de meilleure qualité. Comme nous l'avons vu, cela revient à s'assurer qu'aucune arête plus courte que la plus petite arête du *mauvais* triangle ne soit jamais créée.

Synthèse

En conclusion, nous résumons ici les étapes de l'algorithme final de raffinement que nous avons utilisé dans notre travail, et discutons de la qualité du maillage obtenu. Dans son fonctionnement, la principale originalité de cet algorithme est de considérer comme *mauvais* les triangles dont le critère de forme $c_0 = R_0/l_0$ est supérieur ou égal à 1.

1. L'étape numéro 6 de l'algorithme présenté précédemment pour satisfaire les contraintes de manière conforme doit être tout d'abord modifiée pour détecter et traiter les épis définis par un angle limite de non plus 45 mais 60 degrés.
2. Les triangles du maillage sont ensuite ordonnés par critère de beauté décroissant (les triangles de forme régulière sont les derniers) dans une liste L . Le critère de beauté utilisé est le rapport entre le rayon cercle circonscrit du triangle et la longueur de sa plus petite arête.
3. Tant que L n'est pas vide, retirons le premier élément t de la liste, c'est-à-dire le triangle le plus *mauvais* dans l'état actuel du maillage. Soit B la valeur de son critère de beauté.

- Si $B < 1$, alors le centre du cercle circonscrit à t n'est pas un candidat valide pour une insertion. L'algorithme recommence alors à l'étape numéro 3.
 - Dans le cas contraire (si $B \geq 1$), alors le centre du cercle circonscrit à t est un candidat potentiel pour une insertion. L'algorithme passe alors à l'étape numéro 4.
4. Tant que le centre p du cercle circonscrit à t accroche une arête de contrainte, et que t n'a pas été éliminé du maillage, alors :
- Si l'arête ne fait pas partie d'un épi, alors une bisection est faite sur cette arête si sa demi-longueur est plus grande que la plus petite arête de t . Sinon, p ne doit en aucun cas être au final ajouté au maillage.
 - Si l'arête fait partie d'un épi d'angle minimum ϕ_{min} , où toutes les arêtes ont une longueur l , alors une bisection est faite sur toutes les arêtes de l'épi si la plus petite arête de t est plus courte que r_{min} (voir équation 5.9). Sinon, p ne doit en aucun cas être au final ajouté au maillage.
5. Si t est encore présent dans le maillage, et que p n'accroche plus aucune arête de contrainte, alors p est inséré dans la triangulation. Les triangles éliminés (dont t) sont retirés de la liste L , et les nouveaux triangles y sont ajoutés. L'algorithme recommence alors à l'étape numéro 3.

Cet algorithme est valable pour une seule triangulation. En pratique, nous construisons les maillages de plusieurs surfaces radiales d'un *Soft Frame Model*. Aussi, lorsqu'une bisection est faite sur une arête de contrainte, un nouveau point est inséré dans tous les domaines paramétriques qui partagent cette arête, ainsi que sur le segment adéquat du maillage de la ligne radiale correspondante, dans l'espace tridimensionnel cette fois-ci. Par conséquent, le fait d'éliminer tous les B -mauvais triangles dans un domaine peut en créer de nouveaux dans un autre. C'est pourquoi nous devons maintenir une liste L_i de B -mauvais triangles dans chaque domaine paramétrique, et continuer le processus de raffinement tant qu'il existe une liste L_i qui ne soit pas vide.

Au final, dans la triangulation, l'angle minimum dépend du plus petit angle qui existe au sein des épis, et tous les triangles ont un critère de forme dont la valeur est inférieure à B_0 , avec (inégalité 5.12) :

$$B_0 = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \sin\left(\frac{\min\{\phi_{min}\}}{2}\right)} \quad (5.12)$$

Des résultats de ce processus de raffinement sur des cas concrets, présentés dans [Lepage 02-(1)] et [Lepage 02-(2)], seront donnés dans la dernière partie de ce chapitre.

5.2.2 Optimisation de la taille des triangles

Définition d'une carte de résolution

Stockage de la résolution souhaitée

Les spécifications en taille que la triangulation doit respecter sont en général définies sur une *carte de résolution* qui prend la forme d'un support discret, afin d'estimer les résolutions souhaitées, que nous allons considérer comme équivalentes à des longueurs. Ce *maillage d'arrière-plan* est soit la triangulation elle-même, soit un autre maillage englobant le domaine maillé ([Borouchaki 97-(1)], [Borouchaki 97-(2)], [Zhu 02]). Dans notre travail, nous avons opté pour ce deuxième type de solution. Comme carte de résolution, nous choisissons alors une simple grille régulière et structurée, dont la résolution sera par la suite supposée *suffisamment fine*, et dans laquelle le domaine paramétrique est entièrement inclus. L'avantage d'utiliser ce type de support est l'accès très rapide à la valeur de résolution souhaitée pour un point bidimensionnel (u, v) de la carte de résolution.

Définition des contraintes de résolution

D'une manière classique, nous voyons la résolution souhaitée comme une combinaison de plusieurs entités géométriques que nous appellerons *contraintes de résolution* [Alliez 02]. Ces contraintes sont de nature variée, et dans notre travail nous les avons classées en deux grandes catégories :

- Les contraintes de résolution dites *analytiques*. Les valeurs de résolution $r(u, v)$ provenant de ces contraintes dépendent dans ce cas uniquement de la valeur des coordonnées u et v du point de la carte de résolution \mathcal{C} où elles sont évaluées. Nous pouvons considérer par exemple :
 - Une contrainte de résolution de valeur constante : $r(u, v) = k \forall (u, v) \in \mathcal{C}$, avec k un réel strictement positif,
 - Une contrainte de résolution de valeur variable, dépendante d'une combinaison des coordonnées u et v : $r(u, v) = r_0 + \sqrt{(v - v_0)^2 + (u - u_0)^2}$, avec r_0 un réel strictement positif, et (u_0, v_0) un point donné de la carte de résolution (ou du domaine paramétrique).
- Les contraintes de résolution dites *propriété-dépendantes*. Les valeurs de résolution $r(u, v)$ provenant de ces contraintes dépendent dans ce cas de la valeur d'une propriété définie sur un enfant de la surface radiale considérée, au point correspondant dans l'espace tridimensionnel. Cette propriété traduit :
 - soit des attributs *géométriques* de la surface, comme la courbure totale, minimum ou maximum, la valeur du vecteur normal, ou encore la distorsion de la paramétrisation ([Hormann 01], [Alliez 02], [Alliez 03]).
 - soit des caractéristiques *géologiques* qui doivent guider la résolution du maillage, comme la porosité, la perméabilité, le faciès, etc.

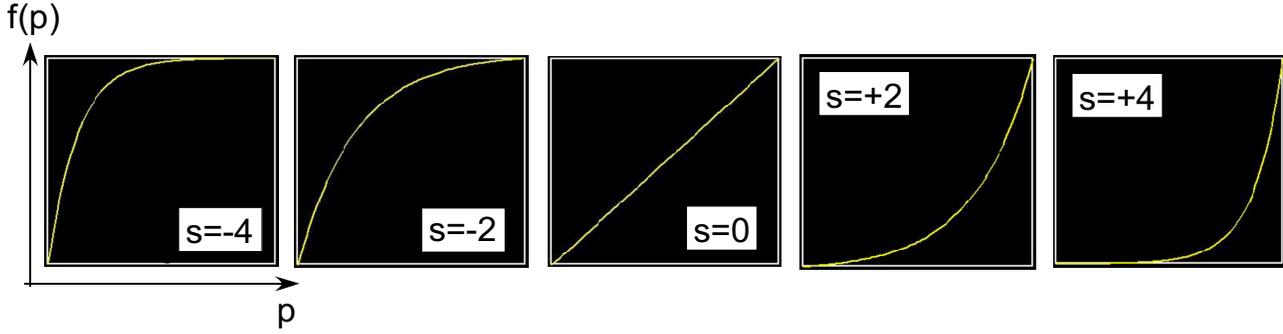


Figure 5.11 Allure de la fonction de transfert f permettant d'associer une valeur de résolution souhaitée aux valeurs d'une propriété p (cas d'une fonction croissante). Le paramètre de finesse s (voir équation 5.13) caractérise la rapidité avec laquelle f atteint la valeur de résolution associée au maximum de la propriété.

Supposons que l'enfant de la surface radiale se présente sous la forme d'un 2-complexe simplicial C . Pour calculer $r(u, v)$, nous devons tout d'abord trouver le triangle t^d du domaine paramétrique qui contienne le point (u, v) . Ensuite, d'après les coordonnées barycentriques de ce point dans t^d , la valeur de la propriété concernée est évaluée dans le triangle t^c de C qui lui correspond dans l'espace tridimensionnel. Finalement, il nous faut associer une valeur de résolution à cette valeur de propriété, grâce à une *fonction de transfert*, que nous noterons f . Supposons que la propriété varie dans l'intervalle $[p_{min}, p_{max}]$, et que nous souhaitons le mettre en bijection avec un intervalle de résolution $[r_{min}, r_{max}]$. Nous proposons comme fonction de transfert la fonction suivante (équations 5.13), selon qu'elle soit choisie respectivement croissante ou décroissante :

$$\begin{aligned} \forall p \in [p_{min}, p_{max}], f(p) &= r_{min} + (r_{max} - r_{min}) \cdot \frac{1 - e^{2.s \cdot \frac{p - p_{min}}{p_{max} - p_{min}}}}{1 - e^{2.s}} \\ \forall p \in [p_{min}, p_{max}], f(p) &= r_{max} - (r_{max} - r_{min}) \cdot \frac{1 - e^{2.s \cdot \frac{p - p_{min}}{p_{max} - p_{min}}}}{1 - e^{2.s}} \end{aligned} \quad (5.13)$$

La paramètre s , que nous appellerons désormais *finesse* de la fonction de transfert, caractérise la rapidité avec laquelle cette fonction atteint la valeur associée à p_{max} , comme le montre la figure 5.11. En pratique, nous le faisons varier dans l'intervalle $[-5, +5]$. Notons que la finesse ne peut pas être nulle. Toutefois, ce cas limite correspond à une variation linéaire, et nous avons alors, dans le cas d'une fonction respectivement croissante ou décroissante (équations 5.14) :

$$\begin{aligned} \forall p \in [p_{min}, p_{max}], f(p) &= r_{min} + (r_{max} - r_{min}) \cdot \frac{p - p_{min}}{p_{max} - p_{min}} \\ \forall p \in [p_{min}, p_{max}], f(p) &= r_{max} - (r_{max} - r_{min}) \cdot \frac{p - p_{min}}{p_{max} - p_{min}} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Une telle valeur de résolution ne peut être affectée aux points de la carte de résolution qui n'appartiennent pas au domaine paramétrique (il y en a, nous l'avons vu dans la partie 5.1 de ce chapitre). Pour régler ce problème, nous proposons une solution basée sur une extrapolation.

Ces différentes contraintes de résolution peuvent être ensuite combinées différemment. Supposons que n contraintes $\{r_0, r_1, \dots, r_{n-1}\}$ aient été définies, et qu'à chacune d'entre elles un poids w_i ait été associé ($0 \leq i \leq n-1$). Nous proposons de choisir une des modalités suivantes pour calculer la carte finale de résolution (équations 5.15) :

$$\begin{aligned}
 r(u, v) &= \min_i \{r_i(u, v)\} \\
 r(u, v) &= \max_i \{r_i(u, v)\} \\
 r(u, v) &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{i=n-1} r_i(u, v) \\
 r(u, v) &= \sum_{i=0}^{i=n-1} w_i \cdot r_i(u, v), \text{ avec } \sum_{i=0}^{i=n-1} w_i = 1
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Nous avons ainsi à disposition un ensemble de valeurs *scalaires*, stockées sur les sommets du maillage d'arrière-plan, définissant la résolution souhaitée en n'importe quel point de l'espace de la triangulation. D'autres méthodes ([Borouchaki 96], [Bossen 96], [Borouchaki 97-(1)], [Borouchaki 97-(2)], [Shimada 97], [Lo 01]) sont plutôt basées sur la donnée d'un champ de *métriques*, qui permet à la fois de gouverner la forme et la taille des triangles. Dans notre travail, nous avons cependant choisi de nous cantonner à la génération de triangles *isotropes*, et des valeurs scalaires sont alors suffisantes.

Mise en conformité avec la carte de résolution

Choix d'une méthode

Il existe deux principales méthodes pour générer un maillage contraint par une carte de résolution. La première consiste à générer un ensemble de points conforme à la carte de résolution, incluant des points échantillonnés sur les simplexes de contrainte du maillage, puis à construire une triangulation Contraint-Delaunay de cet ensemble ([Borouchaki 95], [Alliez 02], [Alliez 03]). La deuxième, que nous avons choisie dans notre travail, consiste à partir d'une triangulation existante, de résolution grossière, puis de la raffiner en y ajoutant de nouveaux points, jusqu'à obtenir satisfaction sur la taille des triangles [Hormann 01]². Dans ce cas, la résolution du maillage final ne sera qu'*inférieure ou égale à celle initialement souhaitée*. Les insertions peuvent par exemple correspondre à de simples bisections d'arêtes ([Jones 97], [Plaza 98]), mais la triangulation obtenue ne sera alors pas de Delaunay. Nous avons par conséquent choisi de procéder par raffinement de Delaunay.

²Il est aussi possible de considérer le mécanisme inverse, à savoir partir d'une triangulation arbitrairement fine que l'on décime jusqu'à obtenir la résolution souhaitée.

Choix d'un critère de taille

Pour déterminer si la taille d'un triangle t du maillage est conforme à une carte de résolution donnée \mathcal{C} , il est nécessaire de mesurer le rapport entre sa taille actuelle et la taille qu'il devrait avoir. Nous allons tout d'abord considérer que le rayon R_t du cercle circonscrit à t est du même ordre de grandeur que sa taille. Cette approximation reste à peu près valable quelle que soit la forme des triangles. En effet, si par exemple le critère de beauté $c_t = R_t/l_t$ est utilisé, avec l_t la longueur de la plus petite arête du triangle, alors ceci revient à dire que la taille du triangle s'assimile à $c_t \cdot l_t$. Comme en général la taille d'un triangle est supérieure à la longueur de sa plus petite arête, il suffit donc d'avoir $c_t \geq 1$ pour que l'approximation soit valide, ce qui couvre largement la gamme de forme des triangles. Pour évaluer ensuite la taille que t devrait avoir, plusieurs voies sont possibles :

- Prendre la valeur donnée par la carte de résolution en un point unique, comme par exemple son barycentre, ou encore le centre de son cercle circonscrit, comme prescrit dans [Li 00-(2)]. Sous certaines hypothèses, cette méthode présente des avantages certains, que nous évoquerons par la suite. Cependant, nous ne la jugeons pas satisfaisante, dans la mesure où elle ne permet pas de capturer les variations brutales de la résolution souhaitée. En effet, la valeur obtenue n'est pas forcément pertinente (voir figure 5.12).
- Considérer plutôt les valeurs données par la carte de résolution en un ensemble de points échantillonnés dans le triangle, solution que nous préconisons. Pour que cet échantillonnage soit valide, il est nécessaire qu'il ait une résolution inférieure ou égale à celle du maillage d'arrière-plan. Si nous notons $\{(u_0, v_0), (u_1, v_1), \dots, (u_{p-1}, v_{p-1})\}$ les p points échantillonnés dans le triangle, alors la taille souhaitée $r_t^{\mathcal{C}}$ du triangle vaut (équation 5.16) :

$$r_t^{\mathcal{C}} = \min_i \{r(u_i, v_i)\} \quad (5.16)$$

En pratique, les échantillons (u_i, v_i) ($0 \leq i \leq p-1$) sont choisis comme les nœuds du maillage d'arrière-plan qui sont contenus dans le triangle, comme le montre la figure 5.12. S'il n'en existe pas, ce qui peut arriver si la résolution de ce maillage n'est pas suffisante, alors un seul échantillon peut être utilisé, par exemple le barycentre ou le centre du cercle circonscrit au triangle, car sa valeur est cette fois-ci nécessairement pertinente.

Notre méthode est donc basée sur le critère de taille c_t défini ci-après par l'équation 5.17. Un triangle dont la valeur de ce critère est supérieure à B sera par la suite dit *B-mauvais*, par analogie avec la méthode de raffinement basée sur un critère de forme que nous avons présentée précédemment.

$$c_t = \frac{R_t}{\min_i \{r(u_i, v_i)\}} \quad (5.17)$$

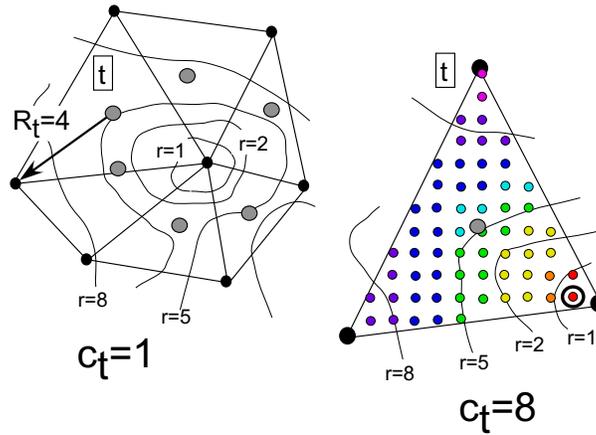


Figure 5.12 Sur cet exemple, les isovaleurs $r = 1$, $r = 2$, $r = 5$ et $r = 8$ de la résolution souhaitée sont affichées. La résolution actuelle des triangles est donnée par le rayon de leur cercle circonscrit. À gauche : la résolution souhaitée des triangles est obtenue en évaluant la valeur de la carte de résolution au niveau des centres des cercles circonscrits (points gris), et aucun d'eux (dont t) n'est raffiné. La résolution finale du maillage ne capture alors pas toutes les variations de la carte de résolution. À droite : la résolution souhaitée des triangles est obtenue en évaluant le minimum des valeurs la carte de résolution dans le triangle (point rouge entouré), et le triangle t est cette fois raffiné.

Algorithme de raffinement

L'algorithme original de raffinement que nous avons mis au point dans notre travail est en tout point similaire à celui dicté par une optimisation de la forme des triangles. Il génère également des simplexes de Delaunay, et est basé sur les mêmes règles très simples que nous rappelons ci-après (toutes les arêtes de contrainte sont supposées être initialement de Delaunay). De la même manière, lorsqu'une bisection est faite sur une arête de contrainte, un nouveau point est inséré dans tous les domaines paramétriques qui partagent cette arête, ainsi que sur le segment adéquat du maillage de la ligne radiale correspondante, dans l'espace tridimensionnel cette fois-ci.

1. Si une arête de contrainte est accrochée par un point p , alors elle est divisée en son point milieu en deux nouvelles arêtes de contrainte, et ainsi de suite jusqu'à ce que les accrochages liés au point p disparaissent. Ce processus fonctionne si les épis ont été préalablement traités, comme nous l'avons énoncé dans la partie précédente (partie 5.1).
2. Chaque B -mauvais triangle du maillage est éliminé en insérant le centre p de son cercle circonscrit dans la triangulation. Toutefois, si le point p accroche une ou plusieurs arêtes de contrainte, alors il n'est pas inséré (il sera alors dit *rejeté*), et ces arêtes sont divisées conformément à la règle numéro 1, opération susceptible d'éliminer le triangle du maillage. Si ce n'est pas le cas, p est inséré dans le maillage.

Dans le contexte d'un raffinement de Delaunay guidé par un critère de taille, la convergence est assurée quelle que soit la valeur de B choisie (avec $B > 0$), et la triangulation finale a toujours une résolution au moins égale à celle définie dans le maillage d'arrière-plan

si $B \leq 1$. Toutefois, pour que sa résolution soit le plus conforme possible aux contraintes, B doit rester proche de 1. Des exemples concrets illustrant le bon fonctionnement de notre méthode, présentés dans [Lepage 02-(1)] et [Lepage 02-(2)], seront donnés dans la dernière partie de ce chapitre.

Quelques commentaires sur la forme des triangles générés

Il semble difficile de pouvoir donner une valeur limite assurée d'un critère de forme aux triangles générés par notre algorithme de raffinement de Delaunay, ce qui n'est pas le cas pour celui présenté dans [Li 00-(2)]. Nous l'avons dit, le choix du critère de taille ne permet alors pas de capturer précisément toutes les variations de la carte de résolution (comme nous le faisons), mais il est montré que pour une certaine valeur limite de ce critère, les triangles générés ont tous un critère de forme R_t/l_t inférieur à $\sqrt{2}$, ce qui évite la présence d'angles trop faibles dans la triangulation, ce que nous ne pouvons pas garantir. Cependant, il est tout à fait possible de faire suivre notre algorithme par une optimisation en forme, garantie de converger. Cette solution est discutable dans la mesure où l'ajout de points supplémentaires risque de diminuer encore l'écart qui existe entre la résolution du maillage et celle imposée par les différentes contraintes en taille.

5.3 Résultats et applications

Les deux parties précédentes (parties 5.1 et 5.2) ont montré comment, dans un espace paramétrique bidimensionnel, nous procédons pour générer des triangulations conformes honorant des contraintes sur la forme et la taille des mailles. Ces maillages représentent cependant la géométrie d'objets tridimensionnels que sont les surfaces radiales d'un *Soft Frame Model*. Par conséquent, avant de présenter des résultats et une application illustrant le bon fonctionnement de nos algorithmes, cette partie s'attache en premier lieu à montrer comment la validité géométrique du *Soft Frame Model* est finalement assurée.

5.3.1 Retour dans l'espace tridimensionnel

Existence d'un décalage géométrique

Que ce soit lors des phases de respect des contraintes, d'optimisation de la forme des triangles, ou encore d'optimisation de leur taille, un maillage tridimensionnel des lignes radiales a été maintenu, et les 1-simplexes initiaux ont été éventuellement divisés. Dans les domaines paramétriques, nous distinguons alors trois types distincts parmi les sommets d'une triangulation :

1. Les sommets qui correspondent aux images paramétriques des 0-simplexes constituant la géométrie initiale des nœuds et lignes radiales. Ces sommets ont pour l'instant deux géométries tridimensionnelles : une qui est celle d'un 0-simplexe d'un nœud ou d'une ligne radiale, et une autre, donnée par la paramétrisation, qui correspond à un point situé quelque part sur un enfant de la surface radiale. Comme nous l'avons vu dans la première partie de ce chapitre, le décalage entre ces deux géométries est minimum.

2. Les sommets qui correspondent à des points insérés sur les arêtes de contrainte lors des différents accrochages. Ces sommets ont soit une, soit deux géométries : une qui est celle d'un 0-simplexe d'une ligne radiale, et éventuellement une autre donnée par la paramétrisation, si toutefois ils appartiennent au domaine paramétrique.
3. Les sommets qui correspondent à des points ajoutés à l'intérieur du maillage lors des phases de raffinement de Delaunay, guidées par un critère de forme ou de taille. Ces sommets ont soit une, soit aucune géométrie, selon qu'ils appartiennent ou non au domaine paramétrique.

Il est impératif que la géométrie des surfaces radiales respecte celui des nœuds et lignes radiales de contrainte. Ainsi, lorsque le choix est possible (et c'est le cas pour les deux premiers types de sommets), c'est la géométrie correspondant aux 0-simplexes des nœuds et lignes radiales qui doit être choisie. Or, ceci est susceptible de changer de manière sensible la forme et la taille des triangles, qui n'auraient été globalement préservées que dans le cas contraire, si les géométries données par les paramétrisations étaient utilisées.

Correction du décalage

La correction du décalage se fait surface radiale par surface radiale, de la manière suivante :

- Une image tridimensionnelle \mathbf{x}_{2d} issue de la paramétrisation est tout d'abord calculée pour tous les sommets de la triangulation. Lorsqu'un sommet n'appartient pas au domaine paramétrique, sa géométrie est déduite de celle de ces voisins.
- Une propriété vectorielle p est créée sur les sommets de la triangulation. Pour ceux qui correspondent aux nœuds et lignes radiales de contrainte, cette propriété est fixée à la valeur $(\mathbf{x}_{3d} - \mathbf{x}_{2d})$, avec \mathbf{x}_{3d} la géométrie des 0-simplexes des éléments radiaux, qui est connue. Pour les autres sommets, p est initialisée à 0.
- La propriété p est ensuite interpolée sur les sommets de la triangulation. La géométrie finale d'un sommet est alors donnée par la valeur $(p + \mathbf{x}_{2d})$.

L'application de ce procédé sur toutes les triangulations fournit des maillages de bonne qualité, que ce soit au niveau de la forme ou de la taille des triangles. Cette qualité est d'autant plus proche de celle des maillages des domaines paramétriques, que la géométrie initiale des nœuds et lignes radiales du *Soft Frame Model* est une bonne approximation de celles de leurs enfants, et que les images paramétriques des 0-simplexes matérialisant ces géométries sont calculées correctement. Au final, les sommets des triangulations représentant un contact possèdent rigoureusement la même géométrie, ce qui assure la validité géométrique du *Soft Frame Model*.

5.3.2 Résultats des processus d'optimisations

Exemples de remaillages de surfaces avec optimisation de la forme des triangles

Les figures 5.13, 5.14 et 5.15 donnent des exemples des maillages obtenus avec notre approche, sur des modèles synthétiques. À chaque fois, un *Soft Frame Model* a été construit

(voir chapitre 3), les surfaces originales paramétrisées (voir partie 4.2), les triangulations contraintes par une approche conforme (voir partie 5.1), les triangles optimisés selon un critère de forme (voir partie 5.2) et une géométrie tridimensionnelle valide affectée aux triangulations obtenues, comme expliqué précédemment. Ceci nous montre comment l'utilisation d'un *Soft Frame Model* permet d'assurer la validité topologique et géométrique d'un modèle structural. Un cas réel est présenté plus tard (voir figure 5.20). Sur ces différentes figures, on peut voir que la qualité des triangles est partout satisfaisante, que les angles faibles sont bien gérés, et que les contacts entre les surfaces sont « parfaits » dans l'espace tridimensionnel.

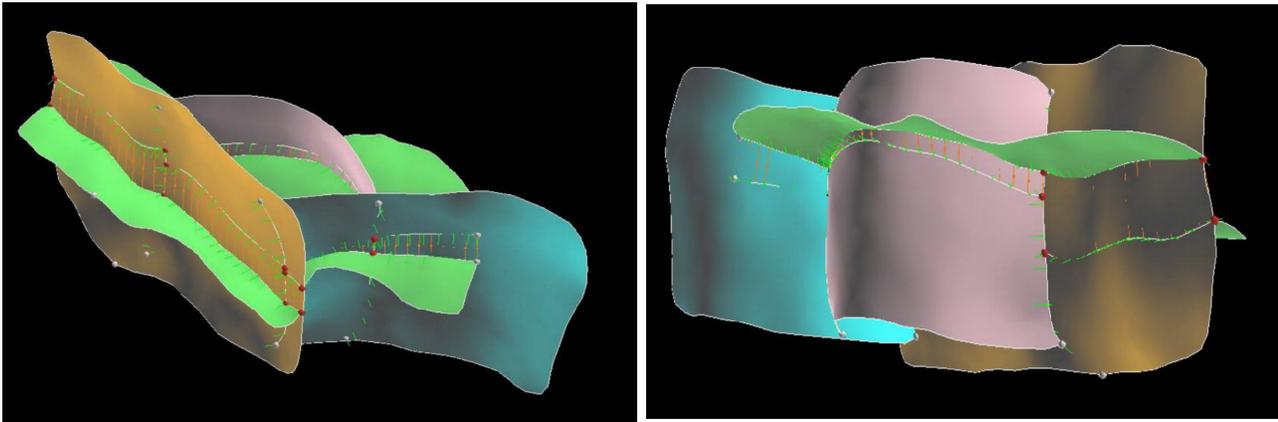


Figure 5.13 Ce premier exemple concerne un horizon (en vert) affecté par trois failles branchées les unes sur les autres. Tous les contacts sont pris en compte dans le *Soft Frame Model* correspondant.

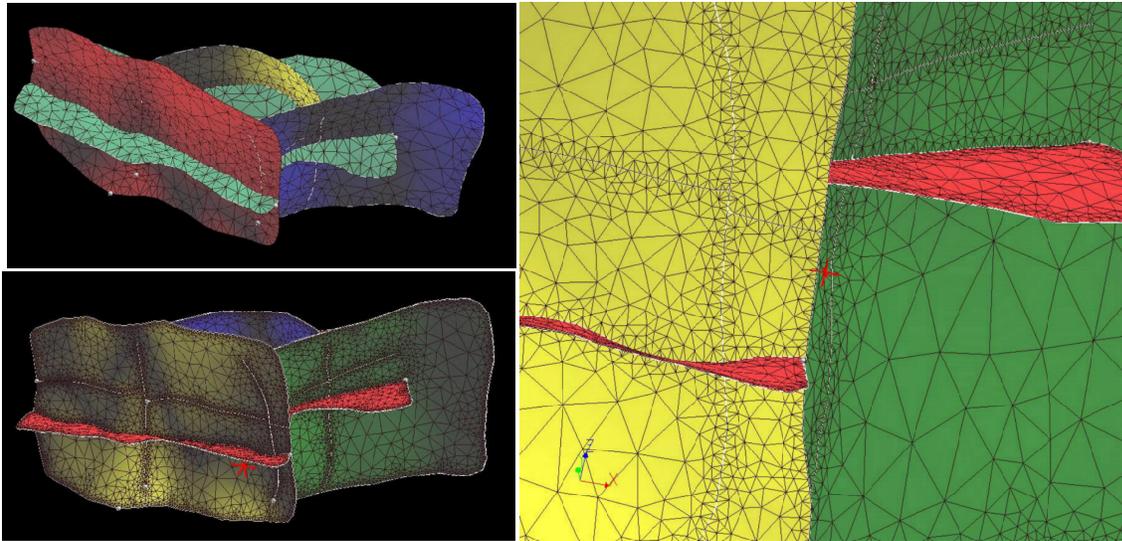


Figure 5.14 Cette figure montre le résultat de deux remaillages du modèle présenté dans la figure 5.13, effectués à partir de lignes radiales de résolutions différentes (avec un rapport de 5). L'image de droite montre un détail des triangulations obtenues avec la résolution la plus fine. Noter la qualité des triangles et les contacts parfaits entre les surfaces dans l'espace tridimensionnel, assurés par construction.

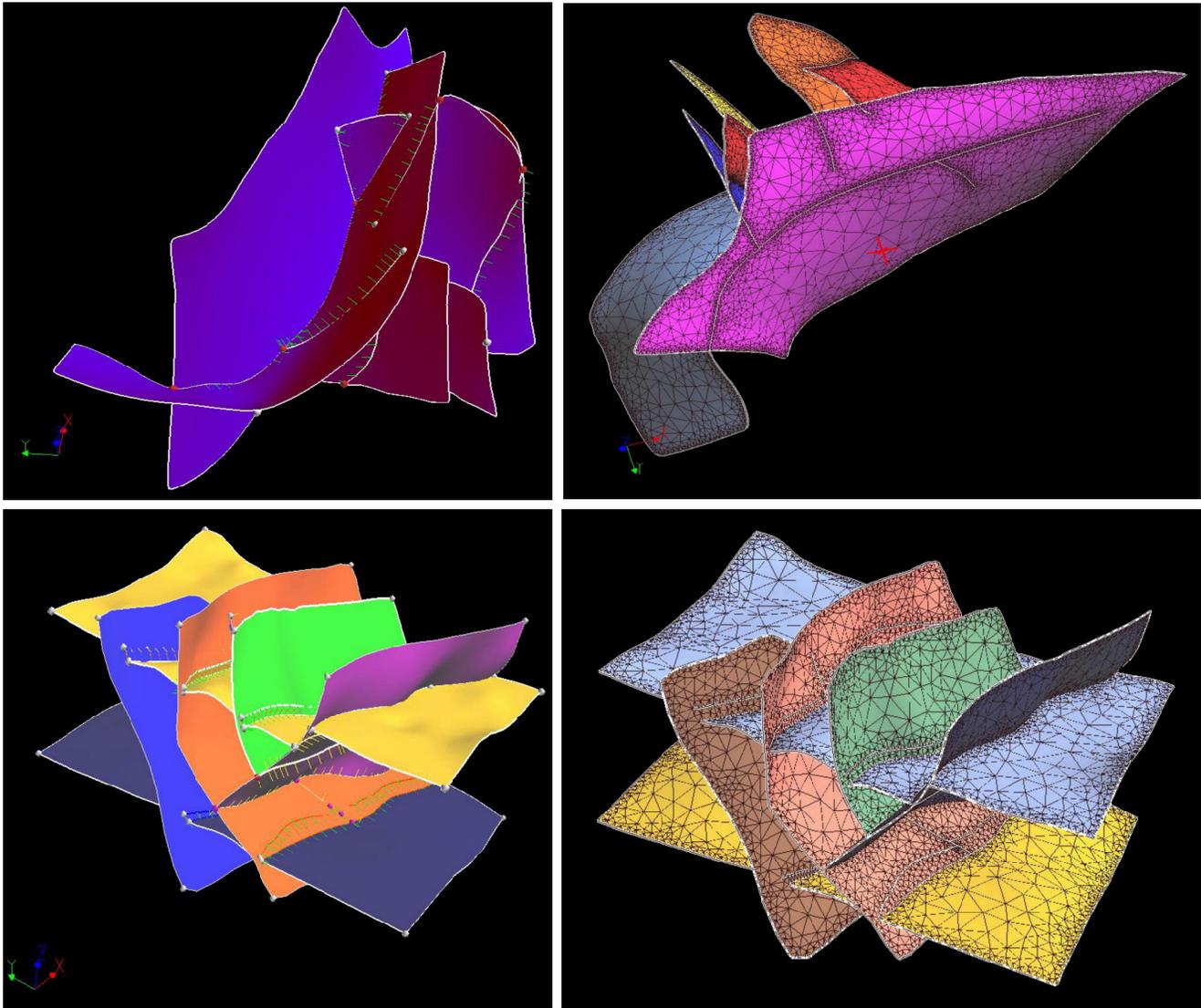


Figure 5.15 Ces deux autres exemples montrent des résultats obtenus sur des cas plus complexes, avec de nombreux contacts et des angles faibles entre les segments de contrainte. Noter là encore la qualité satisfaisante des triangles, et les contacts parfaits entre les surfaces dans l'espace tridimensionnel.

Résultats de raffinements selon un critère de taille

La figure 5.16 suivante montre des résultats de raffinements guidés par un critère de taille, selon la méthode expliquée précédemment (voir partie 5.2). La taille des triangles y est gouvernée par une propriété de distance à une ligne polygonale plane fermée, et l'on peut voir que l'algorithme donne de très bons résultats. Sur la figure 5.17 sont donnés des exemples de maillages obtenus après un raffinement en taille en tout point similaire à notre approche, mais en évaluant cette fois la résolution *souhaitée* des triangles en un unique point qui est le centre de leur cercle circonscrit. La figure 5.18 suivante montre un autre maillage obtenu par raffinement en taille, mais cette fois avec des contraintes de résolution *analytiques*, c'est-à-dire ne dépendant pas d'une valeur de propriété.

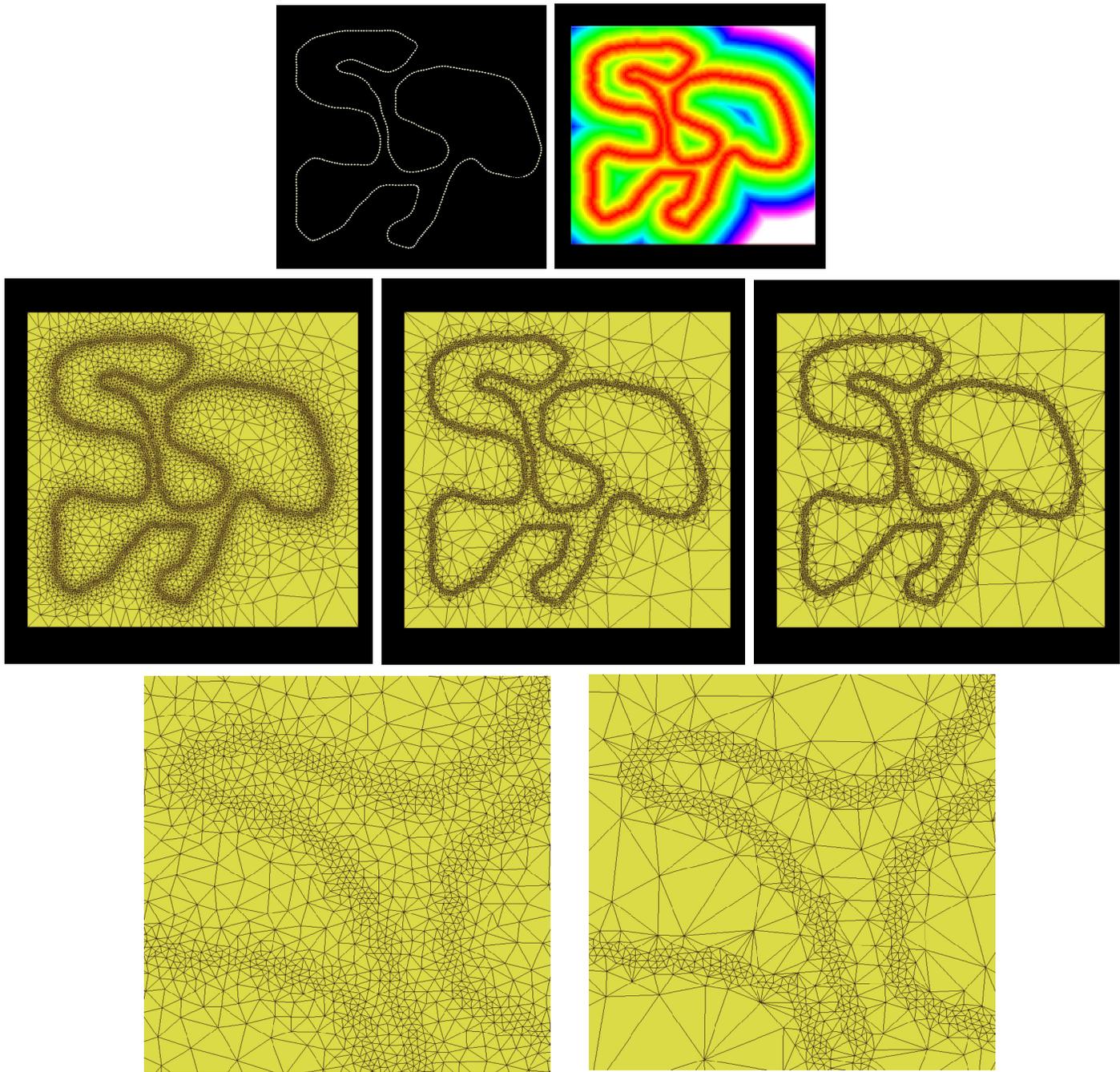


Figure 5.16 La propriété de distance utilisée pour guider la résolution du maillage est montrée en haut. Au milieu figurent des exemples de raffinements obtenus avec, de gauche à droite, une *finesse* de 0, -2 et -5 . Comme on peut le voir, cet unique paramètre permet de faire varier très simplement la *rapidité* avec laquelle les variations de résolution s'opèrent. Deux détails des maillages obtenus avec les finesses de 0 (à gauche) et -5 (à droite) sont montrés en bas. La qualité de forme des triangles est moins bonne avec une finesse élevée en valeur absolue, ce qui est tout à fait normal.

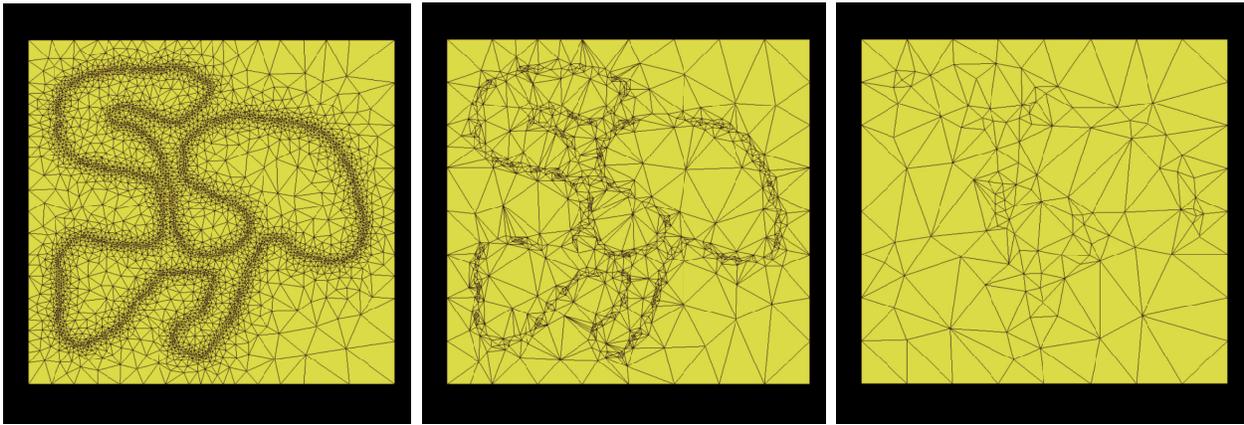


Figure 5.17 Exemples de mauvais raffinements obtenus par une approche différente, avec, de gauche à droite, une *finesse* de 0, -2 et -5 , guidés par la même propriété que celle de la figure 5.16. Il est notable qu'une fois que le raffinement a convergé, la carte de résolution n'est pas satisfaite (ici, le cas de la finesse nulle est une exception).

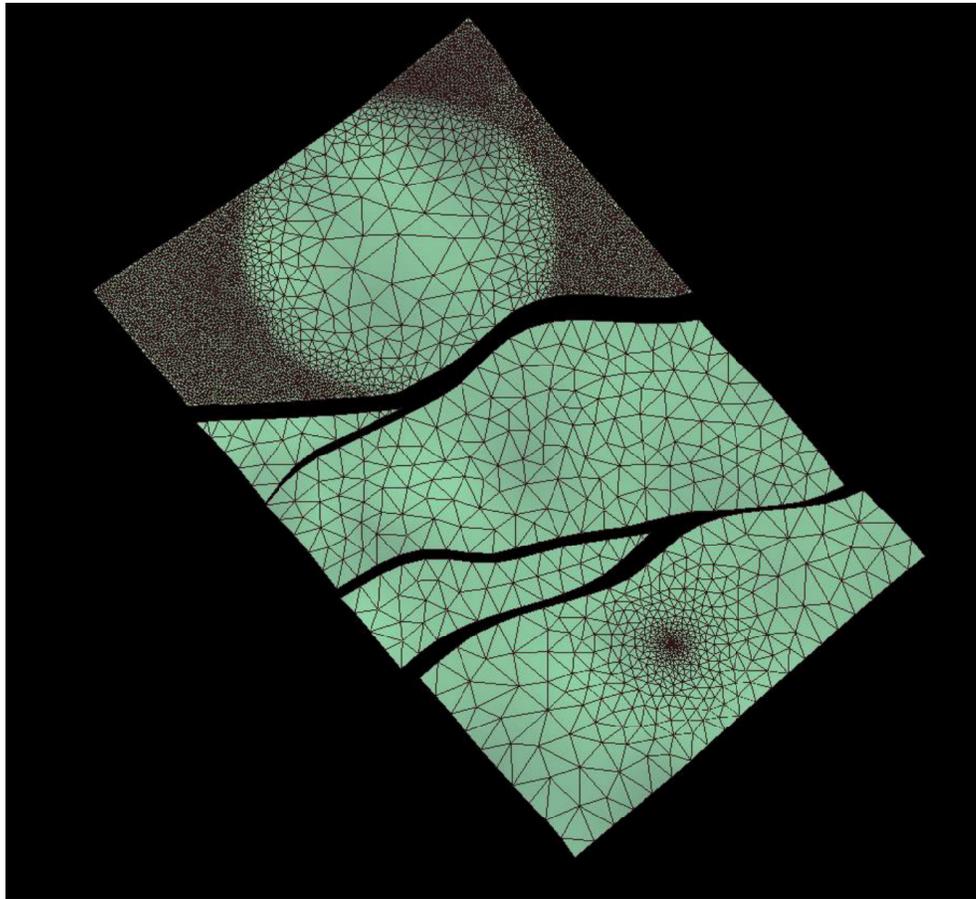


Figure 5.18 Sur cette surface, le raffinement est guidé par une contrainte *analytique*, radiale (parties du haut et du bas) ou bien constante (autres parties de la surface).

5.3.3 Construction de modèles volumiques définis par frontières

De quoi a-t-on besoin pour construire un modèle B-Rep ?

Limites des méthodes classiques de construction

Comme nous avons déjà eu l'occasion de le dire, la construction classique de modèles volumiques définis par frontières nécessite le calcul des intersections entre surfaces ([Euler 99], [Caumon 03-(1)]). Cette opération, qui a pour but de créer des points de contact topologiquement distincts mais géométriquement identiques, est dommageable à de nombreux points de vue. Tout d'abord, de délicats problèmes de précision numérique limitent sa robustesse. Ensuite, les calculs d'intersection sont lents, et enfin, les maillages générés, s'ils sont valides, peuvent être localement de qualité très faible, voire dégénérés, et ainsi violer d'éventuels prérequis sur la forme et la taille des triangles, ou alors rendre l'identification des régions impossible. Notamment, la construction d'une tétraédrisation basée sur ces surfaces peut être rendue problématique [Conraud 97].

Utilisation d'un Soft Frame Model

Une fois ses surfaces radiales maillées, un *Soft Frame Model* est l'objet idéal pour construire des modèles volumiques définis par frontières. En effet, les triangles sont tous satisfaisants en terme de forme et de taille, et les points de contact sont tous géométriquement identiques, comme nous venons de l'assurer par construction (voir figures 5.14 et 5.15). Topologiquement, les contacts sont de plus distincts, sauf au niveau des arêtes de contrainte situées à l'intérieur des triangulations. Nous l'avons vu, celles-ci correspondent aux lignes radiales pour lesquelles la surface radiale est un parent flou. Ceci est l'unique frein à la construction d'un modèle B-Rep, mais il peut être levé très simplement.

Présentation du procédé de construction

Les surfaces que nous allons utiliser pour la construction du modèle volumique défini par frontières sont des copies de celles matérialisant la géométrie des surfaces radiales du *Soft Frame Model*. Ces surfaces auront autant de triangles, mais pas le même nombre de sommets ni le même nombre de bords. L'algorithme de construction est le suivant :

1. À chaque triangle t de la surface initiale, un tableau tab_t de 3 sommets est tout d'abord associé. Ces tableaux sont initialement vides.
2. Considérons un sommet p de la triangulation initiale, et l'ensemble $T(p)$ de triangles ayant p comme sommet. Nous allons appeler *région centrée sur p* un sous-ensemble de $T(p)$ fait de triangles adjacents dont les arêtes communes ne sont pas des arêtes de contrainte. Pour chacune de ces régions (calculées sans difficulté), un nouveau sommet p' est créé, de même géométrie que p , et pour chacun des triangles t d'une région, le tableau tab_t est mis à jour en y ajoutant le sommet p' . Cette opération est effectuée sur tous les sommets de la triangulation sans exception.
3. Une nouvelle triangulation est construite à partir des tableaux tab_t associés aux triangles de la surface initiale. Cette nouvelle surface est géométriquement identique à la première, quoiqu'éventuellement différente topologiquement.

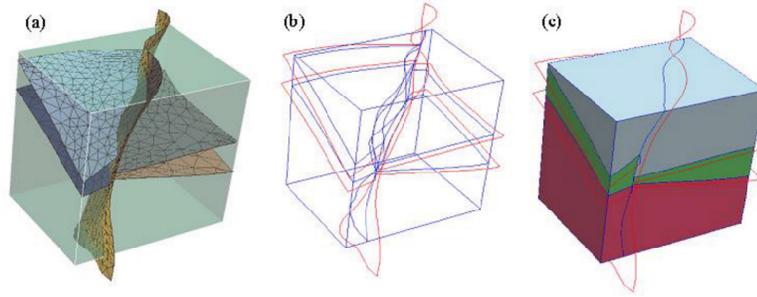


Figure 5.19 Cette figure montre sur un cas très simple les surfaces remaillées du *Soft Frame Model* (a), et le modèle volumique défini par frontières qui en est déduit (b), qui comprend trois régions (c).

4. Le modèle volumique défini par frontière peut alors être construit sans avoir à réaliser d'intersections entre les surfaces. La détermination des régions se fait selon la manière habituelle, et est a priori garantie de succès car les triangles ont tous une forme satisfaisante (en tout cas, aucun d'entre eux n'est dégénéré).

Ce procédé original, présenté dans [Allo 03] et [Caumon 03-(2)], est à la fois très rapide et très robuste, car il n'est basé que sur des considérations topologiques. Il fournit ainsi en pratique de bons résultats.

Résultats

Les figures suivantes donnent quelques exemples de modèles volumiques définis par frontières construits avec notre approche, à partir de *Soft Frame Models* dont les surfaces radiales ont été remaillées de manière valide. La figure 5.19 concerne un modèle synthétique, et les figures suivantes un modèle réel du sous-sol (figures 5.20, 5.21 et 5.22).

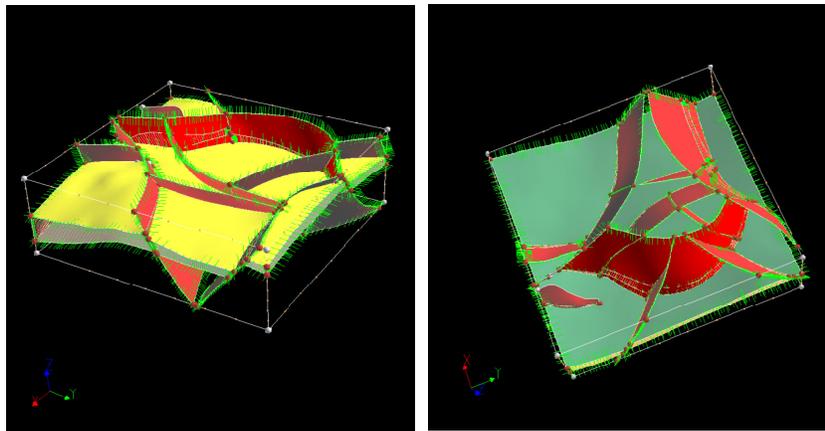


Figure 5.20 Cette figure montre un exemple de modèle structural réel (modèle TOTAL), sur lequel nous avons testé nos algorithmes. Les contacts sont nombreux et de nature variée. Le modèle est vu d'en haut à gauche, et d'en bas à droite.

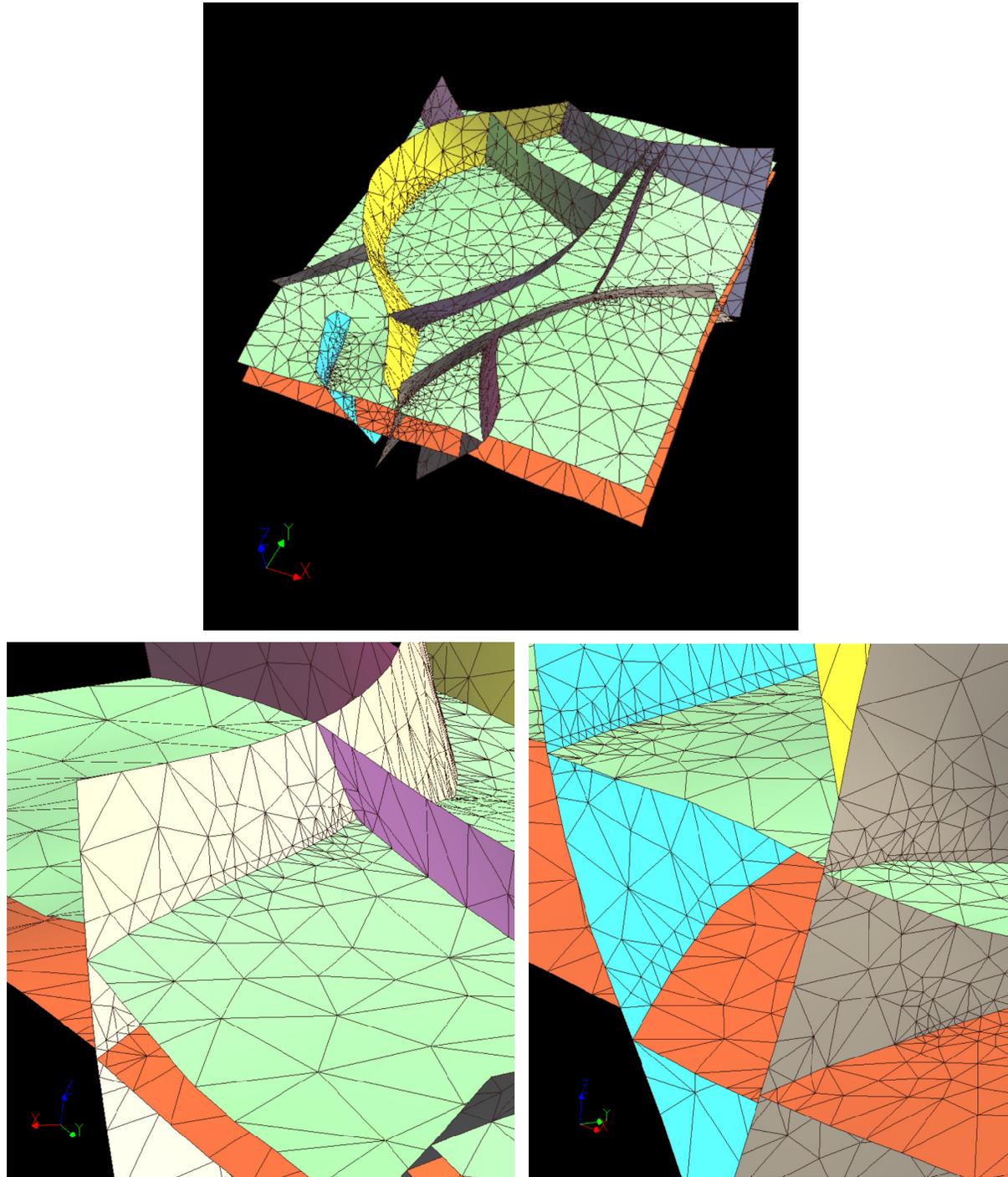


Figure 5.21 Cette figure illustre le bon fonctionnement de nos algorithmes de remaillage sur un cas réel (modèle TOTAL, voir figure 5.20). Deux détails des triangulations obtenues sont montrés en bas. Noter le traitement des épis, la qualité des triangles et les contacts parfaits entre les surfaces.

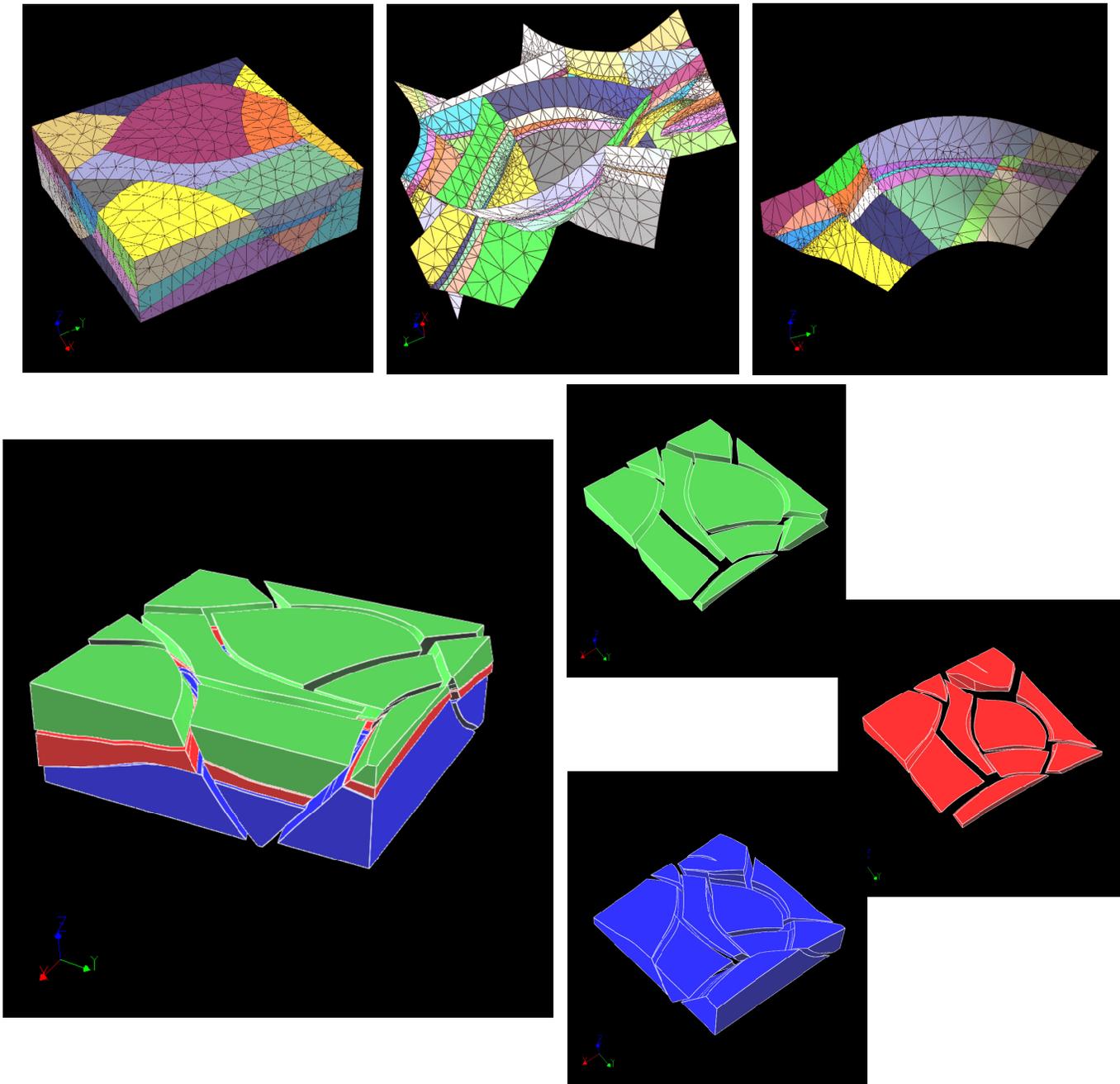


Figure 5.22 Construction d'un modèle volumique défini par frontières (modèle TOTAL) à partir des surfaces remaillées du *Soft Frame Model* de la figure 5.20. Grâce aux informations de contraintes, des ensembles connexes de triangles sont définis sur chaque surface, qui peut être divisée en parties cohérentes (en haut). La construction du modèle B-Rep (30 régions) correspondant est ensuite instantanée (en bas).

Bilan et perspectives

Cette deuxième partie a été consacrée à la mise au point d’algorithmes de *remaillage contraint* de surfaces tridimensionnelles. Nous y avons introduit en particulier la notion de maillage de Delaunay et Contraint-Delaunay, et présenté plusieurs méthodes permettant d’en générer.

Dans le cas bidimensionnel des triangulations, ces méthodes ne sont cependant valables que *dans un plan*, et ne sont donc pas directement applicables dans notre contexte. Nous avons par conséquent proposé un pré-traitement original qui permet de réaliser une *partition valide* des surfaces initiales, afin que celles-ci puissent être mises aisément en correspondance avec des *domaines paramétriques* bidimensionnels, dans lesquels les remaillages sont effectués. La génération des triangulations contraintes proprement dite suit une approche conforme, par *raffinement de Delaunay*, technique qui à notre avis produit les triangulations les plus satisfaisantes en terme de forme des mailles, ce que nous avons pu vérifier en pratique. Toutefois, nous avons dû y apporter des modifications, notamment en ce qui concerne la *prise en compte des angles faibles entre contraintes*, du fait de la non-conservation stricte des angles et des longueurs dans les domaines paramétriques. À cela, nous avons ajouté la mise au point d’algorithmes permettant un *contrôle précis de la taille des triangles*. Enfin, nous avons vu comment nous assignons une géométrie tridimensionnelle valide à ces triangulations, ce qui nous permet d’honorer les contacts définis dans le *Soft Frame Model* sous-jacent. En guise d’application, nous avons de plus proposé un algorithme robuste (car uniquement basé sur des considérations d’ordre topologique) de *construction de modèles volumiques définis par frontières*.

La partie suivante s’attache à montrer comment ces surfaces remaillées peuvent servir de support à la construction de maillages volumiques simpliciaux et non-simpliciaux, et ainsi garantir la validité *applicative* de notre travail.

Partie III

Génération de maillages tridimensionnels simpliciaux et non-simpliciaux

Génération de maillages tétraédrisés

Contraint-Delaunay

Ce chapitre est consacré à la construction de maillages Contraint-Delaunay à base de tétraèdres, maillages que nous souhaitons intégrés au sein d'un *Soft Frame Model*, dans la mesure où ils représentent la géométrie de ses régions. Ils sont donc contraints par un ensemble de 0-, 1- et 2-simplexes donnés, et doivent aussi satisfaire à des exigences sur la forme et la taille des mailles pour garantir le succès des application auxquelles ils sont destinés. Les maillages de simplexes Contraint-Delaunay ont été définis précédemment dans la partie 4.1. La première partie présente la vision que, dans le contexte qui est le nôtre, nous avons du problème de respect des contraintes dans le maillage, puis décrit une méthode adéquate atteignant cet objectif. Par la suite, des techniques permettant d'améliorer la forme et la taille des tétraèdres sont abordées, avant de présenter finalement différents résultats obtenus et quelques applications sur des cas réels.

6.1 Choix d'une approche pour le respect des contraintes

Cette partie expose en premier lieu les prérequis que nous imposons sur les simplexes de contrainte pour un maillage à base de tétraèdres, puis passe en revue les méthodes couramment employées pour les honorer, en montrant en particulier en quoi elles ne satisfont pas nos exigences. Ensuite, elle présente la méthode que nous avons choisie dans notre travail, méthode dite *parasseuse*, introduite dans [Conraud 95] et [Conraud 97].

6.1.1 Prérequis sur la méthode

Modifications des simplexes de contrainte

Les 2-simplexes de contrainte matérialisent la géométrie tridimensionnelle des surfaces radiales d'un *Soft Frame Model*, et, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent (chapitre 5), ont été générés dans des espaces paramétriques de manière à satisfaire des critères précis de forme et de taille. Ceci a certes nécessité des insertions de points de Steiner au niveau des lignes radiales, mais en nombre raisonnable, ou qui n'est en tous cas pas problématique. En effet, nous considérons que ces points de Steiner :

- participent d'une part à la création de triangles qui ont une forme optimale car ils ne supportent en général pas d'angles inférieurs à 20 degrés (même dans l'espace tridimensionnel), sauf dans les zones où les contraintes elles-mêmes forment des angles faibles. Or, quelle que soit la méthode utilisée, les maillages à base de tétraèdres sont toujours faits de plus beaux simplexes s'ils sont contraints par de beaux triangles [George 99]. Ces points de Steiner sont donc dans une certaine mesure les garants d'une certaine qualité de forme des tétraèdres à proximité des contraintes.
- sont de toute façon parfois indispensables à la satisfaction des exigences en taille sur les triangles.

Par ailleurs, les temps d'exécution des simulations effectuées sur des maillages sont très sensibles au nombre de nœuds, et à plus forte raison en trois dimensions, où les volumes de calcul sont beaucoup plus importants, mais d'un autre côté, une densité variable de nœuds permet d'obtenir une solution plus précise. Par conséquent, nous devons par la suite garder à l'esprit que :

1. La phase de respect des simplexes de contrainte doit dans la mesure du possible éviter les insertions de points internes ou de Steiner, une forme localement *satisfaisante* des tétraèdres étant a priori assurée par la forme optimale des triangles de contrainte.
2. Nous devons préférer des tétraèdres de forme *suffisamment bonne* à des tétraèdres de forme optimale, mais dont l'obtention a nécessité l'insertion de nombreux points internes ou de Steiner.
3. Les insertions de points internes ou de Steiner sont tout à fait autorisées si elles sont dictées par des exigences portant sur la résolution du maillage.

Mises à jour des maillages

Nous choisissons donc de limiter au maximum les insertions de points au niveau des simplexes de contrainte (sauf dans le cadre d'optimisations de la taille des tétraèdres), quitte à relâcher sensiblement les exigences portant sur leur forme. Lorsque ces insertions sont réalisées à l'intérieur d'un 2-simplexe de contrainte, un point de même géométrie doit être ajouté à la fois dans la tétraédrisation et dans l'espace paramétrique où ce simplexe de contrainte à une image. Lorsqu'elles sont réalisées à l'intérieur d'un 1-simplexe de

contrainte, un point de même géométrie doit être ajouté à la fois dans la tétraédrisation, dans le maillage de la ligne radiale correspondante, et dans tous les espaces paramétriques où ce simplexe de contrainte à une image. À l'inverse, il est souhaitable que pour une tétraédrisation contrainte donnée, une modification de la forme ou de la taille des triangles de contrainte, réalisée dans un espace paramétrique, se répercute dans la tétraédrisation, qu'autant de nouveaux points y soient insérés, et que les nouvelles contraintes y soient honorées.

La gestion de ces mises à jour de maillages pose en particulier la question de savoir quelle géométrie tridimensionnelle associer aux points initialement créés dans un espace paramétrique, et quelle(s) image(s) paramétrique(s) associer aux points initialement créés dans l'espace tridimensionnel.

6.1.2 Limites des méthodes classiques

Avantages et inconvénients d'une approche conforme

Brève présentation des approches conformes tridimensionnelles

Plusieurs approches conformes ont été proposées pour satisfaire un ensemble de contraintes donné dans une tétraédrisation (ce problème a été initialement abordé dans [Shewchuk 97], [Shewchuk 98-(2)], et [Pébay 98]). Au final, chaque p -simplexe de contrainte initial est représenté dans la tétraédrisation par un ensemble de p -simplexes ($0 \leq p \leq 2$) qui sont tous de Delaunay. Comme dans le cas des triangulations, des problèmes de convergence peuvent cependant survenir lorsque deux ou plusieurs p -simplexes de contrainte incidents forment des angles faibles ($1 \leq p \leq 2$) ([Pébay 98], [Shewchuk 00-(1)], [Shewchuk 02]), mais ils peuvent être réglés en utilisant les techniques présentées dans [Murphy 01] ou [Cohen-Steiner 02]. Par ailleurs, ces approches conformes peuvent hypothétiquement être couplées avec un raffinement de Delaunay¹ ([Ollivier-Gooch 01], [Miller 02]) pour donner en même temps une forme satisfaisante garantie pour tous les tétraèdres, comme c'est également le cas pour les triangulations (voir chapitre 5). Elles sont donc a priori très attirantes.

Inconvénients d'une approche conforme

Nous voyons pourtant deux principaux inconvénients à une approche conforme. Tout d'abord, des arêtes très courtes sont en général produites dans la tétraédrisation, du fait de l'insertion en grand nombre de points de Steiner ([Murphy 01], [Shewchuk 02]). Comme indiqué dans [Cohen-Steiner 02], pour la seule mise en conformité avec les contraintes, le rapport entre le nombre final de sommets de la tétraédrisation et le nombre initial varie entre 3 et 10. Autrement dit, 65 à 90% des sommets de la tétraédrisation finale sont des points de Steiner, ce qui n'est pas acceptable dans notre contexte. Ensuite, les solutions adoptées visant à assurer une convergence dans le cas d'angles faibles entre

¹À notre connaissance, il n'existe pas encore de méthode tridimensionnelle de type raffinement de Delaunay prenant en compte des angles faibles entre contraintes et produisant un maillage de qualité garantie où il n'existe plus aucun accrochage.

simplexes de contrainte demandent la mise en place d'algorithmes et de structures de données annexes qui alourdissent et ralentissent le processus de satisfaction des contraintes [Cohen-Steiner 02].

Méthode par cassage des contraintes

Une méthode par cassage des contraintes a été employée dans [Cavalcanti 99] pour assurer la présence des triangles de contrainte dans la tétraédrisation, en combinaison toutefois avec une approche conforme appliquée sur les arêtes de contrainte. Rappelons que cette technique consiste à insérer des points de Steiner au niveau des intersections entre les triangles de contrainte et les arêtes ou les faces des tétraèdres du maillage ([Hazlewood 93], [George 97]). Par conséquent, la tétraédrisation finale n'est qu'*approximativement* de Delaunay, et chaque p -simplexe de contrainte y est présent sous la forme d'une union de p -simplexes ($1 \leq p \leq 2$).

Cette méthode ne satisfait pas non plus nos exigences, car les insertions de points de Steiner dégradent la qualité des arêtes et des triangles de contrainte, et donc celle des tétraèdres à leur contact. En effet, les intersections entre la tétraédrisation et les simplexes de contrainte sont susceptibles d'être localisées à peu près n'importe où, et des arêtes très courtes peuvent alors être générées dans la tétraédrisation. De plus, la mise en œuvre de cette technique peut demander un grand nombre de calculs de la géométrie des intersections, avec tous les problèmes de précision numérique que cela implique, ce qui peut nuire à son efficacité. Cependant, elle possède l'avantage non-négligeable de fonctionner en toutes circonstances, même lorsque les contraintes forment entre elles des angles faibles [Shewchuk 02].

Discussion sur le forçage des contraintes

Exposé de la méthode

Cette méthode cherche à faire apparaître chaque p -simplexe de contrainte dans la tétraédrisation ($1 \leq p \leq 2$) par une séquence de transformations locales des connexions entre ses sommets. Les données de contrainte ne sont donc pas modifiées au cours du processus et le maillage final est dit Contraint-Delaunay. Le forçage des contraintes sans insertion de points de Steiner internes est garanti de fonctionner dans le cadre des triangulations contraintes, mais ce n'est pas le cas pour les espaces de dimensions supérieures ([George 91], [Borouchaki 95], [George 97], [Baker 98]). Ceci n'implique toutefois pas qu'il soit impossible de le réaliser. D'autres techniques, moins répandues, autorisent l'insertion de points sur les 1-simplexes de contraintes et génèrent une tétraédrisation Contraint-Delaunay à partir de ces nouvelles données [Shewchuk 98-(1)]. Le maillage obtenu est alors qualifié de Contraint-Delaunay Conforme.

Pour les cas tridimensionnels, si l'on se borne aux maillages Contraint-Delaunay au sens strict, les séries de transformations topologiques à effectuer sont plus ou moins bien formalisées, et font souvent appel à des heuristiques. Des modes opératoires relativement détaillés sont donnés par exemple dans [Joe 92], [Joe 95], [George 99] et [Liu 00]. Ils font

appel à un ensemble fini d'opérateurs élémentaires visant à supprimer une arête ou une face de la tétraédrisation intersectée par un simplexe de contrainte manquant. En général, deux d'entre eux interviennent plus fréquemment que les autres : l'un supprime une face (autrement dit deux tétraèdres) et la remplace par une nouvelle arête incidente à trois nouveaux tétraèdres, lorsque c'est possible ; l'autre est l'opération inverse, c'est-à-dire qu'une arête incidente à trois tétraèdres est remplacée par une nouvelle face, ce qui est toujours possible. Tous ces opérateurs atteignent leur but dans la très grande majorité des cas, même difficiles [Liu 00]. Cependant, d'autres opérateurs, consistant à ajouter un point de Steiner à l'intérieur de la tétraédrisation, doivent parfois entrer en jeu pour faire apparaître des simplexes de contrainte ([George 91], [Conraud 97], [Baker 98]).

Quelques commentaires sur la méthode

Le point fort du forçage des contraintes est de préserver *strictement* les arêtes et les triangles à honorer dans la tétraédrisation, contrairement aux approches conformes et par cassage des contraintes, décrites précédemment. Cependant, dans certaines configurations, cette méthode est en butte à des problèmes de précision numérique, du fait de l'importance qu'y prennent les requêtes d'ordre géométrique, comme par exemple savoir si oui ou non une arête ou une face de la tétraédrisation intersecte un simplexe de contrainte. De plus, du fait du nombre parfois important de remaillages locaux effectués, un maillage Contraint-Delaunay peut contenir, à proximité des contraintes, des tétraèdres de forme quasi-dégénérée, même avec des triangles de contrainte de forme optimale. En revanche, le fait que la tétraédrisation finale ne soit plus strictement de Delaunay n'est pas un problème, au moins pour l'instant.

6.1.3 Satisfaction des contraintes par une approche paresseuse

Principe de l'approche paresseuse

Nous considérons qu'une approche de type forçage des contraintes est le meilleur compromis, car le nombre nécessaire d'insertions de points de Steiner est minimum, pour une qualité de forme des tétraèdres souvent acceptable si jamais celle des triangles de contrainte est bonne, ce qui est notre cas. Cependant, la mise en œuvre de cette méthode est délicate, car basée en partie sur des requêtes géométriques, qui limitent sa robustesse.

Sur la base de ces considérations, une approche conceptuellement différente, dite *paresseuse*, peut être adoptée. Introduite dans [Conraud 95], elle reformule le problème initial du respect des contraintes dans la tétraédrisation. En effet, les méthodes classiques visent à produire un maillage où chaque p -simplexe de contrainte est représenté par un (dans le cas du forçage) ou plusieurs (approche conforme et par cassage) p -simplexes de la tétraédrisation ($1 \leq p \leq 2$). Comme le montre la figure 6.1, dans une approche paresseuse, l'objectif est plus simplement d'assurer qu'un *ensemble connexe* de m triangles de contrainte soit représenté par un autre *ensemble* de m faces de la tétraédrisation ($1 \leq m \leq m_{max}$), sous réserve que les différences de géométrie entre ces deux ensembles soient *acceptables* [Conraud 97]. Ces associations paresseuses peuvent être uniquement établies au travers de requêtes d'ordre topologique, et donc de manière très robuste. Les

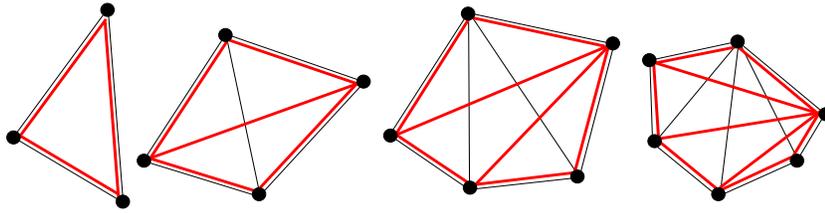


Figure 6.1 Principe de du respect des contraintes par une approche paresseuse. Sur cette figure, des ensembles connexes de 1, 2, 3 et 4 triangles de contrainte (en noir) sont représentés dans la tétraédrisation par un autre ensemble de 1, 2, 3 et 4 faces (en rouge).

triangles de contrainte qui ne peuvent pas en faire partie sont respectés par forçage. En pratique, la valeur $m_{max} = 3$ est utilisée. Notons que le choix $m_{max} = 1$ équivaut à une approche classique fonctionnant seulement par forçage.

La tétraédrisation finale, dite *Contraint-Delaunay Paresseuse* (*Lazy Constrained Delaunay* ou *Lazy Boundary-Constrained Delaunay* en anglais) n'est donc qu'à *peu près* contrainte (d'où le nom de la méthode). Comme on peut facilement s'en rendre compte, la notion de maillage *Contraint-Delaunay Paresseux* n'a de sens que pour les dimensions supérieures ou égales à 3. De tels maillages sont localement *Contraint-Delaunay* lorsqu'aucune association paresseuse n'a pu être trouvée, et *Delaunay* sinon. Cette méthode est basée sur le fait que dans une tétraédrisation de *Delaunay* des sommets d'un ensemble connexe de triangles coplanaires qui ne sont pas nécessairement de *Delaunay*, il existe un ensemble de faces de tétraèdres qui forment collectivement une triangulation de *Delaunay* de l'ensemble des sommets des triangles.

Une approche paresseuse est tout à fait appropriée dans le contexte de la tétraédrisation des régions d'un *Soft Frame Model* : nous proposons de respecter dans un premier temps les 1-simplexes de contrainte correspondant à la géométrie des lignes radiales via une technique de forçage, puis d'honorer à *peu près* les 2-simplexes des surfaces radiales grâce à une approche paresseuse. Comme chacune d'entre elles est relativement plane (dans le cas contraire, elle aurait été divisée en patches, comme nous l'avons vu dans le chapitre 4), un grand nombre d'associations paresseuses peuvent a priori être établies. Ainsi, les remaillages locaux sont limités, et la qualité des tétraèdres reste en tout point satisfaisante.

Algorithme de respect de contraintes

Les détails de la technique de respect des contraintes par une approche paresseuse sont donnés dans [Conraud 97]. Nous en rappelons ici les grandes lignes, dans le contexte d'utilisation d'un *Soft Frame Model*. Nous nous plaçons dans la situation initiale où une tétraédrisation de *Delaunay* de l'ensemble des 0-simplexes représentant la géométrie des nœuds, lignes et surfaces radiales a été construite, puis où les 1-simplexes de contrainte des lignes radiales ont été honorés par une approche de type forçage : la tétraédrisation doit donc maintenant être contrainte par un ensemble de 2-simplexes. Soit \mathcal{M}_{r_2} un 2-complexe simplicial matérialisant la géométrie tridimensionnelle d'une surface radiale de

contrainte pour une des régions d'un *Soft Frame Model*. Nous allons noter $A(T, F)$ une association paresseuse entre un ensemble T de triangles de \mathcal{M}_{r_2} et un ensemble F de faces de la tétraédrisation. Rappelons que ces deux ensembles contiennent le même nombre m d'éléments, avec $1 \leq m \leq m_{max}$ et $m_{max} = 3$. Ces associations sont construites selon les règles suivantes :

1. Soit t un triangle de \mathcal{M}_{r_2} n'appartenant à aucune association paresseuse. Si t est en correspondance avec une face f de la tétraédrisation (ce qui veut dire que t est de Delaunay), alors une association paresseuse $A(T = \{t\}, F = \{f\})$ peut être ajoutée. Sinon, l'algorithme passe à l'étape numéro 2.
2. Soit T_t un ensemble de triangles de \mathcal{M}_{r_2} connexes à t , tel que son bord soit entièrement présent sous forme d'arêtes dans la tétraédrisation, et tel qu'aucun de ces triangles ne soit en correspondance avec une face de la tétraédrisation. Soit F_t l'ensemble des faces de la tétraédrisation dont au moins deux arêtes correspondent à des arêtes de T_t , auquel sont retirées :
 - Les faces situées à l'extérieur de l'ensemble T_t , autrement dit au niveau de ses concavités.
 - Les paires de faces appartenant à des tétraèdres quasi-dégénérés ayant leurs quatre faces dans F_t .

Si T_t et F_t contiennent le même nombre m d'éléments et que $m \leq m_{max}$, alors une association paresseuse $A(T_t, F_t)$ peut être ajoutée, et l'algorithme repart à l'étape numéro 1. Sinon, il passe à l'étape numéro 3.

3. Si aucune association paresseuse concernant t n'a pu être trouvée, alors un procédé classique de forçage est utilisé, avec possibilité d'insertion d'un point de Steiner à l'intérieur de la tétraédrisation. Ceci fait apparaître une face f en correspondance avec t , et une association $A(T = \{t\}, F = \{f\})$ peut être ajoutée. L'algorithme repart alors à l'étape numéro 1.

Les étapes 1 et 2 sont très rapides et très robustes, car uniquement basées sur des requêtes topologiques. Cet algorithme est garanti de succès de la même manière que les techniques de forçage le sont, car celles-ci sont employées dans le cas extrême où aucune association paresseuse satisfaisante ne peut être trouvée, comme décrit dans l'étape numéro 3. Des résultats de contraintes de tétraédrisations effectuées par cette approche seront présentés sur des cas réels dans la dernière partie de ce chapitre.

6.2 Optimisation de la forme et de la taille des tétraèdres

Dans la partie précédente (partie 6.1), nous avons montré comment, à partir d'un ensemble de 0-, 1-, et 2-simplexes de contrainte, nous procédons pour générer la tétraédrisation

contrainte la plus grossière possible, en insérant un minimum de points de Steiner, contrainte que nous nous sommes délibérément imposée sur la base de critères applicatifs. Le maillage obtenu peut être considéré comme Contraint-Delaunay, mais ne satisfait pas les éventuelles exigences portant sur la forme et la taille des tétraèdres. Cette partie présente les solutions que nous avons adoptées pour y parvenir.

6.2.1 Optimisation de la forme des tétraèdres

Problématique

Une technique de raffinement de Delaunay, telle que nous l'avons présentée dans la partie précédente, est tout à fait envisageable en trois dimensions, même avec des maillages Contraint-Delaunay et des angles faibles entre contraintes [Shewchuk 00-(1)]. Cependant, ces règles ne sont pas applicables dans notre contexte, car dans tous les cas elles reposent sur le fait que toutes les arêtes des triangles de contrainte sont elles-mêmes des arêtes de contrainte. Or, comme 1-simplexes de contrainte, nous n'avons pris en compte que ceux matérialisant la géométrie de lignes radiales du *Soft Frame Model*. De plus, les arêtes de contrainte doivent toutes être strictement de Delaunay, ce qui est loin d'être assuré par une approche paresseuse ou de type forçage. Nous l'avons déjà dit, assurer ces prérequis produirait un maillage que nous jugeons trop dense et incompatible avec les applications auxquelles il est destiné. Une technique classique de raffinement de Delaunay n'est donc pas envisageable pour optimiser la forme des tétraèdres.

Dans la mesure où nous souhaitons éviter l'ajout de points à l'intérieur des simplexes de contrainte, une technique plus simple, mais moins rigoureuse, peut être adoptée [Conraud 97]. Soit c un critère de forme arbitraire. Un algorithme d'optimisation guidé par c se résumerait ainsi :

1. Construire une liste L contenant tous les tétraèdres du maillage ordonnés selon la valeur du critère c , et passer à l'étape numéro 2.
2. Retirer le premier élément t de la liste, c'est-à-dire le tétraèdre de pire forme dans l'état actuel du maillage. Un nouveau point p est inséré dans la tétraédrisation si p satisfait les conditions suivantes (p peut être indifféremment le centre de la sphère circonscrite à t , son barycentre, etc) :
 - L'ajout de p au maillage élimine en particulier t .
 - L'ajout de p au maillage conserve son caractère Contraint-Delaunay ou Contraint-Delaunay Paresseux.
 - L'ajout de p au maillage ne crée pas de tétraèdres de forme pire que celle du tétraèdre de pire forme éliminé en même temps que t , relativement au critère c .
3. Si aucun point n'a pu être ajouté au maillage, alors t est laissé tel quel. Il sera peut être éliminé à la faveur d'une future insertion. L'algorithme recommence alors à l'étape numéro 2, sauf si t était le dernier élément de la liste L , auquel cas cette

liste et vide et l'algorithme repasse à l'étape numéro 1, sauf si aucune insertion n'a pu être réalisée lors du parcours de la liste, ce qui marque la fin de l'algorithme d'optimisation.

Cette technique est garantie de converger quel que soit le critère c choisi, du moment qu'il est valide. Par exemple, si R_t est le rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre t , r_t le rayon de la sphère inscrite à t , et l_t la longueur de sa plus petite arête, le choix $c = R_t/l_t$ ou $c = R_t/r_t$ convient tout à fait. Cependant, une telle optimisation n'assure pas une valeur minimum (ou maximum) de c dans la tétraédrisation finale, et la qualité des simplexes y est donc inconnue. C'est pourquoi nous considérons que cette solution n'est pas totalement satisfaisante.

Proposition d'un procédé d'optimisation

Ébauche d'un algorithme d'optimisation

Nous proposons une approche hybride entre les deux techniques d'optimisation présentées ci-dessus, autrement dit, d'utiliser le principe de raffinement de Delaunay mais de l'adapter à notre contexte, et de conserver une tétraédrisation Contraint-Delaunay sans insérer de points de Steiner et de nouveaux points qui soient *trop près* des simplexes de contrainte, pour assurer une forme satisfaisante aux tétraèdres situés à proximité. Nous allons par la suite supposer que le maillage est initialement Contraint-Delaunay, mais toutes les méthodes proposées fonctionnent bien entendu également avec un maillage Contraint-Delaunay Paresseux.

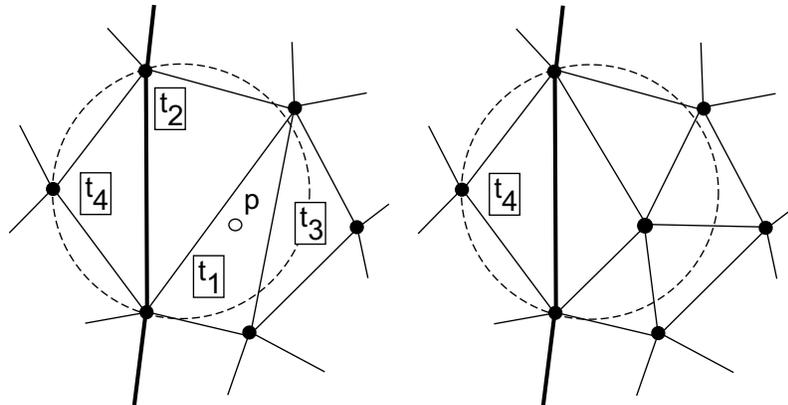


Figure 6.2 Le point p , centre du cercle circonscrit à t_1 , est inséré dans la triangulation. À gauche : le triangle t_4 ne sera pas éliminé par cette insertion car il est Contraint-Delaunay vis-à-vis de ce point : il contient p dans son cercle circonscrit, mais sans que p soit *visible* depuis son intérieur, du fait de la présence d'arêtes contraintes (lignes plus épaisses). À droite : les triangles t_1 , t_2 et t_3 ont été éliminés, et p ajouté au maillage.

Afin de garder à tout moment une tétraédrisation Contraint-Delaunay, lors de l'ajout d'un point p au maillage, seuls les simplexes qui ne sont plus Contraint-Delaunay vis-à-vis de p sont éliminés (voir figure 6.2, pour un analogue bidimensionnel). Ce sont ceux qui

certes contiennent p dans leur sphère circonscrite, mais aussi pour lesquels p est *visible* depuis leur intérieur, c'est-à-dire ceux pour lesquels les lignes joignant n'importe quel point de leur intérieur et le point p n'intersectent aucun triangle de contrainte ([Shewchuk 97], [Baker 98]). De cette façon, les insertions de nouveaux points dans la tétraédrisation ne détruisent aucune face ni aucune arête qui corresponde à un 2- ou 1-simplexe de contrainte, même paresseusement, et le maillage reste naturellement Constraint-Delaunay sans qu'il soit nécessaire à chaque fois de relancer un processus complet de respect des contraintes. Autrement dit, aucun point de Steiner n'a besoin d'être ajouté.

Considérons maintenant le critère de forme c_t d'un tétraèdre t défini par $c_t = R_t/l_t$, avec R_t le rayon de la sphère circonscrite à t et l_t la longueur de sa plus petite arête. Comme nous l'avons déjà dit pour les triangulations (voir partie précédente), ce critère est particulièrement bien adapté à un raffinement de Delaunay, car même dans le cas où le maillage est maintenu Constraint-Delaunay, toutes les nouvelles arêtes formées après l'insertion d'un nouveau point correspondant au centre de la sphère circonscrite à t ont nécessairement une longueur supérieure à R_t , pour peu que t soit éliminé par cette insertion (pour cela, t doit ne pas être Constraint-Delaunay vis-à-vis de ce point). Dans ce cas, si $c_t \geq B \geq 1$ (t sera alors dit *B-mauvais*), alors $R_t \geq B.l_t$, et il n'est pas possible de créer de nouvelles arêtes qui soient plus courtes que celles existant déjà dans la tétraédrisation. Ainsi, un algorithme visant à ajouter, lorsque c'est possible, tous les centres de sphères circonscrites aux *B-mauvais* tétraèdres du maillage, et à maintenir la tétraédrisation Constraint-Delaunay, est garanti de terminer si $B \geq 1$.

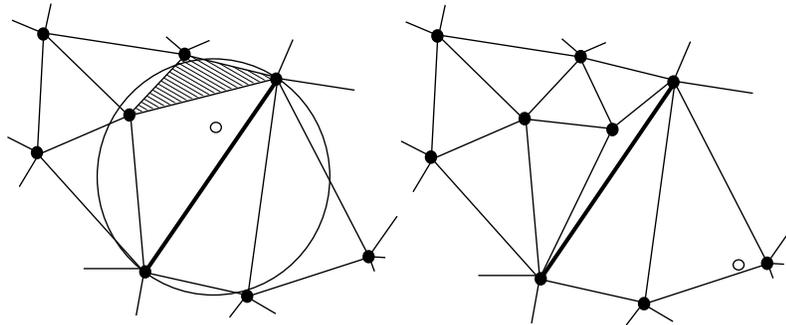


Figure 6.3 À gauche : le triangle hachuré est *B-mauvais* et le centre de son cercle circonscrit (point blanc) est ajouté à la triangulation. À droite : l'insertion a été faite de manière à préserver le caractère Constraint-Delaunay de la triangulation (la ligne plus épaisse matérialise une arête de contrainte). Elle génère un triangle de forme encore moins satisfaisante que le *B-mauvais* triangle initial. De plus, ce nouveau triangle ne pourra pas être éliminé par raffinement car il est Constraint-Delaunay vis-à-vis du centre de son cercle circonscrit (point blanc).

Toutefois, un tel procédé est loin d'assurer un critère de beauté minimum aux tétraèdres, car les nouveaux points peuvent être situés très près des simplexes de contrainte, et un tétraèdre généré par une insertion peut alors avoir une forme infiniment peu satisfaisante, comme le montre la figure 6.3, dans le cas analogue de triangulations. De plus, un tel tétraèdre survit au raffinement : en effet, le centre de sa sphère circonscrite

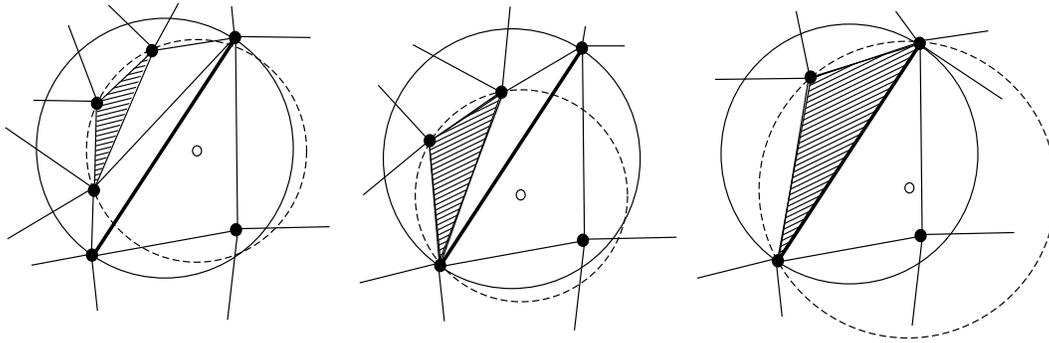


Figure 6.4 Le triangle hachuré est Contraint-Delaunay vis-à-vis du centre (point blanc) de son cercle circonscrit (en pointillés), du fait qu'une arête de contrainte (ligne plus épaisse) *bouche la visibilité* entre ce point et l'intérieur du triangle. Dans ce cas, le cercle circonscrit *diamétral* à cette arête (trait plein) contient nécessairement les 3 sommets du triangle.

n'a pu être ajouté au maillage du fait qu'il est Contraint-Delaunay vis-à-vis de ce point. Or, il est possible de montrer que cette configuration implique que la sphère circonscrite *équatoriale* à la face contrainte de la tétraédrisation qui *bouche la visibilité* contienne les 4 sommets du tétraèdre (voir figure 6.4, dans le cas de triangles). La totalité des B -mauvais tétraèdres Contraint-Delaunay vis-à-vis du centre de leur sphère circonscrite sont donc nécessairement *confinés dans un volume fini du domaine d'étude*, égal à l'union des sphères circonscrites équatoriales aux triangles de contrainte.

Ainsi, si les centres des sphères circonscrites qui accrochent les simplexes de contrainte sont simplement rejetés, alors :

1. Dans la tétraédrisation finale, tous les tétraèdres dont le centre de la sphère circonscrite n'accroche aucun simplexe de contrainte, et qui ne sont pas Contraint-Delaunay vis-à-vis de ce point, auront un critère de forme de valeur inférieure à B .
2. Dans la tétraédrisation finale, tous les tétraèdres dont le centre de la sphère circonscrite accroche un ou plusieurs simplexes de contrainte, ou qui sont Contraint-Delaunay vis-à-vis de ce point, auront un critère de forme de valeur indéterminée (qui peut très bien être aussi inférieure à B).
3. Dans la tétraédrisation finale, aucun point n'a été rajouté dans les sphères circonscrites équatoriales aux simplexes de contrainte, ce qui évite de générer des B -mauvais tétraèdres qui ne pourront pas être éliminés du maillage.

Nous pouvons donc garantir un critère de forme $c < B$, avec $B \geq 1$, dans une portion plus ou moins grande de la tétraédrisation, et ce grâce à un algorithme qui converge nécessairement quelle que soit la valeur de B , et qui maintient le caractère Contraint-Delaunay du maillage, sans modifier la donnée des arêtes et des faces associées aux simplexes de contrainte (c'est-à-dire sans insérer de points de Steiner). En pratique, la valeur $B = 1$ est donc choisie. Contrairement au cas de la dimension 2, cette limite n'a pas de signification

angulaire. Toutefois, tout tétraèdre t tel que $c_t < 1$ reste dans la grande majorité des cas² très proche d'un tétraèdre régulier.

Description de l'algorithme

Nous résumons ici les principales étapes de l'algorithme que nous avons mis en place pour optimiser la forme des tétraèdres d'un maillage Contraint-Delaunay (ou Contraint-Delaunay Paresseux) et garantir une valeur du critère de forme $c = R/l$ inférieure à 1 sur au moins une partie de la tétraédrisation, avec R et l respectivement le rayon de la sphère circonscrite et la longueur de la plus petite arête d'un tétraèdre. En pratique, cette zone est relativement étendue. La dernière partie de ce chapitre fournira quelques exemples illustrant son bon fonctionnement.

1. Les tétraèdres du maillage sont ordonnés par critère de beauté décroissant (les tétraèdres de forme régulière sont les derniers) dans une liste L . Le critère de beauté utilisé est le critère c défini plus haut.
2. Tant que L n'est pas vide, retirons le premier élément t de la liste, c'est-à-dire le tétraèdre le plus *mauvais* dans l'état actuel du maillage. Soit c la valeur de son critère de beauté.
 - Si $c < 1$, alors le centre de la sphère circonscrite à t n'est pas un candidat valide pour une insertion. L'algorithme recommence alors à l'étape numéro 2.
 - Si $c \geq 1$ et que le centre de la sphère circonscrite à t accroche au moins un simplexe de contrainte, alors ce point n'est pas un candidat valide pour une insertion. L'algorithme recommence alors à l'étape numéro 2.
 - Si $c \geq 1$, que le centre de la sphère circonscrite à t n'accroche aucun simplexe de contrainte, et que t est Contraint-Delaunay vis-à-vis de ce point, alors ce-dernier n'est pas un candidat valide pour une insertion. L'algorithme recommence alors à l'étape numéro 2.
3. Le centre p de la sphère circonscrite à t est ajouté au maillage. Les tétraèdres éliminés (dont t fait nécessairement partie) sont retirés de la liste L , et les nouveaux tétraèdres y sont ajoutés. L'algorithme recommence alors à l'étape numéro 2.

Post-traitements du maillage et élimination des cerfs-volants

La méthode d'optimisation de la forme des tétraèdres que nous proposons garantit d'insérer un minimum de points à l'intérieur de la tétraédrisation, et ne nécessite l'ajout d'aucun point de Steiner pour maintenir le maillage Contraint-Delaunay ou Contraint-Delaunay Paresseux. Cependant, elle n'assure pas partout une qualité minimale sur la forme des tétraèdres (même si cela peut être effectivement le cas). Pour cela, différents post-traitements peuvent prendre place afin d'éventuellement améliorer la qualité du maillage,

²Nous verrons par la suite que ce n'est pas vrai pour une certaine catégorie de tétraèdres appelés cerfs-volants.

mais cette fois-ci sans insérer de nouveaux points (rappelons que nous voulons une tétraédrisation de bonne qualité qui soit la plus grossière possible). Il est à noter que ces post-traitements détruisent le caractère Contraint-Delaunay ou de Delaunay du maillage. Ils ne doivent donc jamais *précéder* l'exécution de tout algorithme basé sur ces deux propriétés.

Discussion sur l'efficacité du lissage de la géométrie des mailles

Les techniques de lissage consistent à repositionner itérativement les nœuds du maillage de manière à améliorer localement la forme de mailles incidentes, jusqu'à ce que les déplacements des nœuds ne dépassent plus une certaine tolérance [Owen 98]. Ces techniques préservent donc la topologie du maillage. Elles sont très nombreuses (voir entre autres [Bank 97], [Amenta 99], [Djidjev 00], [Freitag 02]), mais se rangent en général au sein de deux familles distinctes.

La première est connue sous le nom de *lissage laplacien* et fonctionne en déplaçant chaque nœud \mathbf{x} du maillage au barycentre \mathbf{x}' de ses m voisins $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{m-1}\}$ (équation 6.1) :

$$\mathbf{x}' = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{i=m-1} \mathbf{x}_i \quad (6.1)$$

Cette méthode est très facile à mettre en place, mais reste peu efficace sur les mailages tridimensionnels, car il est reconnu qu'elle peut dégrader localement la forme des tétraèdres ([Freitag 96], [Shewchuk 97]). En effet, le repositionnement des nœuds n'est guidé par aucun critère de forme ([Amenta 99], [Djidjev 00]), et il existe une catégorie de tétraèdres dégénérés, appelés *cerfs-volants*, qui ont leurs quatre sommets régulièrement espacés (autrement dit, ces tétraèdres n'ont pas d'arêtes qui soient réellement plus courtes que les autres). Sous sa forme de base, un lissage laplacien peut donc tout à fait générer des tétraèdres infiniment plats. La technique de lissage peut toutefois être améliorée (on parle alors de *lissage laplacien contraint*), soit en interdisant tout repositionnement de nœud qui soit dommageable à qualité du maillage, soit en remplaçant le barycentre des nœuds par un point dont la position est déduite des propriétés géométriques des éléments incidents, comme nous l'avons présenté dans [Lepage 01-(2)], et où la nouvelle position \mathbf{x}' du nœud \mathbf{x} est calculée de la manière suivante (équation 6.2) :

$$\mathbf{x}' = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{i=p-1} \left(\mathbf{c}_i + \frac{2 \cdot l_i}{\sqrt{6}} \cdot \mathbf{n}_i \right) \quad (6.2)$$

où p est le nombre de tétraèdres ayant le nœud \mathbf{x} comme sommet, \mathbf{c} le barycentre d'une face opposée au nœud \mathbf{x} dans un des ces tétraèdres, \mathbf{n} le vecteur normal unitaire à cette face, et l la longueur moyenne de ses arêtes (voir figure 6.5). Sous cette forme, sur un maillage tétraédrisé, un lissage laplacien donne des résultats honnêtes, sans plus :

- Lorsque le maillage initial a été auparavant optimisé selon un critère de forme par une méthode de type raffinement de Delaunay, les points sont déjà naturellement espacés les uns par rapport aux autres. Par conséquent, les déplacements de nœuds

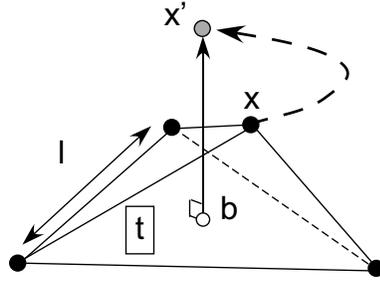


Figure 6.5 Pour un tétraèdre t contenant le nœud \mathbf{x} , la position idéale \mathbf{x}' de ce sommet peut être vue comme un point de l'espace situé sur une ligne perpendiculaire à la face de t opposée à \mathbf{x} (de longueur moyenne l et de barycentre b) passant par b . La distance au point b est fonction de l .

sont très faibles [Baker 98]. De plus, les tétraèdres de moins bonne qualité, qui sont généralement situés près des simplexes de contrainte, sont peu modifiés car la procédure de lissage doit interdire de bouger les nœuds de la tétraédrisation qui correspondent aux sommets de simplexes de contrainte.

- Même lorsqu'il est guidé par un critère de forme (équation 6.2), un lissage laplacien peine à améliorer la qualité des cerfs-volants.

La deuxième famille de techniques de lissage consiste à repositionner chaque nœud \mathbf{x} du maillage non pas à un *point moyen* déduit des éléments incidents, mais plutôt à un point qui maximise une fonction $f(\mathbf{x})$ décrivant la qualité des éléments incidents. La fonction $f(\mathbf{x})$ choisie peut être par exemple l'angle minimum entre les arêtes incidentes au nœud \mathbf{x} ([Freitag 96], [Freitag 02]), mais d'autres choix sont possibles ([Bank 97], [Amenta 99], [Paoletti 02]). Quoiqu'il en soit, itérativement, le nœud \mathbf{x} bouge de manière à augmenter le gradient de $f(\mathbf{x})$, jusqu'à ce qu'un optimum soit atteint. Cette méthode est beaucoup plus complexe à mettre en place, mais produit des résultats qui sont largement meilleurs que ceux issus d'un lissage laplacien. Notamment, la plupart des cerfs-volants sont en général éliminés du maillage. Cependant, la convergence est atteinte dans des intervalles de temps beaucoup plus grands ([Owen 98], [Djidjev 00]), et le problème de l'optimisation de la forme des tétraèdres à proximité des simplexes de contrainte reste ouvert.

Le problème de l'élimination des cerfs-volants dans une tétraédrisation constitue un domaine de recherche très actif. Même si les techniques de lissage (c'est-à-dire basées sur des modifications géométriques) qui s'y rapportent sont trop peu générales pour être applicables dans notre contexte, car nous voulons optimiser la forme de *tous* les types de tétraèdres dégénérés avec un seul procédé, nous en donnons ici une très brève description : une première méthode, présentée dans [Li 00-(1)] et [Edelsbrunner 00], calcule une petite perturbation sur la géométrie des nœuds du maillage de sorte que la tétraédrisation de Delaunay de ce nouvel ensemble de points ne contienne aucun cerf-volant. D'autres techniques, basées sur le même principe, garantissent le même résultat en appliquant systématiquement une perturbation à tout point ajouté dans la tétraédrisation, de manière à ce que son insertion ne génère pas de cerfs-volants ([Li 00-(3)], [Li 01]). Cependant, les simplexes de contrainte sur la tétraédrisation ne doivent alors pas former entre eux

d'angles faibles. Enfin, l'utilisation de maillages de Delaunay *pondérés* semble être la méthode la plus efficace pour éliminer les cerfs-volants d'une tétraédrisation ([Cheng 00], [Edelsbrunner 01], [Cheng 02]), et mérite d'être soulignée ici, même si elle dépasse le cadre de notre travail.

Transformations topologiques locales et améliorations de la forme

Au contraire d'un lissage, les transformations topologiques préservent la géométrie du maillage mais changent localement les connexions entre les nœuds, et ce-faisant éliminent des arêtes et des faces du maillage pour les remplacer par d'autres. Dans notre contexte, celles qui correspondent à des simplexes de contrainte, paresseusement ou non, doivent rester inchangées. Par conséquent, toute transformation topologique les concernant devra par la suite être proscrite.

Les techniques d'optimisation de la qualité d'une tétraédrisation par des transformations topologiques donnent en pratique de très bons résultats (voir par exemple [Joe 91], [Joe 95], [Freitag 96], [Freitag 97], [George 97], [Baker 98]). Elles fonctionnent toutes sur le même modèle, en faisant intervenir deux types d'opérateurs topologiques :

- Un opérateur que nous noterons OP_1 (voir figure 6.6), visant à éliminer une face de la tétraédrisation (et donc les 2 tétraèdres incidents), pour la remplacer par une arête partagée par 3 nouveaux tétraèdres. L'application de cet opérateur n'est possible que si la nouvelle arête *intersecte* la face qui est éliminée.
- Une série d'opérateurs que nous noterons OP_2^p (voir figure 6.6), visant à éliminer une arête de la tétraédrisation (et donc les p tétraèdres incidents) pour la remplacer par $(p - 2)$ faces partagées par $(2p - 4)$ nouveaux tétraèdres ($p \geq 3$). L'application de ces opérateurs n'est pas toujours possible si $p \geq 4$.

Pour un critère donné permettant d'évaluer la forme des mailles, ces opérateurs ne sont appliqués que s'ils ne créent pas de tétraèdres de forme pire que celle du tétraèdre éliminé de pire forme [George 97]. Sur cette base, deux schémas d'optimisation peuvent être suivis ([Freitag 96], [Shewchuk 97], [Owen 98]) :

1. Un schéma dit de *basculement de face*, qui considère des séquences d'appels aux opérateurs OP_1 et OP_2^3 .
2. Un schéma dit de *basculement d'arête*, qui considère des séquences d'appels aux opérateurs OP_2^p ($p \geq 3$).

Dans notre travail, nous avons successivement testé ces deux schémas, avec pour objectif l'élimination des cerfs-volants dans la tétraédrisation. Une approche par basculement de face, très simple à réaliser, et dont les résultats ont été présentés dans [Lepage 01-(2)], est efficace sans être décisive, dans la mesure où elle retire en moyenne 80 à 90% des cerfs-volants dans le maillage (des résultats meilleurs sont avancés dans [Golias 97]). Au final, les cerfs-volants qui survivent sont soit ceux qui ont des arêtes ou des faces qui correspondent (éventuellement paresseusement) aux simplexes de contrainte, soit ceux

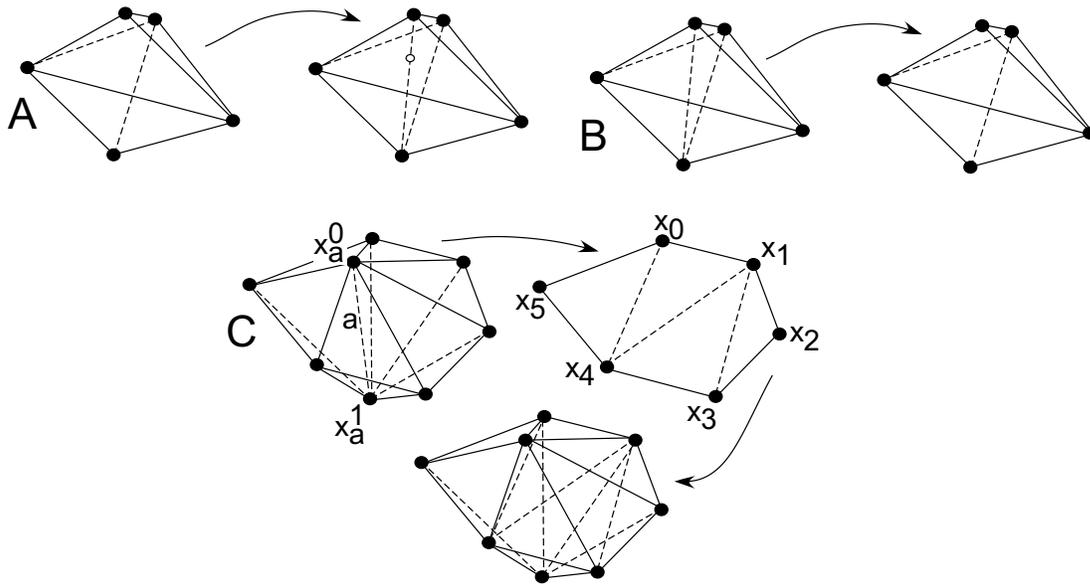


Figure 6.6 Quelques opérateurs topologiques. (A) Opérateur OP_1 . Son application n'est possible que si la nouvelle arête formée *intersecte* la face éliminée (point blanc). (B) Opérateur OP_2^3 . Son application est toujours possible. (C) Opérateur OP_2^6 . Cet opérateur est entièrement déterminé par le choix d'une *triangulation* des sommets *équatoriaux*, différents des extrémités de l'arête éliminée (étape intermédiaire).

sont dont la topologie (pour l'opérateur OP_2^3) ou la géométrie (pour l'opérateur OP_1) est incompatible. Ce dernier point marque à notre avis la supériorité d'une approche par basculement d'arête, dont les opérateurs ont l'avantage de fonctionner avec des configurations topologiques plus variées. Elle est donc susceptible d'éliminer plus de tétraèdres quasi-dégénérés, et donc de cerfs-volants, ce qui suffit à justifier son utilisation ([Freitag 97], [Baker 98]).

Toutefois, la réalisation d'un algorithme d'optimisation par basculement d'arête est délicate. Considérons une arête a de la tétraédrisation, qui n'est pas située sur son bord, et dont les extrémités sont les nœuds \mathbf{x}_a^0 et \mathbf{x}_a^1 . Supposons qu'elle soit partagée par p tétraèdres. Nous allons noter $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{p-1}\}$ la séquence ordonnée des p nœuds dits *équatoriaux* du maillage, correspondant aux sommets des tétraèdres partageant a qui sont différents de \mathbf{x}_a^0 et \mathbf{x}_a^1 . Basculer a revient à trouver une triangulation tridimensionnelle valide de l'ensemble de ces nœuds, formée de $(p-2)$ triangles (voir figure 6.6). Les $(2p-4)$ nouveaux tétraèdres seront ensuite formés en reliant les nœuds \mathbf{x}_a^0 et \mathbf{x}_a^1 avec chacun de ces triangles. La difficulté est de trouver la triangulation qui produise les plus beaux tétraèdres, relativement à un critère de forme donné. En effet, cela implique de tester *toutes les triangulations possibles* de l'ensemble des p nœuds équatoriaux associés à l'arête a .

Trouver de combien de manières N_p un polygone convexe à p sommets ($p \geq 3$) peut être divisé en $(p-2)$ triangles est un problème classique des mathématiques³. La solution est donnée par *le nombre Catalan*, noté C_{p-2} , égal à (équation 6.3) :

³Il a été résolu par Euler en 1751.

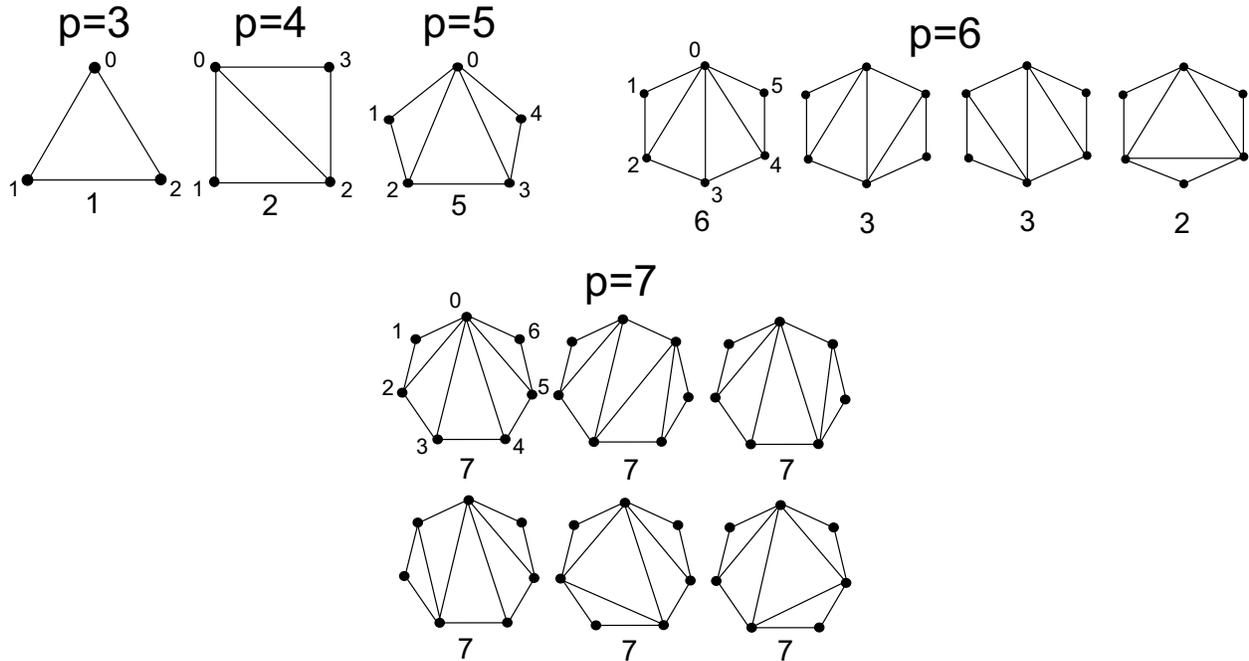


Figure 6.7 Visualisation des triangulations *canoniques* de p sommets (d'après [Freitag 97]). En-dessous de chaque triangulation figure le nombre de triangulations distinctes pouvant être obtenues par rotation. Le stockage de ces 13 triangulations canoniques permet de représenter implicitement $N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7 = 64$ triangulations différentes (voir équation 6.3).

$$N_p = C_{p-2} = \frac{(2p-4)!}{(p-1)!(p-2)!} \quad (6.3)$$

Le calcul donne $N_3 = C_1 = 1$, $N_4 = C_2 = 2$, $N_5 = C_3 = 5$, $N_6 = C_4 = 14$, et $N_7 = C_5 = 42$. Le nombre de triangulations possibles augmente ensuite rapidement avec p . Par exemple, pour $p = 12$, on a $N_{12} = C_{10} = 16796\dots$. Pour mettre en place une technique de basculement d'arête, il est donc nécessaire de trouver un moyen de représenter efficacement la topologie de toutes les triangulations possibles pour un p donné. En effet, il n'est pas concevable de stocker explicitement des milliers de connexions éventuelles pour trouver la meilleure qui soit.

Une solution élégante est donnée dans [Freitag 97]. Elle repose sur le fait que parmi l'ensemble des triangulations possibles, certaines peuvent être déduites par une rotation d'une configuration dite *canonique* (voir figure 6.7). Ainsi, il n'est besoin que de stocker les configurations canoniques et le nombre de rotations qui existent pour chacune d'entre elles, pour pouvoir parcourir toutes les triangulations possibles. Ces paramètres sont donnés dans [Freitag 97].

Par exemple $p = 7$, nous proposons les structures informatiques suivantes pour les représenter (structures 6.4 et 6.5) :

```

        struct PossibleConfigs7 {
            int dim_;
            int nb_canonical_configs_7_;
            int nb_trgls_per_canonical_config_7_;
            int nb_rotations_per_canonical_config_7_[6];
            int canonical_configs_7_[6][5][3];
        };

```

(6.4)

```

static PossibleConfigs7 possible_configs_7 = {
    7,6,5,{7,7,7,7,7,7},{
    {{0,1,2},{0,2,3},{0,3,4},{0,4,5},{0,5,6}},
    {{0,1,2},{0,2,3},{0,3,6},{3,4,6},{4,5,6}},
    {{0,1,2},{0,2,3},{0,3,4},{0,4,6},{4,5,6}},
    {{1,2,3},{0,1,3},{0,3,4},{0,4,5},{0,5,6}},
    {{0,1,2},{0,2,4},{2,3,4},{0,4,5},{0,5,6}},
    {{0,1,2},{0,2,3},{0,3,5},{3,4,5},{0,5,6}}}
};

```

(6.5)

La variable statique `possible_configs_7` de la structure 6.5 s'interprète comme suit : elle correspond à $p = 7$, est constituée de 6 configurations canoniques, chacune ayant 5 triangles et admettant 7 rotations distinctes, comme le montre la figure 6.7. Les 6 configurations canoniques sont ensuite décrites, en veillant à ce que tous les triangles soient orientés de la même manière. Avec cette variable, pour obtenir les indices t_0 , t_1 , et t_2 des sommets du triangle d'indice k correspondant à la rotation d'indice j de la configuration canonique d'indice i , il nous suffit alors d'utiliser la formule suivante (équations 6.6) :

$$\begin{aligned}
 t_0 &= \text{add}(7, \text{possible_configs_7.canonical_configs_7_}[i][k][0], j) \\
 t_1 &= \text{add}(7, \text{possible_configs_7.canonical_configs_7_}[i][k][1], j) \\
 t_2 &= \text{add}(7, \text{possible_configs_7.canonical_configs_7_}[i][k][2], j)
 \end{aligned}$$

(6.6)

où `add(int dim, int i, int j)` est une fonction très simple définie par (fonction 6.7) :

$$\text{return}((i+j \leq \text{dim}-1) ? i+j : i+j-\text{dim}).$$

(6.7)

Grâce à ces structures, si nous avons à disposition une liste initiale de 7 nœuds de la tétraédrisation, nous pouvons parcourir facilement toutes les triangulations possibles de ces points (sous forme de séries de triplets d'indices correctement ordonnés). Dans notre algorithme, nous nous sommes volontairement bornés à la valeur $p = 7$, que nous jugeons suffisante. Une réalisation complète d'une technique de basculement d'arête doit donc

tenir compte des cas plus simples $p = 3$, $p = 4$, $p = 5$, et $p = 6$, que nous ne détaillerons pas ici.

Ces résultats ne sont toutefois valides que dans un plan, et dans la réalité, les nœuds équatoriaux ont une géométrie tridimensionnelle quelconque. Ceci peut aboutir à des triangulations dites *invalides*, pour lesquelles les tétraèdres formés auront un volume négatif ([Freitag 97], [Baker 98]). Par conséquent, lorsque toutes les triangulations possibles sont parcourues afin de déterminer celle qui génère les plus beaux tétraèdres relativement à un critère de forme donné, celles qui sont invalides ne doivent pas être prises en compte. Au final, l'algorithme d'optimisation que nous avons mis en place peut se résumer ainsi :

1. Choisir un critère de forme c pour les tétraèdres.
2. Les tétraèdres sont ensuite ordonnés selon le critère c par beauté décroissante (les tétraèdres de forme régulière sont les derniers) dans une liste L .
3. Tant que L n'est pas vide, retirons le premier élément t de la liste, c'est-à-dire le tétraèdre le plus *mauvais* dans l'état actuel du maillage. Chacune des six arêtes de t est examinée l'une après l'autre pour savoir si elle peut être basculée, autrement dit si :
 - (a) Elle n'est pas sur le bord de la tétraédrisation.
 - (b) Son basculement n'élimine pas une arête ou des faces de la tétraédrisation qui correspondent à des simplexes de contrainte, paresseusement ou non.
 - (c) Le nombre p de nœuds équatoriaux associés à l'arête est inférieur ou égal à 7, et il existe au moins une triangulation de ces p points qui génère des tétraèdres valides (de volume positif).
4. À chaque fois qu'une des six arêtes de t est déclarée comme un candidat valide pour un basculement, la valeur du critère c correspondant au tétraèdre de pire forme généré par le basculement est calculée. Le basculement n'est définitivement considéré que si cette valeur correspond à une forme meilleure que celle du tétraèdre de pire forme éliminé par le basculement.
5. Parmi toutes les arêtes retenues, celle dont le basculement génère le plus beau tétraèdre de pire forme est choisie. Si aucun basculement n'est possible, l'algorithme repart à l'étape numéro 3, sinon le basculement est effectué, les tétraèdres éliminés (dont t) sont retirés de la liste L , et ceux nouvellement créés y sont ajoutés. L'algorithme repart ensuite à l'étape numéro 3.
6. La liste L est vide. L'algorithme recommence alors à l'étape numéro 2, sauf si toute la liste L vient d'être parcourue sans qu'aucun basculement n'ait pu être effectué, ce qui marque la fin de l'algorithme.

Nous avons pu vérifier en pratique que cet algorithme est très rapide et très efficace, notamment pour éliminer les cerfs-volants, pour peu que le critère de forme c choisi classe

ces tétraèdres comme dégénérés, ce qui n'est pas le cas par exemple du critère $c_1 = R/l$ (avec R le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre et l la longueur de sa plus petite arête). Nous proposons donc d'utiliser plutôt le critère $c_2 = R/r$, avec r le rayon de la sphère inscrite au tétraèdre. Dans notre contexte, où seuls les tétraèdres situés à proximité des simplexes de contrainte pouvaient éventuellement avoir une forme peu satisfaisante, cet algorithme améliore également sensiblement la qualité du maillage. Des exemples concrets de son utilisation seront donnés dans la dernière partie de ce chapitre.

6.2.2 Optimisation de la taille des tétraèdres

Faisabilité d'une extension des méthodes bidimensionnelles

Définition d'une carte de résolution

Les spécifications en taille qu'une tétraédrisation doit respecter peuvent tout à fait être définies de la même manière que pour une triangulation (voir partie précédente), en considérant cette fois-ci comme *maillage d'arrière-plan* une grille structurée régulière tridimensionnelle, de résolution suffisamment fine, incluant entièrement la tétraédrisation. Des *contraintes de résolution* peuvent y être définies (par exemple dépendant des valeurs d'une propriété définie dans un autre maillage tridimensionnel), et combinées de différentes manières pour calculer la carte finale de résolution. Là encore, nous nous bornons à des valeurs *scalaires*, équivalentes à des longueurs, mais des métriques pourraient être utilisées ([Bossen 96], [Borouchaki 97-(1)], [Borouchaki 97-(2)], [Lo 01]) pour générer des tétraèdres anisotropes.

Mise en conformité avec la carte de résolution

Pour la mise en conformité avec la carte de résolution, l'insertion de points de Steiner à l'intérieur des simplexes de contrainte est cette fois-ci permise (et nécessaire). En partant d'une tétraédrisation grossière, nous allons donc, de manière classique, insérer des nouveaux points jusqu'à obtenir satisfaction sur la taille de tétraèdres. Dans ce cas, comme pour les triangulations, la résolution finale du maillage ne sera qu'*inférieure ou égale à celle initialement souhaitée*. Une autre méthode, proposée en particulier dans [Liu 94], [Plaza 96] [Jones 97], et [Rivara 97], parvient à ce résultat au travers de bisections d'arêtes, mais nous considérons qu'elle peut faire croître rapidement (après plusieurs itérations) le nombre de tétraèdres de forme peu satisfaisante dans les zones raffinées, forme que nous souhaiterions maintenir satisfaisante dans la mesure du possible. Nous avons par conséquent opté pour une approche de type raffinement de Delaunay.

Choix d'un critère de taille

Pour déterminer si la taille d'un tétraèdre t est conforme à une carte de résolution donnée \mathcal{C} , nous pouvons également utiliser le critère c_t suivant (équation 6.8) :

$$c_t = \frac{R_t}{\min_i \{r(u_i, v_i, w_i)\}} \quad (6.8)$$

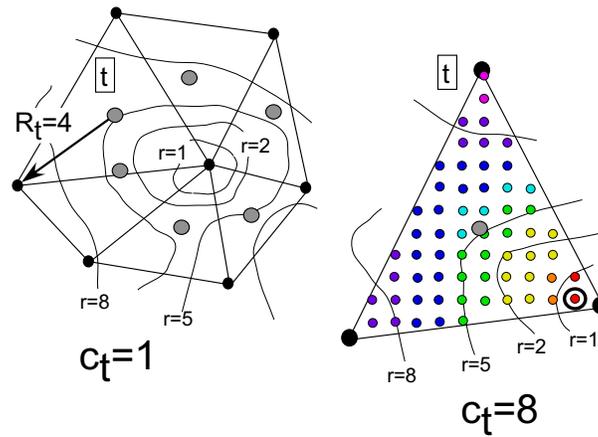


Figure 6.8 Sur cet exemple, les isovaleurs $r = 1$, $r = 2$, $r = 5$ et $r = 8$ de la résolution souhaitée sont affichées. La résolution actuelle des triangles est donnée par le rayon de leur cercle circonscrit. À gauche : la résolution souhaitée des triangles est obtenue en évaluant la valeur de la carte de résolution au niveau des centres des cercles circonscrits (points gris), et aucun d'eux (dont t) n'est raffiné. La résolution finale du maillage ne capture alors pas toutes les variations de la carte de résolution. À droite : la résolution souhaitée des triangles est obtenue en évaluant le minimum des valeurs la carte de résolution dans le triangle (point rouge entouré), et le triangle t est cette fois raffiné.

avec $r(u_i, v_i, w_i)$ ($0 \leq i \leq p - 1$) la valeur de résolution stockée au niveau des p nœuds (u_i, v_i, w_i) du maillage d'arrière-plan situés à l'intérieur du tétraèdre t . Comme pour les triangulations, nous obtenons ainsi une information que nous jugeons pertinente sur la taille que devrait avoir t . En effet, comme le montre la figure 6.8 (cas bidimensionnel analogue), si une unique valeur était prise en compte, par exemple au barycentre ou au centre de la sphère circonscrite à t , les variations fines de la carte de résolution \mathcal{C} ne seraient pas nécessairement reproduites dans la tétraédrisation obtenue après raffinement (sauf si $p = 0$). Le rayon R_t de la sphère circonscrite à t reste quant à lui une bonne approximation de sa taille actuelle, quelle que soit sa forme, même dégénérée.

Présentation de notre méthode

Principes de l'algorithme

Nous supposons que la tétraédrisation initiale est Contraint-Delaunay, c'est-à-dire que tous les tétraèdres le sont, ainsi que toutes leurs faces et leurs arêtes, sauf si celles-ci correspondent (paresseusement ou non) à des simplexes de contrainte, auquel cas elles peuvent éventuellement contenir des sommets de la tétraédrisation dans leurs sphères circonscrites qui sont visibles depuis leur intérieur ([Shewchuk 97], [Baker 98], [Shewchuk 02]). L'algorithme de raffinement doit maintenir cette propriété au fur et à mesure des insertions visant à diminuer la résolution du maillage. Pour cela, si un point p est ajouté pour éliminer un tétraèdre dont le critère de taille c_t est supérieur à B , alors tous les simplexes de la tétraédrisation qui ne sont plus Contraint-Delaunay vis-à-vis de p doivent être remplacés. Par conséquent, les faces (et donc les arêtes) qui sont en association avec les simplexes de contrainte ne peuvent pas être éliminées par une insertion qui maintient le

caractère Contraint-Delaunay du maillage. En effet, cela impliquerait que deux tétraèdres incidents à une face contrainte pourraient contenir le point p dans leur sphère circonscrite, visible depuis leur intérieur, ce qui est impossible car p est dans le cas général situé d'un côté ou de l'autre du plan défini par cette face. Il faut donc mettre en place une règle qui précise les circonstances dans lesquelles un point doit être inséré à l'intérieur d'une face ou d'une arête contrainte de la tétraédrisation.

Le choix de cette règle est a priori assez libre, mais il doit néanmoins suivre quelques principes. En particulier, si un point p est ajouté pour éliminer un tétraèdre t , alors cette élimination ne peut se faire que si t n'est pas Contraint-Delaunay vis-à-vis de p . Autrement dit, la situation où un tétraèdre de résolution insuffisante est Contraint-Delaunay vis-à-vis du centre de sa sphère circonscrite est problématique. Il est possible de montrer que dans ce cas, la sphère circonscrite *équatoriale* à la face contrainte de la tétraédrisation qui *bouche la visibilité* contient nécessairement les 4 sommets de t . Ainsi, il suffit de rejeter tous les centres des sphères circonscrites accrochant les faces de la tétraédrisation correspondant aux triangles de contrainte pour éviter de générer de telles configurations problématiques. Cette solution est identique à celle adoptée dans le cadre d'une optimisation basée sur un critère de forme (présentée précédemment), ce qui est tout à fait normal : dans les deux cas, l'idée est de prévenir la formation de *mauvais* tétraèdres qui ne puissent être éliminés par raffinement au sein d'un maillage maintenu Contraint-Delaunay.

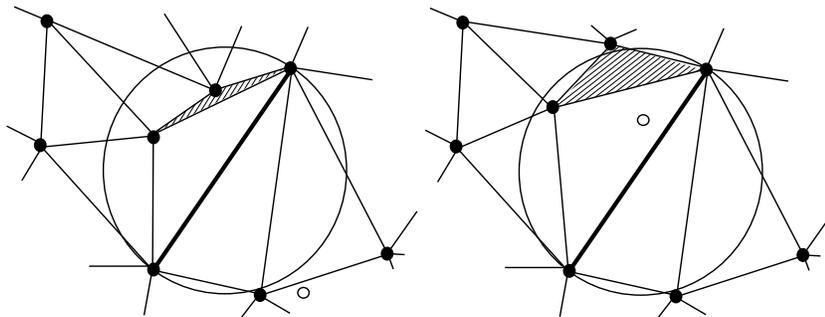


Figure 6.9 Les deux situations où un point est inséré sur un simplexe de contrainte suite au raffinement d'un mauvais triangle, hachuré sur la figure. À gauche : une arête de contrainte (ligne plus épaisse) *bouche la visibilité* entre l'intérieur du mauvais triangle et le centre de son cercle circonscrit (point blanc). À droite : une arête de contrainte est accrochée par le centre du cercle circonscrit au mauvais triangle (point blanc).

Certains centres de sphères circonscrites vont donc être rejetés. Dans le cadre d'une optimisation basée sur un critère de taille, ceci n'est pas suffisant. En effet, cela laisserait intacts dans le maillage les tétraèdres qui étaient initialement Contraint-Delaunay vis-à-vis du centre de leur sphère circonscrite, et les tétraèdres dont le centre de la sphère circonscrite accroche les simplexes de contrainte (nous ne devrions considérer que les triangles de contrainte, mais le fait de prendre en compte les arêtes garantit la génération de tétraèdres de meilleure forme). Tous ces tétraèdres ne sont pas nécessairement en conformité avec la carte de résolution, et un mécanisme doit donc être mis en place

pour les éliminer. Cela passe nécessairement par l'ajout d'un nouveau point dans la tétraédrisation à l'intérieur des simplexes de contrainte qui :

- *bouchent la visibilité* entre l'intérieur d'un *mauvais* tétraèdre et le centre de sa sphère circonscrite (voir figure 6.9, dans le cas analogue de triangles).
- sont accrochés par le centre de la sphère circonscrite à un *mauvais* tétraèdre (voir figure 6.9, dans le cas analogue de triangles).

Nous avons donc défini les règles permettant de satisfaire les exigences de la carte de résolution partout dans la tétraédrisation, et en particulier au niveau des simplexes de contrainte. Focalisons-nous maintenant sur la géométrie des points qui doivent éventuellement y être insérés.

Tout d'abord, si une arête de contrainte est accrochée, alors une bisection est faite sur cette arête, dans l'espace tridimensionnel. Toutefois, au sein d'un *Soft Frame Model*, rappelons que cette arête possède plusieurs images paramétriques, associées aux surfaces radiales incidentes à la ligne radiale dont la géométrie contient l'arête en question. De nouveaux points (géométriquement confondus) doivent donc être également ajoutés aux triangulations réalisées dans ces espaces paramétriques, et le maillage de la ligne radiale correspondante doit être mis à jour. Notons que du fait de la présence d'épis (voir partie précédente), ces insertions peuvent entraîner en cascade d'autres bisections. Les triangulations ont donc été modifiées, ce qui casse évidemment localement les associations, paresseuses ou non, entre les faces de la tétraédrisation et les triangles de contrainte. Il est donc impératif de relancer un processus de satisfaction des contraintes dans la tétraédrisation, afin de maintenir le maillage Contraint-Delaunay ou Contraint-Delaunay Paresseux.

Le cas où un point p est inséré à l'intérieur d'une face contrainte de la tétraédrisation f est plus complexe. En effet, dans le cas général, cette face n'est que *paresseusement* associée à un ensemble de triangles appartenant, dans le cadre de l'utilisation d'un *Soft Frame Model*, au domaine paramétrique d'une surface radiale. Pour garantir que f disparaisse de la tétraédrisation, nous ajoutons son barycentre au maillage, calculé dans l'espace tridimensionnel. En effet, l'insertion d'un point qui n'appartienne pas à f n'est pas nécessairement situé à proximité des enfants de la surface radiale considérée. Le calcul de l'image paramétrique du barycentre p est déduite de celles des sommets de f . Cependant, comme la triangulation doit être maintenue de Delaunay, p n'est pas inséré s'il accroche des arêtes de contrainte, conformément aux règles d'un raffinement de Delaunay. Dans ce cas, des bisections sont réalisées sur les arêtes accrochées, et les maillages de lignes radiales correspondantes sont mis à jour. Enfin, suite aux modifications des triangulations, la tétraédrisation doit être maintenue Contraint-Delaunay ou Contraint-Delaunay Paresseux.

Synthèse

Pour conclure sur l'optimisation de la taille des tétraèdres, nous résumons ici les principales étapes de l'algorithme original que nous avons mis en œuvre à cet effet. Il génère un

maillage Contraint-Delaunay ou Contraint-Delaunay Paresseux, où tous les tétraèdres ont une résolution au moins égale à celle exigée par le maillage d'arrière-plan. Notons qu'il peut tout à fait être suivi par une optimisation de la forme des tétraèdres par un lissage ou par des modifications topologiques locales, techniques que nous avons présentées précédemment. Comme nous avons eu l'occasion de le dire pour les triangulations (voir partie 5.2), cet algorithme converge quelle que soit la valeur de B choisie. Toutefois, le choix $B = 1$ donne évidemment les meilleurs résultats.

1. Les tétraèdres sont tout d'abord ordonnés dans une liste L selon le critère c défini plus haut (équation 6.8), les tétraèdres les plus petits étant les derniers. Un tétraèdre dont la valeur du critère c est supérieure ou égale à B sera dit *B-mauvais*.
2. Tant que la liste L n'est pas vide, son premier B -mauvais élément t , autrement dit le tétraèdre le plus mauvais dans l'état actuel du maillage, en est retiré. Soit p le centre de sa sphère circonscrite.
3. Différents cas peuvent se présenter :
 - Si t n'est pas Contraint-Delaunay vis-à-vis de p , et que p accroche une ou plusieurs arêtes de contrainte dans la tétraédrisation, l'algorithme passe à l'étape numéro 4.
 - Si t n'est pas Contraint-Delaunay vis-à-vis de p , et que p accroche une ou plusieurs faces de contrainte dans la tétraédrisation, l'algorithme passe à l'étape numéro 5.
 - Si t n'est pas Contraint-Delaunay vis-à-vis de p , et que p n'accroche aucune arête ou face de contrainte dans la tétraédrisation, alors p est ajouté dans le maillage, en éliminant tous les simplexes qui ne sont pas Contraint-Delaunay vis-à-vis de p .
 - Si t est Contraint-Delaunay vis-à-vis de p , alors la face contrainte de la tétraédrisation qui *bouche la visibilité* doit être éliminée de la tétraédrisation. L'algorithme passe alors à l'étape numéro 5.
4. Si une arête contrainte de la tétraédrisation est accrochée par le point p , alors p est rejeté et le point milieu de cette arête est ajouté au maillage, en éliminant tous les simplexes qui ne sont pas de Delaunay vis-à-vis de ce point. Des points sont aussi insérés dans les triangulations des domaines paramétriques où cette arête a une image, ce qui peut entraîner la bisection d'autres arêtes du fait de la présence d'épis. Les maillages des lignes radiales correspondantes sont mis à jour, et un processus de satisfaction des nouvelles contraintes doit finalement être réalisé pour maintenir la tétraédrisation Contraint-Delaunay ou Contraint-Delaunay Paresseux. Les tétraèdres éliminés sont retirés de la liste L , et ceux nouvellement créés y sont ajoutés. Si t a été éliminé de la tétraédrisation, alors l'algorithme repart à l'étape numéro 2. Sinon, il repart à l'étape numéro 3.
5. Si une face contrainte de la tétraédrisation est accrochée par le point p , ou *bouche la visibilité* entre p et l'intérieur de t , alors p est rejeté et le barycentre de cette face est considéré pour une insertion :

- Si son image dans le domaine paramétrique adéquat n'accroche aucune arête de contrainte dans la triangulation, alors le barycentre est ajouté à la tétraédrisation, en éliminant tous les simplexes qui ne sont pas de Delaunay vis-à-vis de ce point. Un nouveau point est aussi inséré dans la triangulation, et un processus de satisfaction des nouvelles contraintes doit finalement être réalisé pour maintenir le maillage Contraint-Delaunay ou Contraint-Delaunay Paresseux. Les tétraèdres éliminés sont retirés de la liste L , et ceux nouvellement créés y sont ajoutés. Si t a été éliminé de la tétraédrisation, alors l'algorithme repart à l'étape numéro 2. Sinon, il repart à l'étape numéro 3.
- Si son image dans le domaine paramétrique adéquat accroche une ou plusieurs arêtes de contrainte dans la triangulation, alors les milieux de ces arêtes y sont ajoutés, ce qui peut entraîner la bissection d'autres arêtes du fait de la présence d'épis. En même temps, les points correspondant sont insérés dans la tétraédrisation, en éliminant tous les simplexes qui ne sont pas de Delaunay vis-à-vis d'eux, et les maillages des lignes radiales correspondantes sont mis à jour. Ce processus se répète tant que t n'a pas été éliminé de la tétraédrisation, et que des accrochages persistent. Les tétraèdres éliminés sont retirés de la liste L , et ceux nouvellement créés y sont ajoutés. Un processus de satisfaction des nouvelles contraintes doit être réalisé pour maintenir le maillage Contraint-Delaunay ou Contraint-Delaunay Paresseux. Au final, si t est encore présent dans le maillage, l'algorithme repart à l'étape numéro 5. Sinon, il repart à l'étape numéro 3.

Commentaires sur la modification de la géométrie des surfaces radiales

Notre algorithme d'optimisation de la taille des tétraèdres s'autorise donc à modifier la géométrie des surfaces radiales du *Soft Frame Model*. Cependant, la position tridimensionnelle des points ajoutés n'y est jamais déduite des valeurs de paramétrisation, car nous supposons qu'initialement, la géométrie de la surface radiale était une bonne approximation de celle de ses enfants. De même, si jamais une optimisation de la forme ou de la taille des triangles d'une surface radiale était réalisée alors qu'une tétraédrisation contrainte par ces triangles existait, nous n'utiliserions pas non plus les valeurs de paramétrisation pour calculer la géométrie tridimensionnelle des points à insérer dans la tétraédrisation, mais plutôt les coordonnées barycentriques de ces points dans les triangles qui les contiennent.

6.3 Résultats et applications

6.3.1 Exemples de maillages générés avec notre approche

Les figure suivante (figure 6.10) donne un exemple de volume tétraédrisé construit par les méthodes que nous avons décrites précédemment, sur un modèle réel du sous-sol (modèle TOTAL). Les tétraèdres ont été contraints selon une approche paresseuse (voir partie 6.1), optimisés selon un critère de forme, puis selon un critère de taille afin d'assurer une résolution homogène (voir partie 6.2). Ensuite, la qualité du maillage a été améliorée par un post-traitement basé sur des basculements d'arêtes (voir figure 6.11).

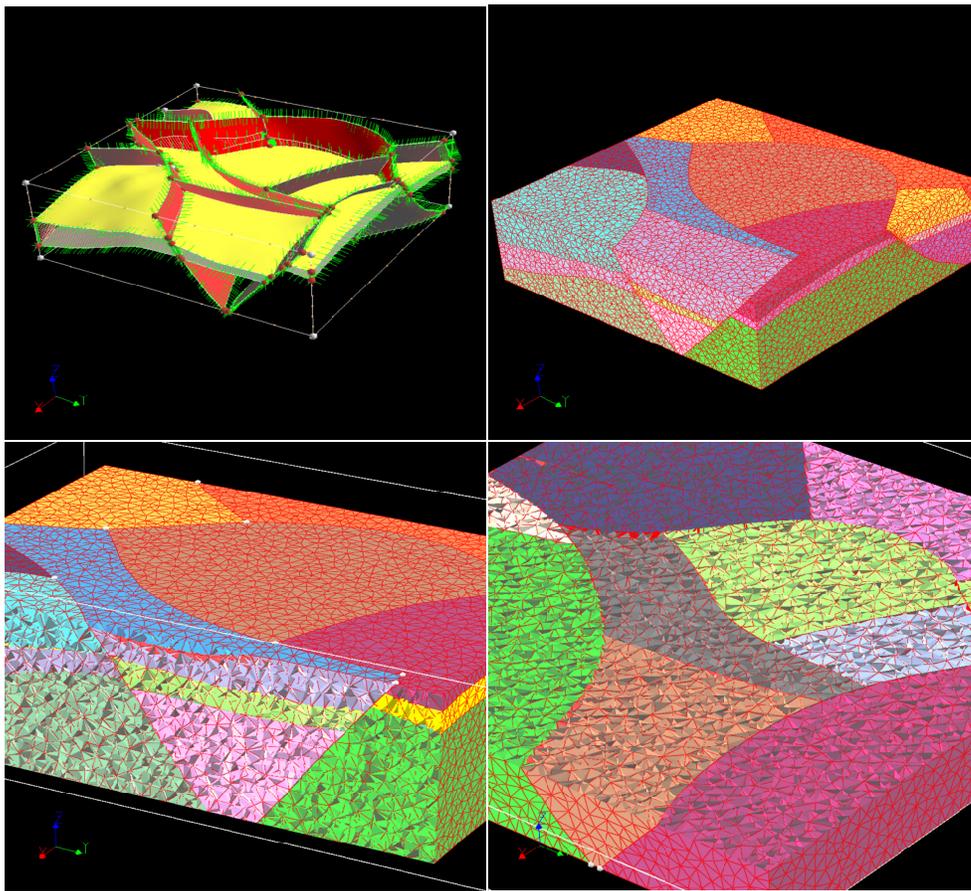


Figure 6.10 Résultat d'une tétraédrisation générée avec notre approche (modèle TOTAL). En haut à gauche figure le modèle structural ayant servi à construire le *Soft Frame Model*. En bas sont montrées une coupe transversale (à gauche) et longitudinale (à droite). Noter la résolution homogène du maillage. Les couleurs correspondent aux régions.

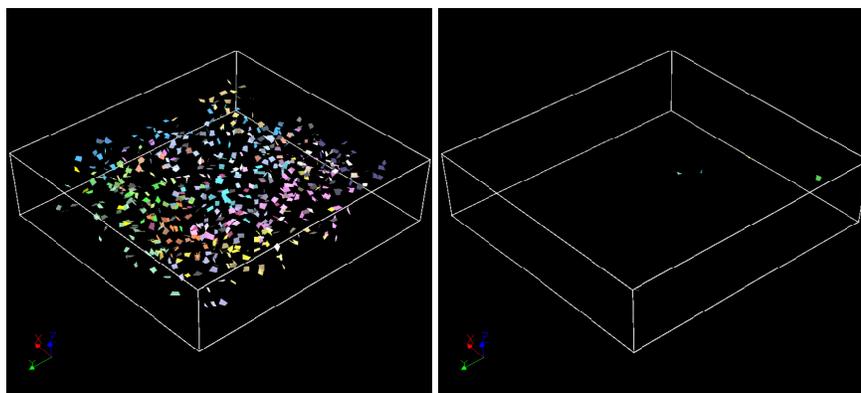


Figure 6.11 Effet de l'optimisation du maillage par basculements d'arêtes. À gauche, seuls sont affichés les tétraèdres qui ont une valeur du critère R/r inférieure à 0.1 (dont les cerfs-volants). À droite, seuls sont affichés les tétraèdres qui ont une valeur du critère R/r comprise entre 0.2 et 0.3.

Au final, il n'existe plus aucun cerf-volant dans le maillage, et tous les tétraèdres ont une valeur du critère de beauté R/r supérieure à 0.2, ce qui est tout à fait satisfaisant (avec R et r le rayon des sphères respectivement circonscrites et inscrites aux tétraèdres). En guise de comparaison, la figure 6.12 montre l'effet d'une optimisation de la forme des tétraèdres par des modifications topologiques locales de type basculement de face, sur un modèle synthétique.

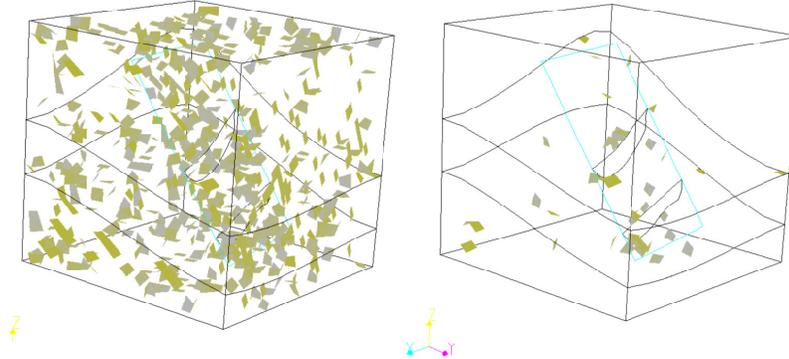


Figure 6.12 Effet de l'optimisation du maillage par basculements de faces. Seuls sont affichés les tétraèdres qui ont une valeur du critère R/r inférieure à 0.1 (dont les cerfs-volants). Comme on peut le voir, plus de 90 % d'entre eux ont été éliminés.

6.3.2 Applications à la simulation de phénomènes physiques

Dépliage tridimensionnel de couches géologiques

Les figures suivantes (figures 6.13 et 6.14) montrent des exemples d'utilisation de volumes tétraédrisés générés selon nos méthodes pour *déplier* des couches géologiques, technique dont les enjeux ont été abordés dans la partie 2.1. Ces résultats ont été présentés dans [Muron 03], où le procédé de restauration en lui-même est décrit dans le détail.

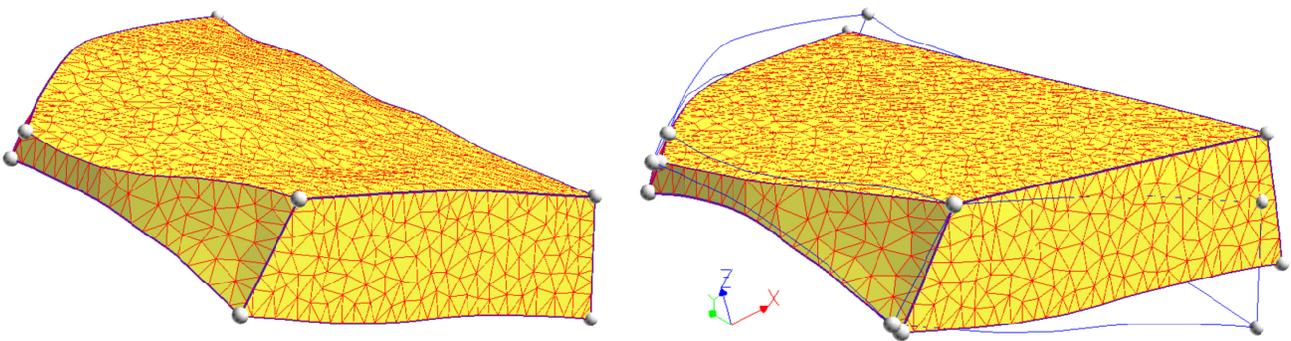


Figure 6.13 Un exemple de restauration équilibrée d'un bloc de faille. L'état actuel est à gauche, et l'état restauré à droite. Noter que la partie supérieure du bloc a été mise à plat. La tétraédrisation de gauche a été optimisée selon un critère de forme et de taille.

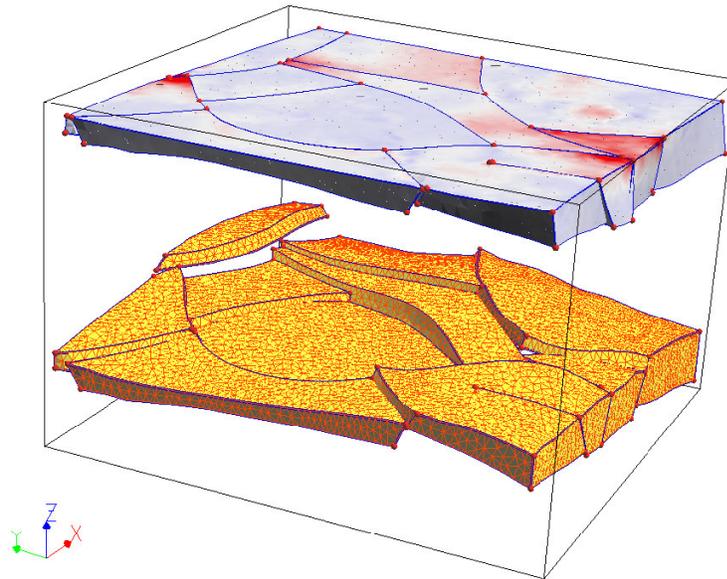


Figure 6.14 Restauration équilibré du modèle TOTAL (l'état restauré est en haut). L'horizon faillé correspondant au toit des couches a été mis à plat. Une propriété de dilatation (un invariant du tenseur des déformations) est affichée sur l'état restauré.

Simulations du comportement thermique de domaines du sous-sol

Afin de montrer l'adéquation des tétraédrisations générées par notre approche avec les méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles (voir partie 2.2), nous présentons ici les résultats d'une simulation thermique effectuée dans le cadre de l'évaluation du potentiel géothermique du sous-sol suisse, présentés dans [Andenmatten 03]. Le modèle couvre approximativement 300 km^2 ($20 \times 15 \text{ km}$), sur une profondeur de 5 km . La construction préalable d'un *Soft Frame Model* a permis de prendre en compte de nombreux contacts et de remailler les horizons et les failles en conséquence (voir chapitre 5), comme le montre la figure 6.15.

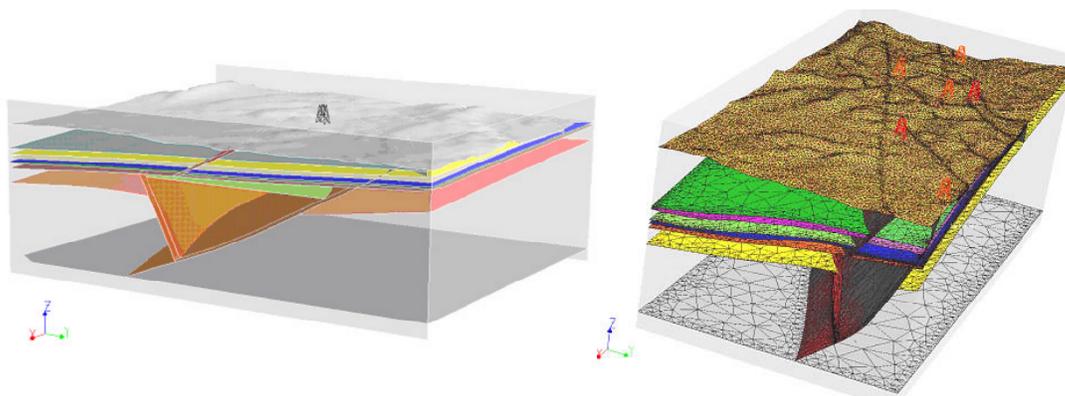


Figure 6.15 Visualisation des surfaces initiales (à gauche) et des surfaces remaillées (à droite) du modèle GEOWATT. Les triangulations ont été optimisées selon des critères de forme et de taille.

La maillage volumique final comprend environ 116000 sommets et 335000 tétraèdres (voir figure 6.16). La méthode utilisée pour la simulation, de type éléments finis, est décrite dans [Kohl 95]. Nous en profitons pour remercier sincèrement N. Andenmatten, de la société GEOWATT, pour sa collaboration à notre travail.

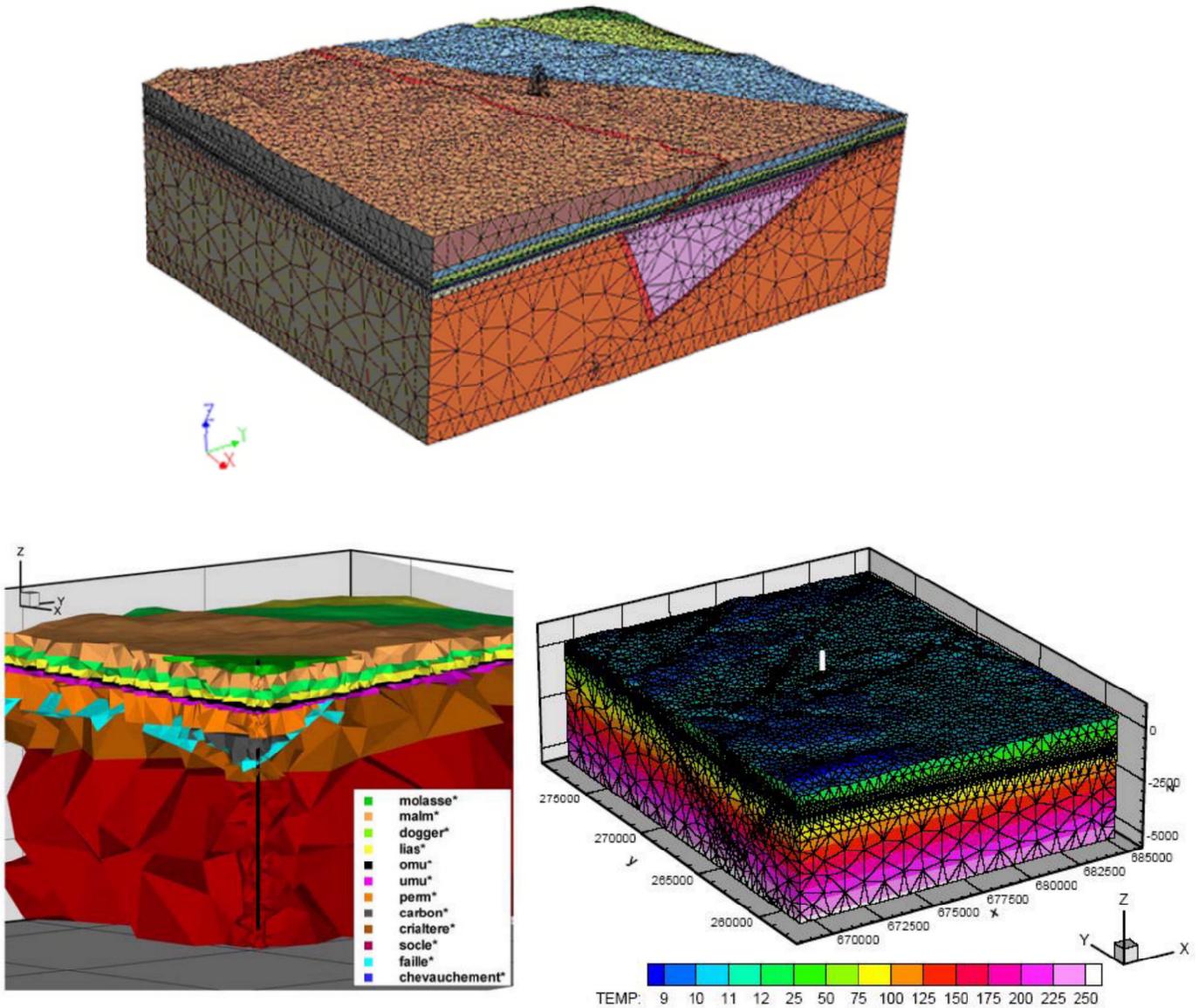


Figure 6.16 Génération d'une tétraédrisation pour une simulation thermique (modèle GEOWATT). Une section du maillage est montrée en bas à gauche, où l'on peut voir un raffinement autour d'un puits. Un résultat de simulation figure en bas à droite (une propriété de température est affichée).

Génération de maillages pour les simulations d'écoulement

Ce chapitre se focalise sur un domaine particulier des géosciences, qui concerne la simulation des écoulements de fluides dans les domaines poreux et perméables du sous-sol. Une première partie s'attache à dégager des contraintes pouvant raisonnablement s'appliquer aux maillages dédiés à la réalisation de ces simulations, dans un espace tridimensionnel. Ensuite, nous présentons différentes méthodologies permettant de construire des maillages non-simpliciaux non-structurés, semi-structurés et *modulaires hybrides*, satisfaisant dans la mesure du possible ces contraintes. Les bénéfices et les inconvénients de l'utilisation de ces maillages y sont également discutés.

7.1 Prérequis raisonnables sur les maillages pour simulations d'écoulement

Comme nous l'avons vu dans la partie I (chapitre 2.1), l'écoulement de fluides de compositions différentes au sein d'un domaine tridimensionnel du sous-sol, hétérogène et anisotrope, est régi par un système d'équations aux dérivées partielles, traduisant d'une part la conservation de la masse, et d'autre part la loi de Darcy. Parmi les méthodes que nous avons également présentées pour discrétiser ces équations (voir chapitre 2.2), seule celle des *volumes finis* permet de vérifier le principe de conservation de la masse, en définissant des *volumes de contrôle* autour des nœuds d'un maillage primal ([Verma 96], [Verma 97]), formant un maillage dual. Cette partie s'attache à cerner les propriétés que doivent satisfaire ces volumes de contrôle, afin de représenter d'une part correctement le domaine d'étude, mais aussi et surtout d'obtenir dans un minimum de temps la solution la plus précise possible qui soit. Pour cela, nous nous plaçons arbitrairement dans un espace tridimensionnel.

7.1.1 Schémas d'approximation de l'écoulement

Problématique

Bref rappel du modèle mathématique de l'écoulement

Rappelons que pour un système à n_p phases et n_c composants, la conservation de la masse d'un composant c peut s'écrire (équation 7.1) :

$$\oint_A \left(\sum_{p=0}^{p=n_p-1} x_c^p \cdot D_p \cdot \lambda_p \cdot \underline{k} \cdot \nabla \Phi_p \right) \cdot \mathbf{n} \cdot dA = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \cdot \sum_{p=0}^{p=n_p-1} x_c^p \cdot D_p \cdot S_p \right) \right] \cdot dV \quad (7.1)$$

où x_c^p est la fraction massique du composant c dans la phase p , D_p la densité molaire spécifique de la phase p , λ_p sa mobilité, \underline{k} la perméabilité du milieu, Φ_p le potentiel de la phase p (sa pression), S_p sa saturation, et enfin ϕ la porosité du milieu (voir chapitre 2.1). Considérons maintenant le volume de contrôle $V(\mathbf{x}_i)$ centré autour du nœud \mathbf{x}_i du maillage.

Discretisation du terme d'accumulation

La discretisation du terme de droite de l'équation 7.1, qui traduit l'accumulation de masse au sein de $V(\mathbf{x}_i)$, se fait entre les temps t et $t + \Delta t$, et on a (équation 7.2) :

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \cdot \sum_{p=0}^{p=n_p-1} x_c^p \cdot D_p \cdot S_p \right) \right] \cdot dV \approx \frac{Vol(V(\mathbf{x}_i))}{\Delta t} \cdot \Delta_t \left(\phi \cdot \sum_{p=0}^{p=n_p-1} x_c^p \cdot D_p \cdot S_p \right)$$

$$\Delta_t \left(\phi \cdot \sum_{p=0}^{p=n_p-1} x_c^p \cdot D_p \cdot S_p \right) = \left(\phi \cdot \sum_{p=0}^{p=n_p-1} x_c^p \cdot D_p \cdot S_p \right)^{t+\Delta t} - \left(\phi \cdot \sum_{p=0}^{p=n_p-1} x_c^p \cdot D_p \cdot S_p \right)^t \quad (7.2)$$

La forme du volume de contrôle $V(\mathbf{x}_i)$ n'a aucune influence sur la précision de cette discretisation, du moment que son volume $Vol(V(\mathbf{x}_i))$ puisse être calculé correctement.

Discretisation du terme d'écoulement

Envisageons maintenant la discretisation du terme d'écoulement de l'équation 7.1 (terme de gauche). Si nous notons A_{ij} les $N_{\mathbf{x}_i}$ faces du volume de contrôle $V(\mathbf{x}_i)$, de vecteur normal sortant \mathbf{n}_{ij} , correspondant au dual d'une arête reliant les nœuds \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_j , celle-ci s'exprime de la manière suivante (équation 7.3) :

$$\oint_A \left(\sum_{p=0}^{p=n_p-1} x_c^p \cdot D_p \cdot \lambda_p \cdot \underline{k} \cdot \nabla \Phi_p \right) \cdot \mathbf{n} \cdot dA \approx \sum_{j=1}^{j=N_{\mathbf{x}_i}} \left[\oint_{A_{ij}} \left(\sum_{p=0}^{p=n_p-1} x_c^p \cdot D_p \cdot \lambda_p \cdot \underline{k} \cdot \nabla \Phi_p \right) \cdot \mathbf{n}_{ij} \cdot dA \right] \quad (7.3)$$

En introduisant la *mobilité* du composant c dans la phase p , noté Λ_c^p ($\Lambda_c^p = x_c^p \cdot D_p \cdot \lambda_p$), l'équation 7.3 devient (équation 7.4) :

$$\oint_A \left(\sum_{p=0}^{p=n_p-1} x_c^p \cdot D_p \cdot \lambda_p \cdot \underline{k} \cdot \nabla \Phi_p \right) \cdot \mathbf{n} \cdot dA \approx \sum_{j=1}^{j=N_{\mathbf{x}_i}} \left[A_{ij} \cdot \left(\sum_{p=0}^{p=n_p-1} \Lambda_c^p \cdot \underline{k} \cdot \nabla \Phi_p \right) \cdot \mathbf{n}_{ij} \right] \quad (7.4)$$

Les valeurs de A_{ij} et \mathbf{n}_{ij} sont déduites simplement de la géométrie du volume de contrôle. Il faut ensuite approximer, pour chaque face A_{ij} de $V(\mathbf{x}_i)$, et pour chaque phase p du système, la mobilité $(\Lambda_c^p)_{A_{ij}}$ du composant c , ainsi que le flux de la phase p au travers de A_{ij} , égal à $\underline{k} \cdot \nabla \Phi_p \cdot \mathbf{n}_{ij}$. La mobilité $(\Lambda_c^p)_{A_{ij}}$ est obtenue par une moyenne des valeurs aux nœuds \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_j . En pratique, seule la valeur de mobilité définie au nœud *dominant*, c'est-à-dire celui duquel provient l'écoulement, est prise en compte (on parle alors d'*upstream weighting*).

L'approximation du flux de la phase p au travers des faces du volume de contrôle $V(\mathbf{x}_i)$ est plus délicate. Deux grandes approches sont possibles, selon la manière avec laquelle sont définies les données de perméabilité [Prévost 02]. Dans les deux cas, le potentiel Φ_p de la phase p est supposé varier linéairement au sein des mailles du primal :

- Avec un schéma *distribué par éléments*, les perméabilités \underline{k} sont supposées constantes sur les mailles du primal [Heinemann 94].
- Avec un schéma *distribué par points*, les perméabilités sont supposées constantes sur les volumes de contrôle, autrement dit sur les nœuds du primal ([Verma 96], [Edwards 98], [Aavatsmark 02]).

Les solutions techniques permettant de définir des propriétés sur des cellules de dimensions variables ont été présentées dans la partie 1.3. En règle générale, les données de perméabilité \underline{k} (équation 7.4) et de porosité ϕ (équation 7.2) sont obtenues par un procédé d'*upscaling*, qui, globalement, consiste à assigner des valeurs cohérentes à un maillage grossier à partir de valeurs distribuées dans un maillage de résolution beaucoup plus fine. La mise au point de techniques d'*upscaling* est un domaine de recherche très actif. Des approches originales sont par exemple présentées dans [Prévost 03] et [Mallet 03-(1)]. Sur ces bases, la discrétisation du flux au travers les faces des volumes de contrôle est envisageable sous deux points de vue bien distincts, que nous allons maintenant présenter dans leurs grandes lignes. Pour cela, nous allons considérer une maille \mathcal{M} du primal, faite de s sommets et de a arêtes. Soit \mathbf{x}_i ($1 \leq i \leq s$) un des sommets de \mathcal{M} , et $V(\mathbf{x}_i)$ le volume de contrôle qui lui est associé.

Approximation du flux à plusieurs points et grilles non-orthogonales

Position du problème sur une maille du primal

Avec un schéma *distribué par éléments*, la perméabilité $\underline{k}_{\mathcal{M}}$ est constante sur la maille \mathcal{M} , et si \mathcal{M} est un tétraèdre ($s = 4, a = 6$), le gradient $\nabla_{\mathcal{M}} \Phi_p$ de la phase p dans \mathcal{M} peut s'exprimer facilement par une combinaison linéaire des valeurs du potentiel aux 4 nœuds de \mathcal{M} , que nous allons noter $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k$ et \mathbf{x}_l (équation 7.5) :

$$\nabla_{\mathcal{M}} \Phi_p = G_1 \cdot \begin{pmatrix} \Phi_p(\mathbf{x}_j) - \Phi_p(\mathbf{x}_i) \\ \Phi_p(\mathbf{x}_k) - \Phi_p(\mathbf{x}_i) \\ \Phi_p(\mathbf{x}_l) - \Phi_p(\mathbf{x}_i) \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

avec G_1 une matrice de dimension (3×3) dont les coefficients ne dépendent que de la géométrie de \mathcal{M} . Considérons désormais l'arête de \mathcal{M} reliant les nœuds \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_j , et la

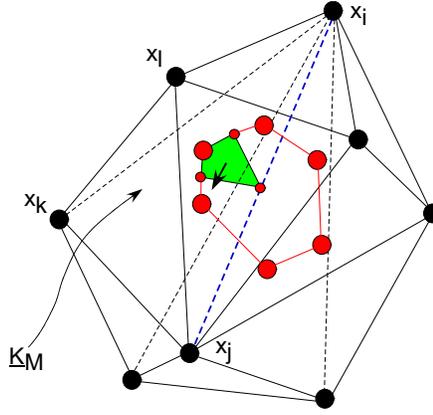


Figure 7.1 Avec un schéma distribué par éléments, la perméabilité $\underline{k}_{\mathcal{M}}$ est constante dans chaque tétraèdre. Le flux attaché à la *portion* de la face duale de l'arête $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ comprise dans le tétraèdre \mathcal{M} , représentée en vert, dépend des valeurs de potentiel aux quatre nœuds \mathbf{x}_i , \mathbf{x}_j , \mathbf{x}_k et \mathbf{x}_l , de leur géométrie, et de $\underline{k}_{\mathcal{M}}$.

face du volume de contrôle $V(\mathbf{x}_i)$ qui lui correspond. Seule une *portion* de cette face est à l'intérieur de \mathcal{M} (voir figure 7.1). Si nous notons $\mathbf{n}_{\mathcal{M}}^{ij}$ la normale sortante à cette portion de face, alors le flux de la phase p qui lui est attaché vaut (équation 7.6) :

$$\underline{k}_{\mathcal{M}} \cdot \nabla_{\mathcal{M}} \Phi_p \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{M}}^{ij} = b_j^{ij} \cdot (\Phi_p(\mathbf{x}_j) - \Phi_p(\mathbf{x}_i)) + b_k^{ij} \cdot (\Phi_p(\mathbf{x}_k) - \Phi_p(\mathbf{x}_i)) + b_l^{ij} \cdot (\Phi_p(\mathbf{x}_l) - \Phi_p(\mathbf{x}_i)) \quad (7.6)$$

où les coefficients b_j^{ij} , b_k^{ij} et b_l^{ij} sont uniquement déterminés par la valeur de perméabilité au sein du tétraèdre \mathcal{M} , et par sa géométrie ([Heinemann 88], [Verma 96]). Avec un schéma *distribué par éléments*, nous avons dû supposer que la maille \mathcal{M} était un simplexe, sans quoi le calcul du gradient $\nabla_{\mathcal{M}} \Phi_p$ aurait été sur-déterminé (car \mathcal{M} aurait eu plus de 4 sommets). Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, il est toutefois possible d'utiliser la technique de discrétisation présentée ci-après (habituellement utilisée pour les schémas *distribués par points*).

Avec un schéma *distribué par points*, la perméabilité n'est plus constante dans \mathcal{M} . En revanche, elle l'est au sein des s *régions de continuité* $R(\mathbf{x}_k)$ définies par les volumes de contrôle centrés sur les sommets \mathbf{x}_k de \mathcal{M} ($1 \leq k \leq s$) (ceci est aussi vrai pour un schéma *distribué pas éléments*, quelles que soient ses mailles primales). Le calcul du gradient $\nabla \Phi_p$ va donc se faire dans chacune de ses régions ([Verma 96], [Verma 97]). Toutefois, une région de continuité $R(\mathbf{x}_k)$ ne contient qu'une seule valeur de potentiel, en l'occurrence $\Phi_p(\mathbf{x}_k)$. Pour pouvoir calculer le gradient $\nabla_{R(\mathbf{x}_k)} \Phi_p$, il faut donc faire intervenir des valeurs de potentiel supplémentaires ([Edwards 98], [Aavatsmark 02]), dits *points de continuité*, situés sur les arêtes du maillage primal (voir figure 7.2), et que nous allons noter \mathbf{x}'_k ($1 \leq k \leq a$). Dans l'hypothèse où il existe 3 arêtes de \mathcal{M} incidentes à chacun de ses sommets, 3 points de continuité \mathbf{x}'_{i1} , \mathbf{x}'_{i2} et \mathbf{x}'_{i3} sont alors associés à la région de continuité $R(\mathbf{x}_i)$, et le gradient de la phase p y vaut (équation 7.7) :

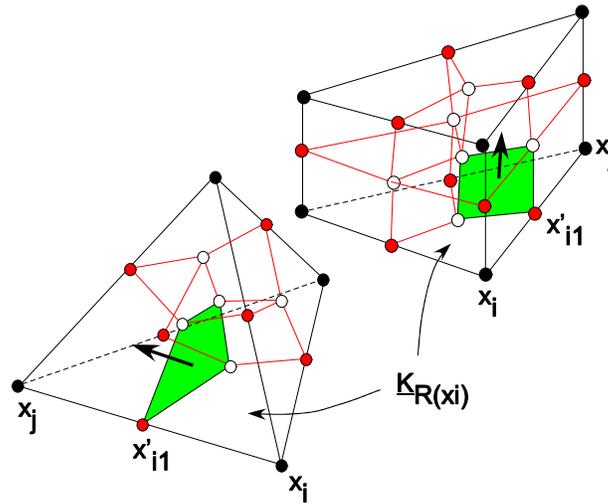


Figure 7.2 Avec un schéma distribué par points, la perméabilité $k_{R(\mathbf{x}_i)}$ est constante dans chacune des régions de continuité de la maille \mathcal{M} . Le flux attaché à la *portion* de la face duale de l'arête $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ comprise dans \mathcal{M} , représentée en vert, dépend des valeurs de potentiel aux nœuds de \mathcal{M} , des valeurs de perméabilité associées, et de sa géométrie. Les points de continuité sont en rouge.

$$\nabla_{R(\mathbf{x}_i)} \Phi_p = \begin{pmatrix} (\mathbf{x}'_{i1} - \mathbf{x}_i)_x & (\mathbf{x}'_{i1} - \mathbf{x}_i)_y & (\mathbf{x}'_{i1} - \mathbf{x}_i)_z \\ (\mathbf{x}'_{i2} - \mathbf{x}_i)_x & (\mathbf{x}'_{i2} - \mathbf{x}_i)_y & (\mathbf{x}'_{i2} - \mathbf{x}_i)_z \\ (\mathbf{x}'_{i3} - \mathbf{x}_i)_x & (\mathbf{x}'_{i3} - \mathbf{x}_i)_y & (\mathbf{x}'_{i3} - \mathbf{x}_i)_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_p(\mathbf{x}'_{i1}) - \Phi_p(\mathbf{x}_i) \\ \Phi_p(\mathbf{x}'_{i2}) - \Phi_p(\mathbf{x}_i) \\ \Phi_p(\mathbf{x}'_{i3}) - \Phi_p(\mathbf{x}_i) \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

Comme nous pouvons le voir, la première matrice de cette équation ne dépend que de la géométrie de \mathcal{M} et de la position des points de continuité sur ses arêtes, c'est pourquoi nous allons la noter G_2 . Nous pouvons ainsi écrire (équation 7.8) :

$$\nabla_{R(\mathbf{x}_i)} \Phi_p = G_2 \cdot \begin{pmatrix} \Phi_p(\mathbf{x}'_{i1}) - \Phi_p(\mathbf{x}_i) \\ \Phi_p(\mathbf{x}'_{i2}) - \Phi_p(\mathbf{x}_i) \\ \Phi_p(\mathbf{x}'_{i3}) - \Phi_p(\mathbf{x}_i) \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

Une équation similaire à l'équation 7.8 ci-dessus peut être écrite pour toutes les autres régions de continuité $R(\mathbf{x}_k)$ ($1 \leq k \leq s, k \neq i$) de la maille \mathcal{M} . En tenant compte du fait que les flux des deux côtés des frontières des régions de continuité doivent être égaux ([Verma 96], [Verma 97], [Edwards 98], [Aavatsmark 02]), il est alors possible d'obtenir les valeurs du potentiel de la phase p au niveau des a points de continuité de \mathcal{M} (équation 7.9) :

$$\begin{pmatrix} \Phi_p(\mathbf{x}'_1) \\ \Phi_p(\mathbf{x}'_2) \\ \dots \\ \Phi_p(\mathbf{x}'_a) \end{pmatrix} = G_3 \cdot \begin{pmatrix} \Phi_p(\mathbf{x}_1) \\ \Phi_p(\mathbf{x}_2) \\ \dots \\ \Phi_p(\mathbf{x}_s) \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

où G_3 est une matrice de dimension $(a \times s)$ dont les coefficients ne dépendent que des valeurs de perméabilité k définies au nœuds \mathbf{x}_k de la maille \mathcal{M} ($1 \leq k \leq s$), de sa

géométrie et de celle de ses points de continuité. La combinaison des équations 7.8 et 7.9 permet d'obtenir la valeur du gradient du potentiel de la phase p dans chaque région de continuité de la maille \mathcal{M} . Considérons désormais l'arête de \mathcal{M} reliant les nœuds \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_j , et la face du volume de contrôle $V(\mathbf{x}_i)$ qui lui correspond. Le flux de la phase p au niveau de la portion de cette face située à l'intérieur de \mathcal{M} , de vecteur normal sortant $\mathbf{n}_{\mathcal{M}}^{ij}$, s'exprime sous la forme (équation 7.10) :

$$\underline{k}_{R(\mathbf{x}_i)} \cdot \nabla_{R(\mathbf{x}_i)} \Phi_p \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{M}}^{ij} = \sum_{k=1}^{k=s} T_k^{ij} \cdot \Phi_p(\mathbf{x}_k) \quad (7.10)$$

avec T_k^{ij} des coefficients dont les valeurs sont uniquement déterminées par la géométrie de la maille \mathcal{M} , de celle de ses points de continuité, et des perméabilités définies au niveau des sommets de \mathcal{M} . Notons que l'équation 7.10 est tout à fait similaire à l'équation 7.6, obtenue avec un schéma *distribué par éléments*.

Discrétisation sur les faces du volume de contrôle

Les équations 7.6 et 7.10 sont valables pour toutes les mailles \mathcal{M} qui contiennent les sommets \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_j . Par conséquent, en reprenant l'équation 7.4, l'écoulement total Q_c^{ij} au travers les faces du volume de contrôle $V(\mathbf{x}_i)$ qui correspondent au dual de l'arête de \mathcal{M} reliant les sommets \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_j , peut s'écrire de la manière suivante, respectivement pour un schéma *distribué par éléments* et *par points* (équations 7.11 et 7.12) :

$$Q_c^{ij} = \sum_{p=0}^{p=n_p-1} (\Lambda_c^p)_{A_{ij}} \cdot \left[\sum_{k=1}^{k=n_s} \beta_k^{ij} \cdot (\Phi_p(\mathbf{x}_k) - \Phi_p(\mathbf{x}_i)) \right] \quad (7.11)$$

$$Q_c^{ij} = \sum_{p=0}^{p=n_p-1} (\Lambda_c^p)_{A_{ij}} \cdot \left[\sum_{k=1}^{k=n_s} \tau_k^{ij} \cdot \Phi_p(\mathbf{x}_k) \right] \quad (7.12)$$

où n_s est égal au nombre de sommets distincts des mailles du primal partageant l'arête reliant les nœuds \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_j . Les coefficients β_k^{ij} et τ_k^{ij} ne dépendent que de la géométrie de ces mailles et de celle de leurs points de continuité (ce qui implique la connaissance de l'aire des faces du volume de contrôle), mais aussi des données de perméabilité définies respectivement sur ces mailles ou sur leurs nœuds ($1 \leq k \leq n_s$). Comme on peut le voir, dans le cas général, l'écoulement entre les volumes de contrôles centrés sur les nœuds \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_j ne dépend pas uniquement des valeurs de potentiel de ces deux nœuds, mais plutôt de n_s nœuds (d'où le nom : *approximation du flux à plusieurs points, multiple-point flux approximation* en anglais, souvent abrégé MPFA).

La valeur de la variable n_s dans les équations 7.11 et 7.12 est déterminante. En effet, elle conditionne directement la taille des systèmes matriciels à résoudre au sein de la méthode des volumes finis. Nous pouvons en donner quelques exemples :

- Pour un maillage primal structuré bidimensionnel à base de quadrilatères, on a $n_s = 6$ pour chaque face d'un volume de contrôle. Le flux total au travers chaque volume de contrôle dépend alors de 9 valeurs de potentiel différentes.

- Pour un maillage primal non-structuré bidimensionnel à base de triangles, on a $n_s = 4$ pour chaque face d'un volume de contrôle. Le flux total au travers chaque volume de contrôle dépend alors de $(n_a + 1)$ valeurs de potentiel différentes, si l'on considère que chaque nœud du primal est en moyenne incident à n_a arêtes (6 par exemple).
- Pour un maillage primal structuré tridimensionnel à base d'hexaèdres, on a $n_s = 18$ pour chaque face d'un volume de contrôle. Le flux total au travers chaque volume de contrôle dépend alors de 27 valeurs de potentiel différentes.
- Pour un maillage primal non-structuré tridimensionnel à base de tétraèdres, on a $n_s = (n_t + 2)$ pour chaque face d'un volume de contrôle, avec n_t le nombre moyen de tétraèdres partageant une arête (6 par exemple). Le flux total au travers chaque volume de contrôle dépend alors de $(n_a + 1)$ valeurs de potentiel différentes, si l'on considère que chaque nœud du primal est en moyenne incident à n_a arêtes (20 par exemple).

Une approximation du flux à plusieurs points est la seule technique de discrétisation de l'écoulement qui soit correcte dans le cas général. Elle implique toutefois que les sommets des volumes de contrôle (qui ne sont pas des points de continuité) soient tous situés à l'intérieur d'une maille du primal [Verma 96]. En pratique, ils sont donc souvent situés à leur barycentre, tout comme les points de continuité d'ailleurs, au milieu des arêtes et au barycentre des faces ([Verma 96], [Verma 97]). Du fait que la géométrie des volumes de contrôle soit peu contrainte, la grille d'écoulement est dite *non-orthogonale*, ou encore CVFE (pour *Control Volume Finite Element*). Notons enfin qu'une approximation du flux à plusieurs points n'est pas nécessairement alourdie par l'utilisation d'un maillage primal non-structuré.

Approximation du flux à deux points et grilles orthogonales

Introduction

Afin de simplifier les systèmes matriciels à résoudre, il est souhaitable de se ramener à un schéma d'approximation du flux à deux points. Pour cela, des conditions strictes sur la géométrie des volumes de contrôle doivent être imposées. Ceci produit deux familles de grilles distinctes, que l'on nomme PEBI (pour *Perpendicular Bisector*) et SP/SPP (pour *Streamline-Potential* ou *Streamline-Pressure-Potential* - voir figure 7.3). Ces deux types de maillages sont dits *k-orthogonaux*.

Nous n'aborderons ici que les maillages PEBI. Les détails de la construction des grilles SPP et de leur utilisation pour des simulations d'écoulement sont donnés par exemple dans [Verma 97], [Edwards 98], [Edwards 99], [Castellini 00-(2)] et [Mlacnik 03]. Les nœuds du maillage primal sont alors situés au niveau des intersections entre un nombre limité de lignes de courant et d'équipotentiels déduites d'une première simulation d'écoulement très simple, à une seule phase, réalisée sur une ou plusieurs grilles structurées et régulières de résolution fine (voir figure 7.3). Des techniques de tracés de lignes de courant sont présentées dans [Thiele 96], [Batycky 96], [Prévoist 02], [Blunt 02], et [Voillemont 03].

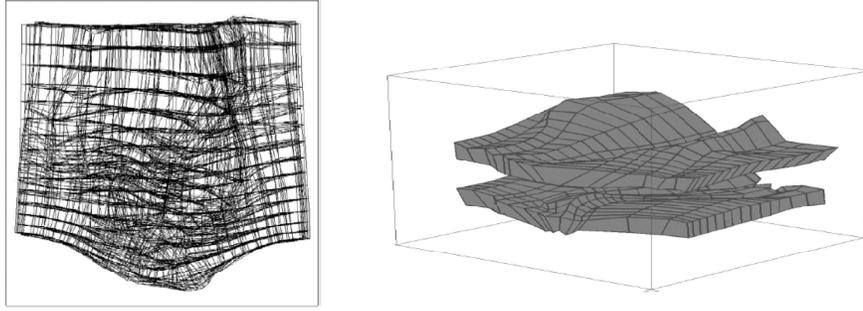


Figure 7.3 Un exemple de grille d'écoulement tridimensionnelle de type *Stream-line-Pressure-Potential* (d'après [Castellini 00-(1)]). Les lignes de courants et les isopotentielles sont à gauche, et deux sections horizontales de la grille correspondante à droite.

Nous considérons que ces grilles ne sont pas appropriées à la représentation de modèles tridimensionnels complexes du sous-sol. De plus, dans le cas général, ces grilles ne sont pas strictement k -orthogonales [Edwards 98], et ne sont en théorie valides que si elles sont reconstruites au fur et à mesure de la simulation, afin de suivre l'évolution de la distribution des lignes de courant et des équipotentielles.

Position du problème sur une maille du primal

Dans le cas particulier où les données de perméabilité sont isotropes, autrement dit représentées par des *scalaires*, il est possible de montrer qu'il existe un vecteur $\mathbf{n}_{\mathcal{M}}^{ij}$ tel que les équations 7.6 et 7.10 ne fassent plus intervenir que les valeurs des potentiels de la phase p aux nœuds \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_j . En effet, un schéma d'approximation du flux à deux points s'applique dans ce cas dès lors que les faces des volumes de contrôle sont simplement orthogonales aux arêtes du maillage primal auxquelles elles correspondent, quels que soient les valeurs de perméabilité, que le schéma adopté soit *distribué par éléments* ou *par points*, comme le montre la figure 7.4. Le maillage dual est alors qualifié de PEBI ([Heinemann 88], [Heinemann 89], [Palagi 91], [Verma 96]). La condition à satisfaire est donc la suivante¹ (équation 7.13) :

$$\mathbf{n}_{\mathcal{M}}^{ij} \parallel (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \quad (7.13)$$

La condition 7.13 revient à placer le centre $c_{\mathcal{M}}$ associé à la maille \mathcal{M} au centre de la sphère circonscrite à \mathcal{M} .

Avec des perméabilités anisotropes, deux principales méthodes existent pour assurer une k -orthogonalité :

- Avec un schéma *distribué par éléments*, à condition que les tenseurs de perméabilité soient symétriques (diagonaux, non-diagonaux), il est possible de généraliser le cas de perméabilités isotropes et d'imposer sur les faces de contrôle la condition suivante (équation 7.14) :

¹L'opérateur \parallel marque la colinéarité entre deux vecteurs.

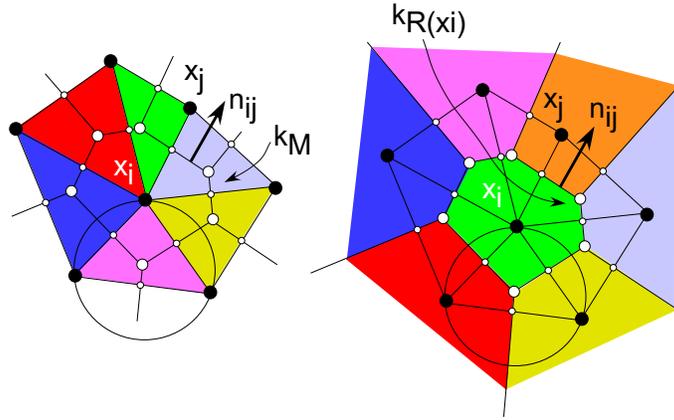


Figure 7.4 Dans le cas où les perméabilités sont des valeurs scalaires, l'orthogonalité entre les arêtes du maillage primal et les faces des volumes de contrôle correspondantes suffit à assurer la k -orthogonalité, que le schéma soit *distribué par éléments* (à gauche) ou *par points* (à droite). Le dual d'une maille du primal est alors le centre de sa sphère circonscrite. Chaque couleur correspond à un domaine où la perméabilité est supposée constante.

$$\underline{k}_M \cdot \mathbf{n}_M^{ij} \parallel (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \quad (7.14)$$

Le maillage dual est alors qualifié de G-PEBI, pour *Generalized Perpendicular Bisector* ([Heinemann 88], [Heinemann 89], [Verma 96]). La figure 7.5 montre les volumes de contrôle obtenus dans un cas bidimensionnel, avec des tenseurs de perméabilité quelconques.

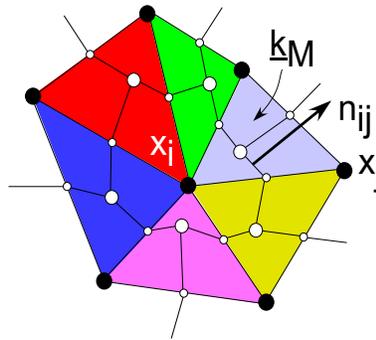


Figure 7.5 Avec un schéma *distribué par éléments*, si les tenseurs de perméabilité sont anisotropes et symétriques, il est possible d'assurer une k -orthogonalité si les anisotropies ne sont pas trop fortes. Chaque couleur correspond à un domaine où la perméabilité est supposée constante.

- Avec un schéma *distribué par éléments* ou *par points*, à condition que l'anisotropie de perméabilité soit uniforme (c'est-à-dire constante sur tout le maillage), et que les tenseurs soient diagonaux, une autre solution consiste à raisonner dans un espace de calcul où la perméabilité est isotrope, et à générer les volumes de contrôle dans cet espace (condition 7.13). Ensuite, ceux-ci sont replacés dans l'espace physique de départ, où ils sont k -orthogonaux ([Gunasekera 97], [Balaven 00-(1)]), et globalement

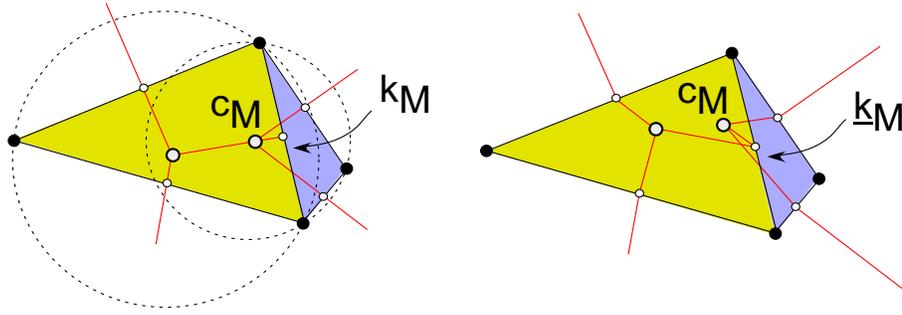


Figure 7.6 Que ce soit avec des perméabilités isotropes (à gauche) ou anisotropes (à droite), le fait que les mailles du primal soient des simplexes de Delaunay n'assure en rien que ceux-ci contiennent le centre de leur sphère circonscrite, et en pratique, parvenir à une k -orthogonalité n'est pas toujours possible.

allongés selon l'ellipsoïde de perméabilité. Une technique permettant de calculer la transformation vers l'espace de calcul est donnée dans [Gunasekera 97].

Dans l'hypothèse où une k -orthogonalité est envisageable, les équations 7.6 et 7.10 deviennent respectivement (équations 7.15 et 7.16) :

$$\underline{k}_{\mathcal{M}} \cdot \nabla_{\mathcal{M}} \Phi_p \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{M}}^{ij} = b_{ij} \cdot (\Phi_p(\mathbf{x}_j) - \Phi_p(\mathbf{x}_i)) \quad (7.15)$$

$$\underline{k}_{R(\mathbf{x}_i)} \cdot \nabla_{R(\mathbf{x}_i)} \Phi_p \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{M}}^{ij} = T_i^{ij} \cdot \Phi_p(\mathbf{x}_i) + T_j^{ij} \cdot \Phi_p(\mathbf{x}_j) \quad (7.16)$$

avec d'une part b_{ij} un coefficient uniquement déterminé par la géométrie de \mathcal{M} et par sa valeur de perméabilité $\underline{k}_{\mathcal{M}}$, et d'autre part T_i^{ij} et T_j^{ij} deux coefficients dont les valeurs dépendent uniquement de la géométrie de \mathcal{M} et de celle de ses points de continuité, mais aussi des s valeurs de perméabilité définies aux nœuds de \mathcal{M} .

La construction de grilles PEBI ou G-PEBI n'est pas toujours possible ([Verma 96], [Prévost 03]). En effet, il est nécessaire que le centre $c_{\mathcal{M}}$ associé à la maille du primal \mathcal{M} soit situé à l'intérieur de \mathcal{M} , ou, à la limite, dans un de ses voisins immédiats [Verma 96]. Cependant :

- Avec des perméabilités scalaires, comme nous l'avons déjà dit, le point $c_{\mathcal{M}}$ est le centre de la sphère circonscrite à \mathcal{M} . Dans le cas général, rien n'impose que ce point soit situé dans \mathcal{M} (voir figure 7.6).
- Avec des tenseurs de perméabilité symétriques quelconques (diagonaux, non-diagonaux), le point $c_{\mathcal{M}}$ est construit de manière à satisfaire la condition 7.14. Ce point est situé dans \mathcal{M} seulement si les anisotropies de perméabilité ne sont pas trop fortes (voir figure 7.6).

Par conséquent, avec de fortes anisotropies locales de perméabilité, une pratique courante est d'assurer la k -orthogonalité dans le plus de mailles possibles, puis de réaliser une approximation du flux à deux points sur ces mailles. Pour les autres, un classique schéma d'approximation du flux à plusieurs points est alors adopté.

Discrétisation sur les faces du volume de contrôle

En supposant qu'elles soient valables, les équations 7.15 et 7.16 s'appliquent sur toutes les mailles \mathcal{M} qui contiennent les sommets \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_j . Par conséquent, en reprenant l'équation 7.4, l'écoulement total Q_c^{ij} au travers les faces du volume de contrôle $V(\mathbf{x}_i)$ qui correspondent au dual de l'arête de \mathcal{M} reliant les sommets \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_j , peut s'écrire de la manière suivante, respectivement pour un schéma *distribué par éléments* et *par points* (équations 7.17 et 7.18) :

$$Q_c^{ij} = \beta_{ij} \cdot \sum_{p=0}^{p=n_p-1} (\Lambda_c^p)_{A_{ij}} \cdot (\Phi_p(\mathbf{x}_j) - \Phi_p(\mathbf{x}_i)) \quad (7.17)$$

$$Q_c^{ij} = \sum_{p=0}^{p=n_p-1} (\Lambda_c^p)_{A_{ij}} \cdot [\tau_i^{ij} \cdot \Phi_p(\mathbf{x}_i) + \tau_j^{ij} \cdot \Phi_p(\mathbf{x}_j)] \quad (7.18)$$

où la valeur des coefficients β_{ij} d'une part, et τ_i^{ij} et τ_j^{ij} d'autre part, ne dépend que de la géométrie des mailles partageant l'arête reliant les nœuds \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_j et de celle de leurs points de continuité (ce qui implique la connaissance de l'aire des faces du volume de contrôle), mais aussi des données de perméabilité définies respectivement sur ces mailles ou sur leurs nœuds. Comme on peut le voir, l'écoulement entre les volumes de contrôle centrés sur les nœuds \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_j est alors uniquement déterminé par la valeur de leur potentiel (d'où le nom : *approximation du flux à deux points, two-point flux approximation* en anglais, souvent abrégé TPFA). La grille d'écoulement est alors dite *orthogonale*, ou encore CVFD (pour *Control Volume Finite Difference*). Ceci limite certains problèmes de convergence pouvant apparaître avec un schéma MPFA ([Gunasekera 97], [Heinemann 94], [Mlacnik 03]).

Avec un schéma d'approximation du flux à deux points, l'écoulement total au travers le volume de contrôle $V(\mathbf{x}_i)$ est déterminé par $(n_a + 1)$ valeurs de potentiel différentes, avec n_a le nombre d'arêtes incidentes au nœud \mathbf{x}_i . Autrement dit :

- Pour un maillage primal structuré bidimensionnel à base de quadrilatères, le flux total au travers chaque volume de contrôle dépend de 4 valeurs de potentiel différentes.
- Pour un maillage primal non-structuré bidimensionnel à base de triangles, si l'on admet qu'en moyenne 6 arêtes sont incidentes à chaque nœud, le flux total au travers chaque volume de contrôle dépend de 7 valeurs de potentiel différentes.
- Pour un maillage primal structuré tridimensionnel à base d'hexaèdres, le flux total au travers chaque volume de contrôle dépend de 7 valeurs de potentiel différentes.
- Pour un maillage primal non-structuré tridimensionnel à base de tétraèdres, si l'on admet qu'en moyenne 20 arêtes sont incidentes à chaque nœud, le flux total au travers chaque volume de contrôle dépend de 21 valeurs de potentiel différentes.

Synthèse

Nous résumons ici les points importants de la phase de discrétisation de l'écoulement au sein des volumes de contrôle.

Une approximation du flux à plusieurs points (sur des grilles *non-orthogonales*, ou CVFE) est valide quelle que soit la forme sous lesquelles se présentent les données de perméabilité (tenseurs symétriques, asymétriques, scalaires, etc), pour des schémas *distribués par éléments* ou *par points* ([Verma 96], [Verma 97]). Cependant, cette technique de discrétisation alourdit la résolution des systèmes matriciels lors de la simulation ([Heinemann 94], [Castellini 00-(2)]).

Une approximation du flux à deux points (sur des grilles *k-orthogonales*, ou CVFD) peut être adoptée avec des schémas *distribués par éléments* ou *par points*, si la géométrie des volumes de contrôle satisfait des conditions précises :

- Si les données de perméabilité sont des scalaires (milieu isotrope), alors les faces des volumes de contrôle doivent être orthogonales aux arêtes du maillage primal auxquelles elles correspondent ([Heinemann 89], [Palagi 91], [Palagi 92], [Verma 96]). Pour cela, le dual de chaque maille du primal doit être le centre de sa sphère circonscrite (condition 7.13). Le maillage dual est alors dit PEBI [Heinemann 89], sous réserve que les centres des sphères circonscrites aux mailles soient situés à l'intérieur de ces mailles.
- Si les données de perméabilité sont des tenseurs symétriques (diagonaux, non-diagonaux), et le schéma *distribué par éléments*, le dual de chaque maille du primal doit être construit de manière à satisfaire la condition 7.14, ce qui produit un maillage dit G-PEBI ([Heinemann 88], [Heinemann 89], [Verma 96]). Là encore, ces points doivent être situés à l'intérieur des mailles du primal, ce qui est difficile à assurer avec de fortes anisotropies de perméabilité.
- Si les données de perméabilité sont des tenseurs uniformes et diagonaux, il est possible d'assurer une *k-orthogonalité* avec un schéma *distribué par éléments* ou *par points*, en générant les volumes de contrôle dans un espace où la perméabilité est isotrope, et donc où la condition 7.13 s'applique [Gunasekera 97]. Dans l'espace physique de départ, ceux-ci sont alors orientés selon l'ellipsoïde de perméabilité.
- Il est tout à fait envisageable d'appliquer une approximation du flux à plusieurs points aux mailles pour lesquelles il n'est pas possible d'assurer une *k-orthogonalité*.

Que le maillage primal soit structuré ou non-structuré, régulier ou irrégulier, une approximation du flux à deux points facilite la résolution des systèmes matriciels lors de la simulation, car dans tous les cas, le flux au niveau de chaque face d'un volume de contrôle ne dépend plus que de deux valeurs de potentiel. De plus, un schéma TPFA améliore la stabilité de la simulation d'écoulement ([Gunasekera 97], [Heinemann 94], [Mlacnik 03]). L'efficacité de cette technique de discrétisation est par ailleurs directement liée au nombre d'arêtes incidentes à chaque nœud du primal.

7.1.2 Améliorations de la performance des simulations

Paramètres influant sur la précision des simulations

Introduction

Nous voyons deux principaux paramètres pouvant conditionner la précision d'une simulation d'écoulement : d'une part le respect des interfaces du domaine d'étude, mais aussi la possibilité d'adapter les volumes de contrôle aux directions principales de l'écoulement, que ce soit en modifiant localement leur forme ou leur nombre.

Prise en compte des interfaces du domaine

Les interfaces du domaine, comme les failles et les horizons, ont une grande influence sur l'écoulement. Ils doivent donc être dans la mesure du possible représentés dans la grille d'écoulement par des unions de faces de volumes de contrôle. Ceci se fait d'une manière à la fois simple et précise avec des volumes de contrôle simpliciaux (voir chapitre 6.1). Le problème est en général beaucoup plus délicat avec des maillages structurés à base d'hexaèdres, même irréguliers [Souche 03], sauf s'ils sont *structurés par blocs* [Jenny 02]. Avec des volumes de contrôle obtenus par dual d'une tétraédrisation contrainte, des pré- ou post-traitements spécifiques sont nécessaires pour avoir une représentation correcte des interfaces dans la grille d'écoulement. Ce point sera abordé plus en détail dans la partie 7.2.

Orientation et nombre des volumes de contrôle

Il est reconnu que l'orientation des mailles a des conséquences importantes sur la précision des simulations ([Heinemann 89], [Palagi 91], [Palagi 92], [Verma 96], [Mlacnik 03]), en particulier avec de faibles hétérogénéités de perméabilité et de porosité [Verma 96]. Il est donc souhaitable qu'elle capture les principales directions supposées de l'écoulement.

Les puits sont des objets fondamentaux dans une simulation d'écoulement. D'une manière classique, on distingue les puits *injecteurs*, qui agissent comme un terme source dans l'équation 7.1, et les puits *producteurs*, qui tiennent lieu de puits de potentiel. Le traitement de ces objets est particulier. En effet, du fait de conditions imposées de pression ou de production, l'écoulement à proximité des puits suit des lois différentes de celles présentées auparavant. La mise au point de tels *modèles de puits* et leur intégration aux simulations dépasse très largement le cadre de notre travail ; des exemples en sont donnés dans [Heinemann 89], [Palagi 91], [Consonni 93], [Verma 96] ou encore [Wolfsteiner 02]. Quoiqu'il en soit, l'écoulement des fluides près des puits a une distribution strictement *radiale* par rapport à leur trajectoire. Par conséquent, l'utilisation de maillages structurés (à géométrie radiale) centrés sur les puits est une solution optimale. Cette solution a été proposée initialement dans [Pedrosa 85], puis reprise et validée dans de nombreuses publications comme [Palagi 91], [Consonni 93], [Heinemann 94], [Verma 97], [Gunasekera 97], [Jenny 02].

Loin des puits, dans les zones que l'on nomme *réservoir*, les directions préférentielles de l'écoulement sont a priori inconnues. Cependant, comme nous l'avons déjà évoqué au sujet des grilles SPP (*Streamline-Pressure-Potential Grids*), il est toujours envisageable, en préambule à la construction de la grille finale d'écoulement, de réaliser une première simulation très simple, à une seule phase, dans la totalité ou une partie du domaine, puis d'en extraire des ensembles lignes de courant et d'équipotentiels. Il est alors possible d'avoir une idée des directions principales de l'écoulement, et de pouvoir construire une grille en conséquence ([Edwards 98], [Castellini 00-(2)], [Mlacnik 03]). Si l'on juge le coût induit par cette première simulation trop important, la modélisation des zones *réservoir* reste problématique. Si l'écoulement y est considéré comme *linéaire*, une première solution consiste à utiliser un maillage structuré et régulier [Pedrosa 85]. Toutefois, l'expérience montre que l'utilisation de maillages non-structurés irréguliers, même plus grossiers, réduit de manière satisfaisante les effets d'orientation [Verma 96], surtout avec des volumes de contrôle polyédriques quelconques ([Heinemann 89], [Gunasekera 97]).

Par ailleurs, comme nous avons pu le voir dans le chapitre 6.2, d'une manière générale, il est relativement simple de faire varier localement la densité des nœuds dans un maillage de simplexes, dans les parties plus «exigeantes» du domaine, comme les zones de fortes anisotropies de perméabilité par exemple. Ceci peut se faire aussi avec des hexaèdres irréguliers [Castellini 00-(2)], mais dans une certaine mesure seulement, du fait du manque de flexibilité inhérent à la structure du maillage. L'utilisation de polyèdres quelconques rend la tâche plus aisée [Mlacnik 03].

Synthèse

Nous arrivons par conséquent aux conclusions suivantes :

1. Les interfaces du domaine d'étude (failles, horizons) sont représentés d'une manière à la fois souple et précise quand la grille d'écoulement est à la fois non-structurée et irrégulière. Des solutions existent cependant pour des grilles irrégulières mais structurées [Jenny 02].
2. La prise en compte des puits doit se faire par l'utilisation de volumes de contrôle structurés à base d'hexaèdres, dont la géométrie est radiale par rapport à la trajectoire des puits. Ceci capture de manière optimale la direction de l'écoulement dans cette partie du domaine d'étude.
3. Dans les zones *réservoir*, pour plus de précision, il est souhaitable d'avoir d'une part une idée des directions préférentielles de l'écoulement, et d'autre part de faire varier la densité du maillage dans certaines parties plus «exigeantes» du domaine, et de construire des volumes de contrôle en conséquence. L'utilisation de tétraèdres ou de polyèdres quelconques paraît alors plus appropriée.
4. Pour éviter les effets d'orientation dans les zones *réservoir*, il est préférable d'utiliser des maillages non-structurés, qui se comportent bien quelles que soient les distributions de perméabilité ([Heinemann 89], [Verma 96], [Gunasekera 97]).

Paramètres influant sur la rapidité et la robustesse des simulations

Le temps nécessaire à la réalisation d'une simulation d'écoulement est directement proportionnel au nombre de volumes de contrôle, et donc au nombre de nœuds du maillage primal. De plus, comme nous l'avons vu précédemment, avec une *approximation du flux à deux points* (maillage dual k -orthogonal, de type PEBI ou G-PEBI), le coût calcul induit par chaque volume de contrôle dépend avant tout de son nombre de faces. Ainsi :

- Les simplexes sont les volumes de contrôle qui ont le moins de faces possible (4 pour un tétraèdre). Cette approche a été suivie dans [Durlinsky 93] en dimension 2, et dans [Gunasekera 97] en dimension 3. Elle est à première vue optimale, mais le nombre total de volumes de contrôle reste relativement élevé dans la plupart de cas, même s'ils peuvent être regroupés sans trop perturber la k -orthogonalité ([Gunasekera 97], [Owen 99-(2)]). De plus, la présence de simplexes de forme dégénérée pose des problèmes importants, et rend le processus de simulation peu robuste.
- L'utilisation d'hexaèdres comme volumes de contrôle réduit aussi le nombre de faces (6 pour un hexaèdre). Les volumes de contrôle sont alors en général moins nombreux que dans le cas précédent.
- Le maillage dual d'une tétraédrisation produit des volumes de contrôle polyédriques quelconques, avec de nombreuses faces. Toutefois, ceux-ci sont en quantité moins importante que dans le cas de volumes de contrôle simpliciaux (un rapport de 1 à 5 est avancé dans [Gunasekera 97]). Par ailleurs, la présence de tétraèdres dégénérés dans le maillage primal (comme les cerfs-volants) n'altère pas la forme des volumes de contrôle [Gunasekera 97], ce qui est un gage de robustesse.

Discussion

Toutes ces informations, relatives à la précision, à la rapidité et à la robustesse des simulations, peuvent se résumer dans le tableau suivant :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
simplexes	×	× × ×	×	× × ×	× ×	× × ×
hexaèdres	× × ×	× ×	× × ×	×	×	×
polyèdres	× ×	×	× ×	× × ×	× × ×	× ×

où les colonnes correspondent, dans l'ordre, au nombre de volumes de contrôle (C_1), à leur nombre moyen de faces (C_2), à la présence éventuelle de volumes de contrôle dégénérés (C_3), à la possibilité de faire varier localement leur densité ou d'adapter leur distribution aux directions préférentielles de l'écoulement (C_4), à la présence d'effets d'orientation (C_5), et enfin à la prise en compte des interfaces (C_6). Un nombre de croix important (× × ×) indique par ailleurs un point bénéfique pour la simulation d'écoulement.

Nous considérons ainsi que dans les zones *réservoir*, les maillages non-structurés irréguliers constituent le meilleur compromis précision/rapidité. L'utilisation de volumes de contrôle simpliciaux limite la robustesse de la simulation, mais d'un autre côté, avec des volumes de contrôle polyédriques quelconques (obtenus par le dual d'une tétraédrisation), les interfaces sont représentés d'une manière moins naturelle. Dans les zones peu «exigeantes» du domaine d'étude, où la précision de la simulation n'est pas déterminante, la présence de volumes de contrôle structurés est par ailleurs susceptible d'augmenter sensiblement la rapidité du processus. À proximité des puits, le bénéfice de l'utilisation de maillages structurés et réguliers ne fait aucun doute.

7.2 Génération de maillages non-structurés et semi-structurés

Cette partie présente les méthodes que nous avons adoptées pour générer des maillages non-simpliciaux non-structurés et semi-structurés, que nous pensons adaptés aux simulations d'écoulement au regard des critères décrits dans la partie précédente (partie 7.1). Dans les deux cas, les volumes de contrôle seront polyédriques. Les avantages et les bénéfices de l'utilisation de ces maillages seront discutés à l'aide de quelques exemples.

7.2.1 Maillages non-simpliciaux complètement non-structurés

Principes de construction de maillages non-simpliciaux non-structurés

Les volumes de contrôle comme dual des sommets d'une tétraédrisation

Dans ce premier type de maillage, les volumes de contrôle constituent le maillage dual d'une tétraédrisation contrainte par les interfaces du domaine d'étude (voir partie 6.1), comme le montre la figure 7.7. Ils ont ainsi une forme polyédrique quelconque, avec toutefois la particularité de former un maillage où il existe 4 arêtes incidentes à chaque sommet, chaque tétraèdre possédant 4 faces. Leur nombre de faces est variable, et, comme nous l'avons vu dans la partie précédente (partie 7.1), il reste dans tous les cas important par rapport aux autres types de grilles envisagées pour des simulations d'écoulement : il n'est pas rare par exemple d'avoir des volumes de contrôle avec plus de 20 faces (voir figure 7.7(c)). Cependant, ces maillages sont de très bon supports aux simulations d'écoulement ([Verma 96], [Verma 97], [Gunasekera 97], [Hale 01], [Hale 02], [Mlacnik 03]), car ils sont gage à la fois de précision et de robustesse. Par ailleurs, l'utilisation d'un maillage simplicial comme primal permet d'adopter indifféremment un schéma *distribué par éléments* (perméabilités définies sur les tétraèdres) ou *par points* (perméabilités définies sur les nœuds de la tétraédrisation).

Topologie des volumes de contrôle

La construction des relations topologiques entre les cellules d'un tel maillage ne pose pas de problèmes particuliers. Conformément à la définition que nous avons donnée d'un maillage

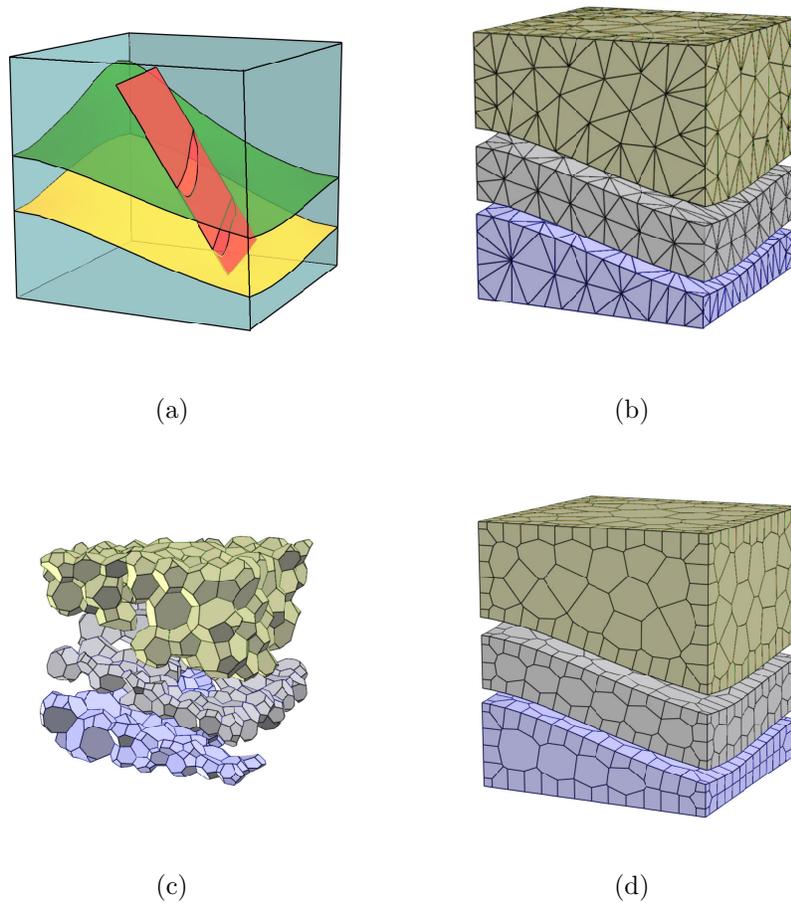


Figure 7.7 Principales étapes de construction d'un maillage non-simplicial non-structuré pour simulations d'écoulement (d'après [Grosse 02]). (a) : *Soft Frame Model* de départ. (b) : Résultat de la tétraédrisation du *Soft Frame Model*. (c) : Visualisation du maillage dual de la tétraédrisation, sans les volumes de contrôle non-bornés. (d) : Incorporation des contraintes dans la grille d'écoulement.

dual (voir partie 1.1), toute cellule de dimension p ($0 \leq p \leq 3$) de la tétraédrisation est en bijection avec une cellule de dimension $(3 - p)$ de la grille d'écoulement. Ainsi :

- Chaque tétraèdre correspond à un sommet d'un volume de contrôle. Rappelons que pour être valide, ce sommet doit être situé à *l'intérieur* du tétraèdre.
- Chaque arête de la tétraédrisation, incidente à n_t tétraèdres, correspond à une face d'un volume de contrôle à n_t sommets.
- Chaque face de la tétraédrisation correspond à une arête de la grille d'écoulement.
- Chaque nœud de la tétraédrisation, incident à n_a arêtes, correspond à un volume de contrôle à n_a faces.

Avec un modèle micro-topologique de type *G-Carte* (présenté dans la partie 1.3), la construction d'une topologie duale est particulièrement aisée et rapide. En effet, il suffit

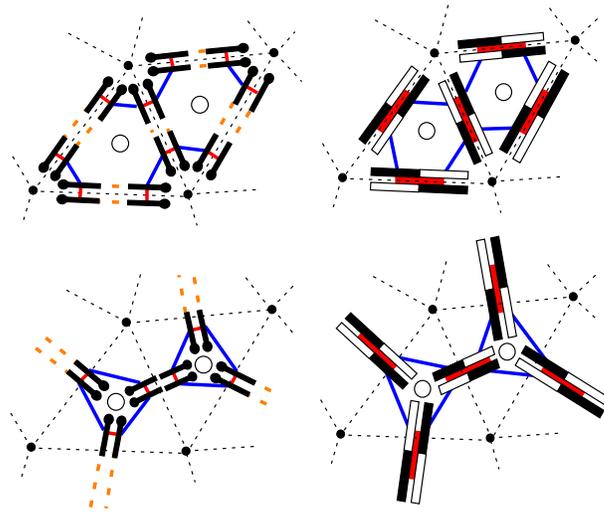


Figure 7.8 Calcul des relations topologiques duales avec un modèle de *G- Carte* (à gauche) et de *Carte* (à droite). Les voisinages de type α_0 sont en orange, ceux de type α_1 ou β_1 en bleu, et ceux de type α_2 ou β_2 en rouge (voir partie 1.1).

pour cela de *permuter* les involutions α_i ($0 \leq i \leq 3$) qui régissent les relations d'incidence dans ces modèles [Grosse 02]. Ainsi, le maillage dual a le même nombre de *brins* que le maillage primal (ceci est aussi vrai pour les *aimants* d'une *Carte*), et seules les relations entre ces éléments sont modifiées : deux brins liés par une relation de type α_0 , α_1 , α_2 ou α_3 dans le maillage primal deviennent liés respectivement par une relation de type α_3 , α_2 , α_1 ou α_0 dans le maillage dual (voir figure 7.8).

Cependant, quel que soit le modèle micro-topologique utilisé, les sommets, les arêtes et les faces situés sur le bord de la tétraédrisation génèrent dans le maillage dual des volumes de contrôle *ouverts*, avec des faces et des arêtes *non-bornées* [Boissonnat 95]. D'une manière plus générale, le dual des 0-, 1- et 2-simplexes *constraints* dans la tétraédrisation produit dans la grille d'écoulement des 3-, 2- et 1-cellules qui intersectent les simplexes de contrainte pour la tétraédrisation, comme le montre la figure 7.9. Or, il est souhaitable que les volumes de contrôle soient également *constraints* par ces mêmes simplexes ([Verma 96], [Verma 97]). Des traitements spécifiques sont donc nécessaires [Gunasekera 97].

Géométrie des volumes de contrôle

Deux problèmes principaux se posent en ce qui concerne la géométrie des volumes de contrôle : d'une part l'assurance d'une k -orthogonalité, et d'autre part le respect des interfaces du domaine d'étude, qui, comme nous venons de le voir, est logiquement cassé par l'opération de dualité (voir figure 7.9).

Faire en sorte que les conditions 7.13 (pour des perméabilités isotropes) ou 7.14 (pour des perméabilités anisotropes) soient assurées sur les faces des volumes de contrôle autorise l'emploi d'une *approximation du flux à deux points* (TPFA), et ainsi améliore à la fois la rapidité, la stabilité et la précision des simulations. Pour cela, la géométrie des

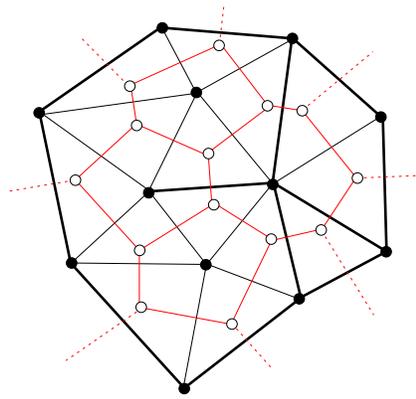


Figure 7.9 Logiquement, un maillage dual, quel qu'il soit (ici il est PEBI, avec des perméabilités isotropes donc), n'honore pas naturellement les contraintes du maillage primal, matérialisées par les arêtes noires plus épaisses.

sommets des volumes de contrôle est modifiée en conséquence. Toutefois, dans le cas de fortes anisotropies par exemple, la géométrie obtenue est parfois située à l'extérieur des mailles du primal, ce qui peut aboutir dans certains cas à des recouvrements entre volumes de contrôle, configurations qui ne sont pas acceptables pour réaliser les simulations ([Heinemann 89], [Verma 96], [Verma 97]), que le schéma adopté soit *distribué par éléments* ou *par points*. D'ailleurs, avec des perméabilités anisotropes, la propriété de Delaunay ou Contraint-Delaunay de la tétraédrisation n'est d'aucune utilité, car les sommets des volumes de contrôle n'ont alors rien à voir avec les centres des sphères circonscrites.

Même avec des perméabilités isotropes, ces configurations problématiques sont susceptibles de survenir. En effet, rien n'impose a priori qu'un tétraèdre contienne le centre de sa sphère circonscrite. Cette propriété n'est pas liée à la forme du tétraèdre :

- Des tétraèdres plats comme les *cerfs-volants* ou les *aiguilles* (à trois arêtes courtes) peuvent tout à fait contenir le centre de leur sphère circonscrite.
- Des tétraèdres résultant de la division d'un cube en 6, de forme pourtant satisfaisante, contiennent seulement le centre de leur sphère circonscrite sur leur bord.

Cependant, il est notable qu'une tétraédrisation de Delaunay ne peut nécessairement pas produire de recouvrements entre volumes de contrôle, puisque ceux-ci correspondent dans ce cas (ce n'est bien sûr vrai que dans le cas de perméabilités isotropes) aux *régions de Voronoï* associées aux sommets de la tétraédrisation (voir partie 4.1). Toutefois, la propriété de Delaunay n'assure pas non plus que les tétraèdres contiennent le centre de leur sphère circonscrite. Avec des perméabilités isotropes, une tétraédrisation de Delaunay ou Contraint-Delaunay n'est donc pas indispensable à la génération d'un maillage dual qui soit k -orthogonal, mais permet d'éviter en tout cas les recouvrements entre volumes de contrôle, ce qui est un avantage non-négligeable.

Par ailleurs, pour replacer les centres des sphères circonscrites à l'intérieur des mailles du primal, il est aussi possible de *lisser* la géométrie de ce dernier ([Heinemann 89],

[Gunasekera 97], [Grosse 02], [Mlacnik 03]), ou bien, avec un schéma *distribué par points*, de regrouper les ensembles de tétraèdres adjacents problématiques dont les centres des sphères circonscrites sont proches, ce qui perturbe la k -orthogonalité dans des proportions acceptables [Gunasekera 97].

Que les données de perméabilité soient isotropes ou anisotropes, si jamais le sommet d'un volume de contrôle ne peut être situé à l'intérieur du tétraèdre qui lui correspond, il est possible de le placer au barycentre de ce dernier, et d'appliquer une *approximation du flux à plusieurs points* (MPFA) aux faces des volumes de contrôle situées à l'intérieur de ce tétraèdre. Une autre solution est de continuer à utiliser une *approximation du flux à deux points* (TPFA) pour ces faces, mais avec une perte dommageable de précision.

Nous allons désormais considérer que chaque tétraèdre contient le sommet des volumes de contrôle qui lui correspond dans la grille d'écoulement. Deux techniques principales sont employées pour *contraindre* les faces des volumes de contrôle. La première, proposée dans [Verma 96], consiste à partir d'une tétraédrisation non-contrainte, à générer les volumes de contrôle, puis à déformer ces-derniers, en modifiant la géométrie de leurs sommets (*points de continuité* et centres des tétraèdres) de manière à les situer au niveau des intersections des arêtes et des faces de la tétraédrisation avec les simplexes de contrainte. Cette technique n'a été utilisée qu'en dimension 2, et nous pensons qu'elle résulte en une approximation très grossière des contraintes. Une autre technique, beaucoup plus répandue, et déclinée sous de nombreuses formes (une approche originale est présentée par exemple dans [Hale 01] et [Hale 02]), consiste à *dupliquer* les sommets des simplexes de contrainte ([Gunasekera 97], [Nullans 98]). Dans notre travail, nous avons opté pour une solution de ce type (voir figures 7.7, 7.10, 7.11 et 7.12), présentée dans [Lepage 02-(1)], [Lepage 02-(2)], et [Grosse 02], décrite ci-après.

Nous proposons de contraindre les volumes de contrôle par un post-traitement plutôt que par un pré-traitement. Plaçons-nous pour cela dans le contexte d'utilisation d'un *Soft Frame Model* (voir partie 3.2). Habituellement, les sommets situés à l'intérieur des triangulations matérialisant la géométrie des surfaces radiales, ceux situés à l'intérieur des lignes polygonales matérialisant la géométrie des lignes radiales, et ceux correspondant à la géométrie des nœuds radiaux sont dupliqués en un nombre suffisant d'exemplaires, de sorte que la tétraédrisation de Delaunay de ces nouvelles données crée un ensemble de tétraèdres plats en *cerf-volant* ou en *aiguille*, dont la sphère circonscrite a un rayon qui reste raisonnable, et dont le centre est donc susceptible d'être situé dans leur intérieur (voir figure 7.10, pour un analogue bidimensionnel). Ces tétraèdres constituent en quelque sorte une *enveloppe* autour des simplexes de contrainte pour la tétraédrisation. Si la géométrie des points dupliqués est suffisamment proche, le dual du maillage obtenu génère des volumes de contrôle dont les faces, arêtes et sommets approximent localement très bien les simplexes de contraintes initiaux. Cette solution fonctionne à première vue avec tout type de données [Nullans 98]. Cependant, les volumes de contrôle produits ont alors des faces d'aire très faible, et les flux au travers de celles-ci sont donc négligeables (indépendamment des valeurs de perméabilité et de potentiel). L'algorithme que nous proposons génère des volumes de contrôle identiques, c'est-à-dire avec les mêmes centres, mais sans ces faces

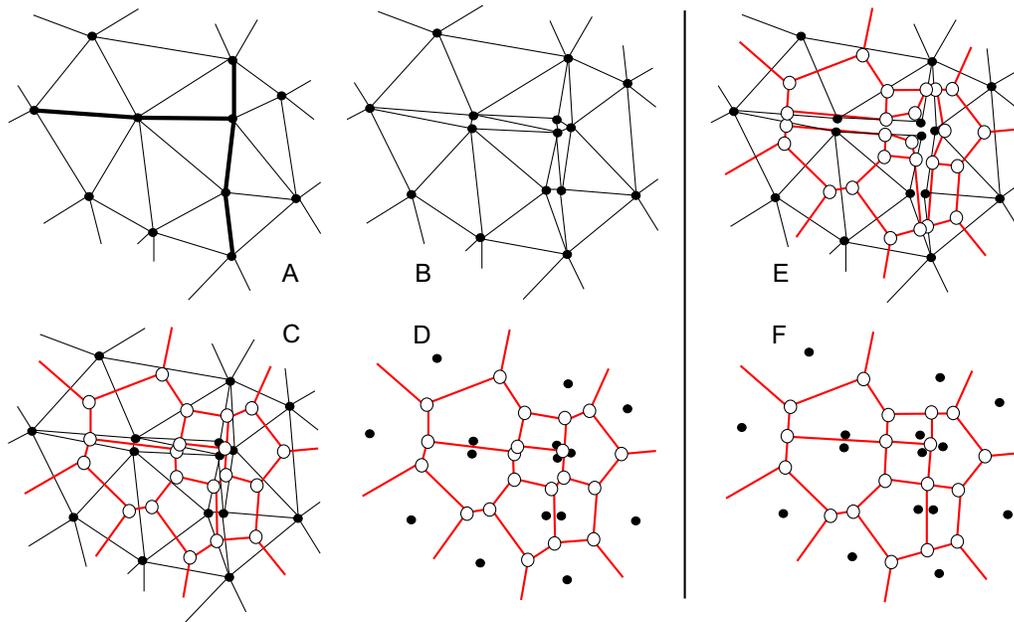
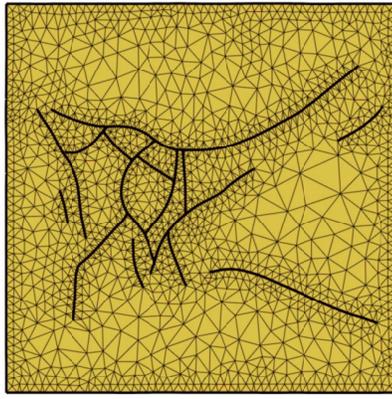


Figure 7.10 Les contraintes sur le maillage primal sont les arêtes noires plus épaisses (A). En général, les sommets de ces contraintes sont dupliqués et le nouvel ensemble de points est remaillé (B). Ensuite, le maillage dual est construit de manière classique (C, D). Un résultat quasi-identique est obtenu en dupliquant les points *après la tétraédrisation*, avec des post-traitements spécifiques (E, F). Ceci évite un remaillage, et génère des volumes de contrôle sans faces dégénérées.

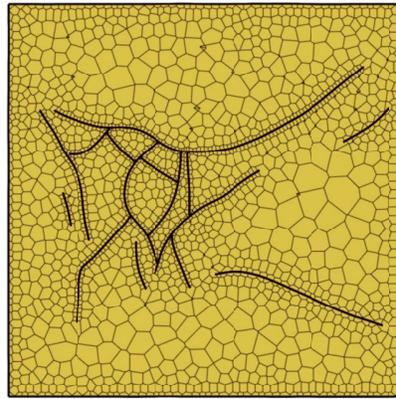
dégénérées (voir figures 7.7, 7.11 et 7.12) :

1. Contraindre la tétraédrisation d'une manière classique (voir partie 6.1).
2. Créer autant de bords internes que nécessaires dans la tétraédrisation, comme le montre la figure 7.10. Pour cela, nous utilisons l'algorithme très robuste employé précédemment pour la construction de modèles volumiques définis par frontières (voir partie 5.3), étendu à la dimension 3. Avec cette méthode, les points dupliqués peuvent tout à fait avoir une géométrie identique.
3. Construire les volumes de contrôle de manière classique, en ajoutant toutefois les milieux des arêtes contraintes, et les points correspondant aux nœuds radiaux incidents à plus de deux lignes radiales. Ces points peuvent éventuellement être *fusionnés* si l'on souhaite éviter d'avoir des bords internes dans la grille d'écoulement (voir figure 7.10).

Avec cette méthode, les contraintes sur le maillage primal sont mieux approximées (voir figures 7.7, 7.11(b), et 7.12), et les volumes de contrôle ont moins de faces qu'avec une méthode classique, ce qui est susceptible d'améliorer à la fois la performance et la rapidité des simulations, d'autant plus qu'une re-tétraédrisation est évitée. Le flux au travers les faces contraintes des volumes de contrôle peut être ensuite calculé de manière classique, selon un schéma d'approximation TPFA ou MPFA.



(a) Triangulation primale, dans le domaine paramétrique.



(b) Construction contrainte des polygones de contrôle (ici PEBI).

Figure 7.11 Un exemple bidimensionnel de prise en compte des contraintes dans le maillage dual (modèle TOTAL).

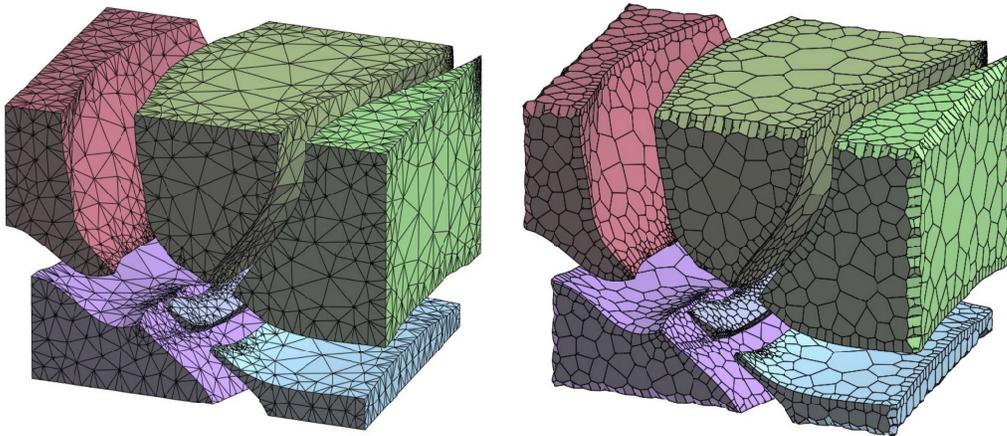
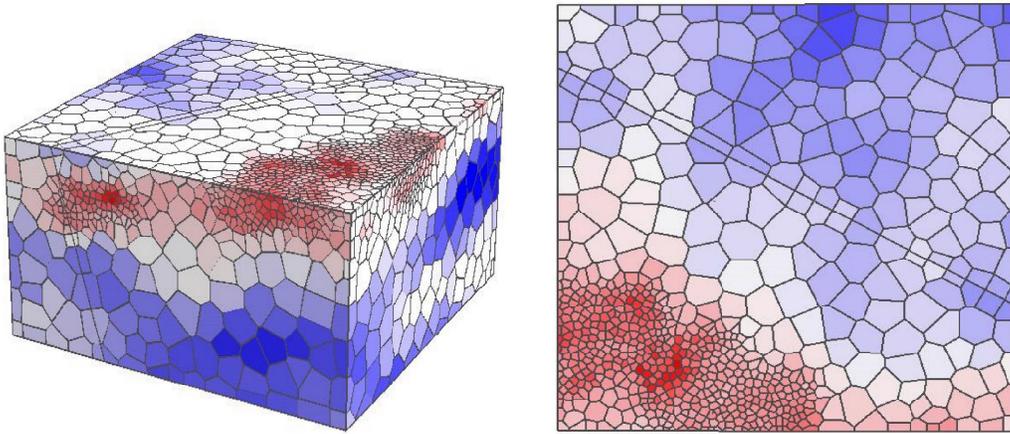


Figure 7.12 Un premier exemple tridimensionnel avec le modèle synthétique XINGU, montrant à gauche la tétraédrisation, et à droite le maillage obtenu par dual. Les nœuds et arêtes de contrainte situés sur les bords *externes* n'ont pas été pris en compte.

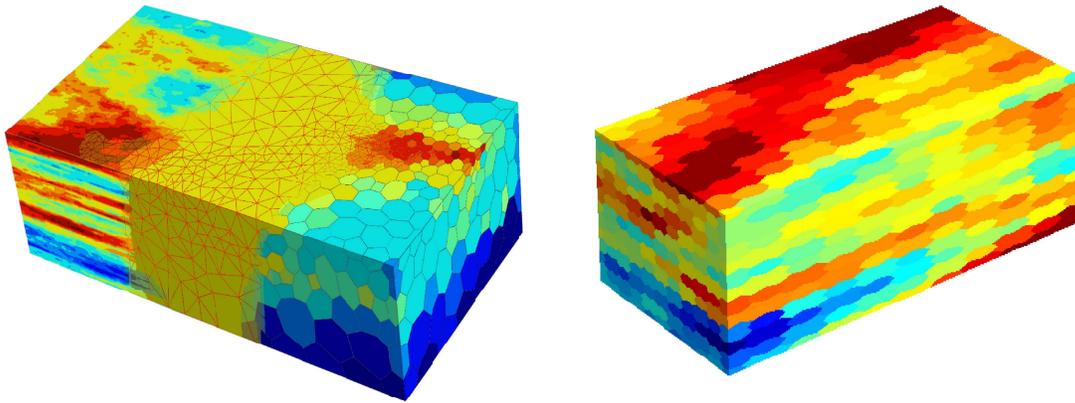
Application aux simulations d'écoulement et discussion

Exemples d'utilisation de maillages non-simpliciaux non-structurés

Nous donnons ici des exemples de grilles d'écoulement obtenues avec l'approche décrite précédemment, présentés dans [Grosse 02] et [Prévost 03]. Nous en profitons pour remercier M. Prévost, de l'Université de Stanford, et O. Grosse, pour leur collaboration fructueuse à notre travail (figure 7.13).



(a) Sur cet exemple, des raffinements locaux ont été réalisés pour apporter plus de précisions aux simulations. Une faille coupe le modèle de part en part (d'après [Prévost 03]).



(b) À gauche, superposition des données de perméabilité, du maillage primal, et de la grille d'écoulement. À droite, les volumes de contrôle ont été aplatis de manière à capturer les hétérogénéités de perméabilité (d'après [Prévost 03]).

Figure 7.13 Quelques exemples de maillages non-simpliciaux complètement non-structurés pour simulations d'écoulement.

Bénéfices et inconvénients de l'utilisation de ces maillages

Le principal inconvénient de l'utilisation de volumes de contrôle non-structurés et irréguliers est le manque de précision de la simulation à proximité des puits. En effet, les directions de l'écoulement dans ces zones sont moins bien capturées qu'avec des volumes de contrôle structurés à géométrie radiale. Cependant, raffiner la tétraédrisation (voir partie 6.2) dans un domaine centré autour des puits [Prévost 03], ou en fonction de la

distribution de lignes de courant [Mlacnik 03], permet localement d'améliorer la précision des résultats. Par ailleurs, comme nous avons pu le voir, la prise en compte des interfaces est beaucoup moins naturelle qu'avec des volumes de contrôle simpliciaux.

Cependant, ces grilles sont de bons supports pour les simulations d'écoulement, car les effets d'orientation sont réduits dans les zones *réservoir*, et les volumes de contrôle relativement peu nombreux. De plus, aucun d'entre eux n'est dégénéré. Il est également très facile de modifier la grille au cours du temps, car l'ajout de nouveaux points (autrement dits de nouveaux volumes de contrôle) est simple à réaliser dans la tétraédrisation.

7.2.2 Maillages non-simpliciaux semi-structurés

Procédé de construction de la grille d'écoulement

Dans ce deuxième type de grille pour simulations d'écoulement, les volumes de contrôle sont semi-structurés. Autrement dit, la topologie des volumes de contrôle est entièrement déterminée par une topologie bidimensionnelle entre des *polygones de contrôle* générés sur une surface de référence (un horizon du domaine d'étude par exemple). Ensuite, les volumes de contrôle sont *extrudés* selon des directions verticales variables pour former la grille finale, souvent qualifiée de 2,5D. Cette approche par *empilement* vertical de volumes de contrôle est proposée par exemple dans [Heinemann 94], [Gunasekera 97], [Balaven 00-(1)], [Balaven 00-(2)], [Lepage 01-(1)], [Balaven 02] ou encore [Grosse 03], et dans [Sampl 00] pour d'autres applications que celle qui nous concerne. La problématique de construction de ces grilles s'articule donc autour de deux points principaux : d'une part la construction des *polygones de contrôle* de référence, et d'autre part la détermination des directions verticales d'extrusion et la construction des volumes de contrôle.

Construction du maillage de référence

Cette étape est fondamentale dans la mesure où elle conditionne directement le nombre de faces des volumes de contrôle dans la grille finale. En effet, un polygone du maillage de référence à n_a arêtes servira de base à une *colonne* de volumes de contrôle à $(2 \times n_a)$ sommets, $(3 \times n_a)$ arêtes, et $(n_a + 2)$ faces. Plusieurs choix sont possibles :

1. Choisir $n_a = 4$. Ceci résulte en un maillage de référence à base de quadrilatères, produisant par extrusion des hexaèdres (à 6 faces donc). Cette solution ne nous semble pas la plus appropriée. D'une part parce qu'il est difficile de faire varier localement la densité des quadrilatères sur la surface de référence, mais aussi parce que les bords de cette surface ne sont alors en général pas bien approximés. De plus, comme nous l'avons vu, la grille d'écoulement finale peut être a priori sujette à des effets d'orientation ([Verma 96], [Gunasekera 97]).
2. Choisir $n_a = 3$. Ceci résulte en un maillage de référence à base de triangles, produisant par extrusion des polyèdres à 5 faces (qui sont appelés *wedges* en anglais), comme proposé dans [Khawaja 98]. Avec cette solution, les bords de la surface de référence sont parfaitement approximés et la densité des triangles peut être aisément modifiée localement pour capturer les directions supposées de l'écoulement



Figure 7.14 Un exemple de maillage de référence constitué de polygones quelconques obtenus par dual d'une triangulation de Delaunay (modèle TOTAL). Le maillage a été raffiné en fonction d'une propriété aléatoire définie sur une grille régulière très grossière (voir partie 5.2). Noter le respect des bords.

(voir partie 5.2). De plus, les volumes de contrôle produits par extrusion ont un nombre de faces quasi-optimal, et les effets d'orientation sont réduits.

3. Choisir un n_a quelconque en considérant les polygones produits par le dual d'une triangulation contrainte. Ceci résulte en des volumes de contrôle prismatiques, avec de nombreuses faces. Cette solution est pratiquement équivalente à la précédente, à la fois en termes de précision et de rapidité de la simulation. En effet, les volumes de contrôle produits ont certes plus de faces, mais sont moins nombreux. Les possibilités de raffinement sont identiques, l'approximation des bords de la surface de référence est bonne, et les effets d'orientation minimales (voir figures 7.14 et 7.15).
4. Choisir un n_a variable en produisant un maillage de référence *hybride*, constitué par exemple de triangles et de quadrilatères, de polygones et de quadrilatères, etc. Ceci génère par extrusion des volumes de contrôle localement hexaédriques ou prismatiques. Cette solution a été proposée initialement en dimension 2 dans [Pedrosa 85], et largement reprise depuis dans le domaine des grilles générées par extrusion.

Ainsi, les solutions numéro 2 et 3, que nous jugeons équivalentes, apparaissent dans tous les cas plus avantageuses que la solution numéro 1. La solution numéro 4 est jugée la plus *flexible*, car c'est la seule, parmi les quatre présentées ci-dessus, qui permette de prendre en compte véritablement les puits ([Gunasekera 97], [Balaven 00-(1)]), en introduisant des ensembles de polygones structurés à géométrie radiale, centrés au niveau de l'intersection de la trajectoire des puits avec la surface de référence. Toutefois, nous pensons qu'il existe un inconvénient majeur à cette approche, qui est que l'extrusion

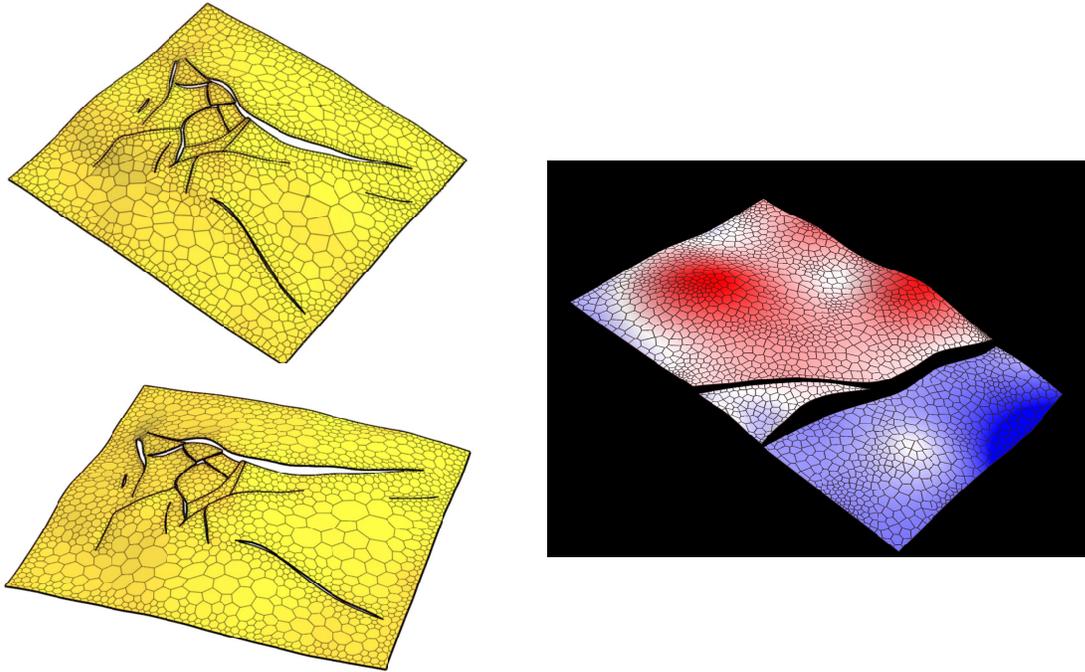


Figure 7.15 Construction d'un maillage de référence polygonal comme support d'une grille générée par extrusion (modèle TOTAL, à gauche). Les polygones de contrôle sont générés dans un espace paramétrique, par dual d'une triangulation de Delaunay (avec comme complément un lissage, en bas à gauche). Noter le respect des bords.

des volumes de contrôle devra ensuite être *contrainte* par ces trajectoires. Nous verrons plus tard pourquoi il est difficile de satisfaire cette condition dans le cas général. Dans notre travail, nous avons successivement réalisé les approches numéro 2 (présentée dans [Lepage 01-(1)]) et 3 (présentée dans [Grosse 03]), comme le montre la figure 7.15. Nous avons également proposé une solution de type numéro 4 (présentée également dans [Lepage 01-(1)]), visant à construire une grille d'écoulement *hybride*, où, conformément à l'approche décrite dans [Gunasekera 97], les bords de l'horizon de référence sont parfaitement approximés à l'aide de polygones (contrairement à celle suivie dans [Balaven 00-(1)] et [Balaven 00-(2)] par exemple). La figure 7.16 en donne une illustration.

Les procédés de construction d'un maillage à base de triangles pour représenter la géométrie d'une surface donnée ont été abordés en détail dans le chapitre 5. Nous y avons vu également les moyens permettant d'adapter la résolution du maillage. Des techniques pour générer le dual d'un maillage simplicial contraint ont été décrites précédemment dans le cas de tétraédrisations, mais elles sont tout à fait applicables aux triangulations (voir figure 7.15). Par conséquent, il ne nous reste plus qu'à nous focaliser sur la construction d'un maillage de référence *hybride*, à base de quadrilatères et de polygones quelconques (voir figure 7.16). L'algorithme que nous avons mis au point à cet effet (présenté dans [Lepage 01-(1)]), très simple, s'inspire des méthodes proposées dans [Palagi 91], [Verma 96], [Gunasekera 97], ou [Souche 00] :

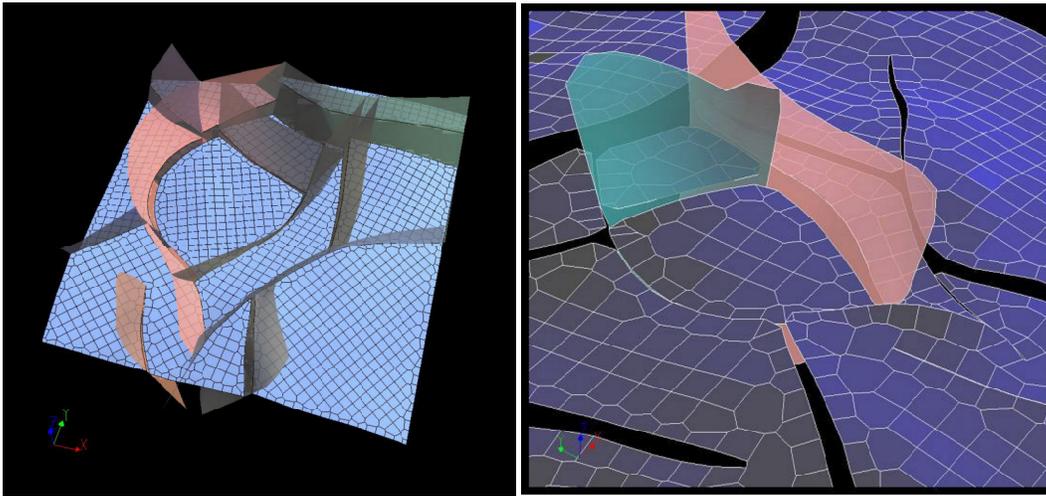


Figure 7.16 Un exemple de maillage de référence hybride, à base de quadrilatères et de polygones (modèle TOTAL). Noter la transition naturelle entre les deux types de mailles, et le respect des bords de la surface. Comme on peut le voir, l'orientation des mailles structurées est libre.

1. Générer un premier maillage de Delaunay ou Contraint-Delaunay (sans insertion de points internes) honorant les bords de la surface de référence, selon l'approche décrite dans la partie 5.1. Cette triangulation se fait dans le domaine paramétrique associé à cette surface (voir partie 4.2).
2. Insérer dans la triangulation une distribution régulière de points qui soient cocycliques (ou à peu près cocycliques) quatre à quatre, selon un motif radial, à proximité des puits. Les points n'appartenant pas au domaine paramétrique ne sont pas ajoutés. Au final, ces ensembles de points définissent dans l'espace paramétrique des *disques* (ou des *portions de disques* si jamais des points n'appartenaient pas au domaine paramétrique).
3. Insérer dans la triangulation une distribution régulière de points qui soient cocycliques (ou à peu près cocycliques) quatre à quatre. Les points n'appartenant pas au domaine paramétrique, où situés à l'intérieur d'un *disque* (ou d'une *portion de disque*), ne sont pas ajoutés.
4. Générer, dans l'espace paramétrique, le maillage dual et contraint de la triangulation, puis enlever les arêtes trop courtes des polygones ainsi obtenus. Une géométrie tridimensionnelle est ensuite assignée aux nœuds du maillage (voir figure 7.16).

Le maillage final honore parfaitement les frontières de la surface de référence et la transition entre les quadrilatères et les autres polygones se fait naturellement ([Forsyth 89], [Palagi 91]), comme le montre la figure 7.16. Cette approche est ainsi différente de celle choisie dans [Heinemann 94], [Balaven 00-(1)], [Balaven 00-(2)], ou encore [Balaven 02], où une triangulation *contrainte* n'est effectuée que localement, pour remplir des *cavités* générées par les intersections entre les mailles primales des zones de puits et des zones *réservoir*, intersections dont le coût calcul peut être pénalisant. Dans notre contexte, le

seul test nécessaire est celui de l'appartenance d'un point à tout ou une partie du domaine paramétrique. De plus, notre triangulation n'est contrainte que par les bords de la surface de référence. Ces différences seront discutées plus en détail dans la partie suivante (partie 7.3), dans l'espace tridimensionnel cette fois-ci.

Construction des volumes de contrôle par extrusion

Le calcul des directions verticales d'extrusion dépasse le cadre de notre travail. Les problématiques associées et des solutions originales s'y rapportant sont présentées par exemple dans [Souche 01], [Mallet 02], [Caumon 03-(1)], et [Souche 03]. D'une manière générale, nous pouvons considérer que ces directions sont des ensembles de lignes polygonales (des *fibres*) calculées de manière à ne pas recouper les failles du domaine d'étude, comme le montre la figure 7.17. Une fibre est tout d'abord extraite pour chacun des sommets des polygones constituant le maillage de référence. Ensuite, des points sont choisis sur ces fibres afin de déterminer la géométrie des volumes de contrôle.

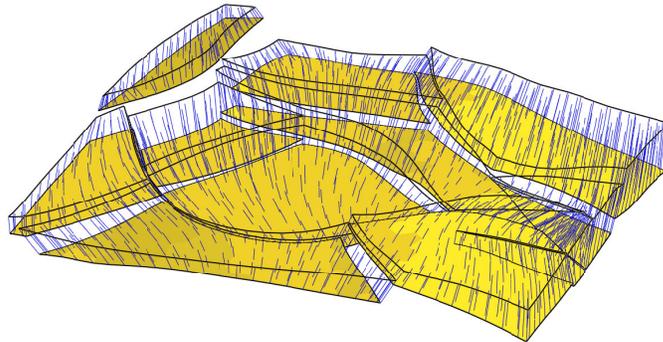


Figure 7.17 Un exemple de champ de fibres (modèle TOTAL). Noter que la direction des fibres suit localement les failles (d'après [Grosse 03]).

Un point très positif de cette méthode est de pouvoir honorer les données de la *stratigraphie*, autrement dit de contraindre l'*orientation* des volumes de contrôle pour que celle-ci reproduise les motifs de dépôt des couches sédimentaires du domaine d'étude. Deux principaux motifs sont envisageables :

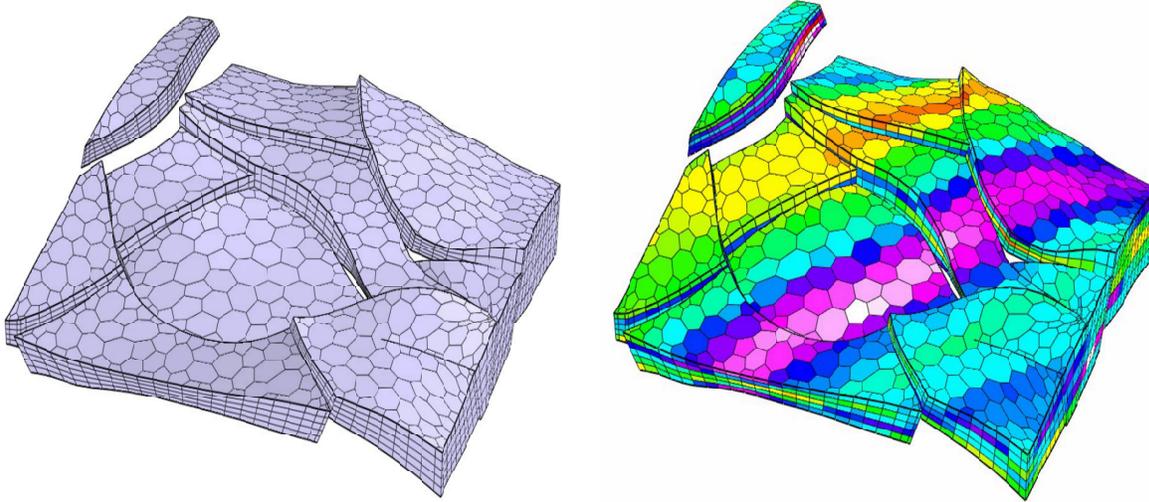
- Un motif dit *proportionnel*, où l'épaisseur des volumes de contrôle est localement proportionnelle à la distance à deux surfaces données (voir figure 7.18).
- Un motif dit *parallèle*, où les faces «supérieures» et «inférieures» des volumes de contrôle sont parallèles à une surface donnée.

L'orientation des volumes de contrôle est alors optimale, puisqu'elle capture les directions préférentielles de l'écoulement. Les effets d'orientation sont donc réduits, même avec des hexaèdres. Ceci n'est toutefois vrai que dans l'hypothèse où l'écoulement des fluides dans la zone *réservoir* est guidé par la stratigraphie.

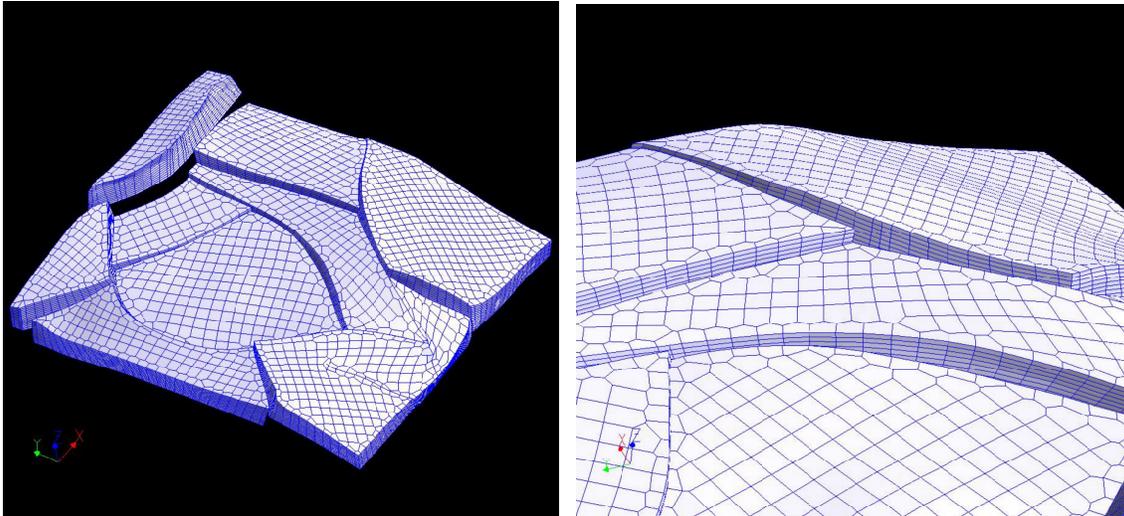
Résultats et commentaires

Quelques exemples de grilles d'écoulement générées par nos approches

La figure 7.18 donne quelques exemples de grilles d'écoulement générées par les techniques présentées précédemment. Les maillages de référence sont polygonaux ou hybrides.



(a) Un premier exemple, avec des volumes de contrôle prismatiques. À droite, une propriété de perméabilité a été affichée (schéma *distribué par points*).



(b) Un deuxième exemple, avec des volumes de contrôle hybrides. Noter que les faces des volumes de contrôle ne sont pas en correspondance de part et d'autre des failles.

Figure 7.18 Plusieurs exemples de grilles d'écoulement construites par extrusion d'un maillage de référence (modèle TOTAL).

Avantages et inconvénients des grilles extrudées

Le principal inconvénient de ces grilles d'écoulement est la difficulté de calcul des flux au niveau de faces des volumes de contrôle au contact d'une faille. En effet, du fait de l'extrusion, ces faces sont situées *sur le bord* de la grille, et ne sont pas *exactement* en correspondance avec une autre face d'un autre volume de contrôle situé de l'autre côté de la faille (voir figure 7.18(b)). Les solutions mises en œuvre pour garantir la précision et la robustesse de la simulation dans ces portions de la grille ne seront pas abordées ici.

Un autre inconvénient concerne les puits : si la trajectoire d'un puits intersecte tous les horizons du domaine d'étude, alors cette trajectoire doit être une direction d'extrusion pour les volumes de contrôle. Or, cette trajectoire ne peut pas nécessairement être considérée comme telle, surtout si elle recoupe les failles. D'un autre côté, si elle n'en recoupe qu'un, alors la géométrie des volumes de contrôle est modifiée en conséquence sur toute l'extension verticale de la grille, ce qui est source d'imprécision, car cette géométrie n'est plus radiale par rapport à la trajectoire du puits. L'approche par extrusion n'est donc valable que pour des puits plus ou moins verticaux, ne recoupant pas les failles, ou alors pour des puits horizontaux, mais sur une extension verticale faible, ce qui rend son utilisation très problématique avec des puits de trajectoire quelconque.

Cependant, ces grilles présentent des intérêts certains, ne serait-ce que la prise en compte de la stratigraphie, qui garantit une bonne précision des calculs dans les zones *réservoir*, et la minimisation des effets d'orientation. Retenons également la possibilité de générer facilement des grilles qui soient *hybrides*, où le nombre de faces des volumes de contrôle est localement réduit. Il faut aussi noter que ces grilles, comparativement aux précédentes, ne peuvent pas être facilement modifiées au cours du temps.

7.3 Maillages tridimensionnels modulaires hybrides

La partie précédente (partie 7.2) a montré comment, dans notre travail, nous avons procédé pour générer des maillages non-simpliciaux non-structurés et semi-structurés qui soient adaptés aux simulations d'écoulement. Chacun de ces deux types de grilles a ses avantages et ses inconvénients : le premier, où les volumes de contrôle sont polyédriques, présente l'avantage de pouvoir prendre en compte facilement les interfaces du domaine d'étude dans les calculs de flux et d'être facilement modifiable au cours du temps, mais offre peu de précision à proximité des puits ; le deuxième, où les volumes de contrôle sont *extrudés* et éventuellement *hybrides*, garantit une bonne capture des directions d'écoulement dans les zones *réservoir*, mais la prise en compte des interfaces reste problématique, tout comme celle des puits qui n'est pas satisfaisante dans le cas général (trajectoires déviées, recoupant les failles). Cette partie propose un procédé original (présenté dans [Lepage 03]) permettant de construire des grilles d'écoulement par une approche hybride véritablement tridimensionnelle. Comme nous allons le voir, celles-ci sont à la fois très flexibles et précises à proximité des puits et des zones *réservoir*, tout en offrant une prise en compte naturelle des interfaces.

7.3.1 Choix d'un procédé de construction de grilles modulaires

Qu'est-ce qu'une grille d'écoulement modulaire hybride ?

Définitions

Dans une grille dédiée aux simulations d'écoulement, un module peut être défini comme un ensemble connexe de volumes de contrôle ayant leur propre système local de coordonnées. Une grille d'écoulement *modulaire* est ainsi faite d'une collection de modules *qui ne s'intersectent pas*. Ces modules sont tous inclus dans une grille d'*arrière plan*, dont les volumes de contrôle sont de nature variable (hexaèdres, polyèdres), et qui englobe le domaine d'étude. Les grilles modulaires sont ainsi souvent qualifiées d'*hybrides*, du fait de la variabilité du nombre de faces des volumes de contrôle.

Principaux modules tridimensionnels envisageables

Les modules d'une grille modulaire sont construits de manière à améliorer *localement* la précision de la simulation, en capturant les directions préférentielles de l'écoulement ou en réduisant les effets d'orientation, ou sa rapidité, si leurs volumes de contrôle sont peu nombreux et/ou avec peu de faces. Ainsi :

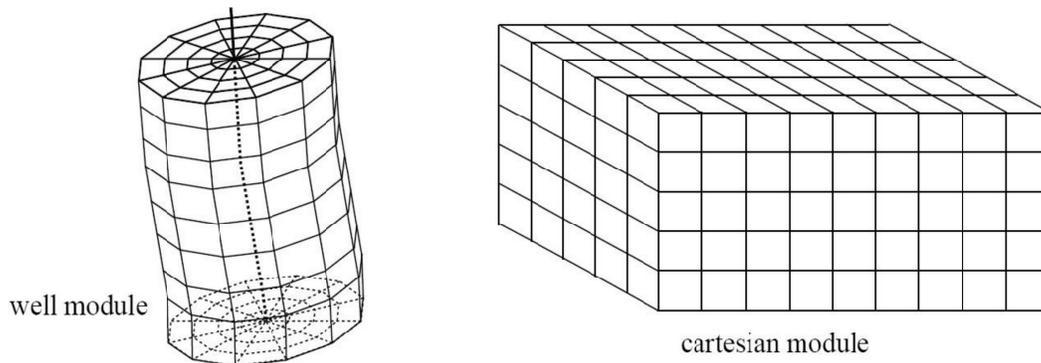


Figure 7.19 Un exemple schématique d'un module de puits (à gauche) et d'un module cartésien (à droite). Ces deux modules sont structurés.

- Les modules *de puits* sont des ensembles de volumes de contrôle structurés, dont la géométrie est radiale par rapport à la trajectoire des puits (voir figure 7.19). Ils sont donc caractérisés par les nombres n_r , n_θ et n_w de volumes de contrôle dans trois directions nommées respectivement *radiale*, *cylindrique* et *longitudinale* (voir figure 7.20), ainsi que par l'espacement d_r de leurs sommets selon la direction d_r (celui-ci est en général choisit comme une constante, mais une distribution logarithmique est souvent recommandée). Nous verrons par la suite que pour des trajectoires de puits quelconques, ces modules ne sont que *semi-réguliers* (voir partie 1.1).
- Les modules *cartésiens* sont des ensembles de volumes de contrôle structurés et réguliers (voir figure 7.19). Ils sont caractérisés par les nombres n_u , n_v et n_w de volumes de contrôle dans trois directions données d'une base orthonormale $(\mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ (d'origine \mathbf{o}), et par leur épaisseur d_u , d_v et d_w dans chacune de ces directions.

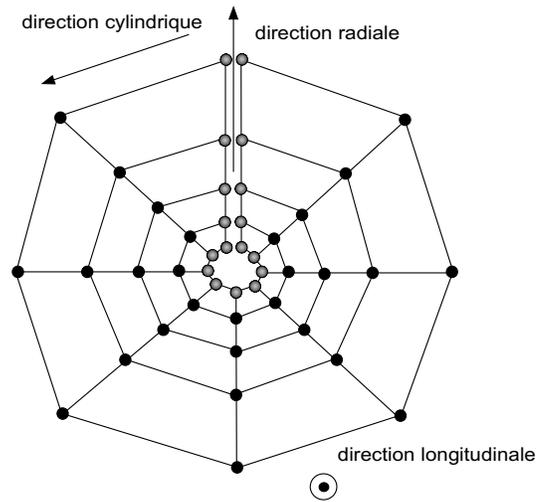


Figure 7.20 Vue d'une coupe longitudinale d'un module de puits (voir figure 7.19), avec $n_r = 4$ et $n_\theta = 8$. Avec notre approche, la topologie de ce module est rigoureusement identique à celle d'un module cartésien, c'est pourquoi des bords *fictifs* sont introduits (la géométrie des nœuds gris est partagée).

- Les modules *non-structurés* sont des ensembles connexes de volumes de contrôle non-structurés et irréguliers. Ils sont caractérisés par une tétraédrisation de leurs centres.

Ces trois modules sont classiquement proposés dans de nombreuses publications (voir par exemple [Verma 96], [Mlacnik 01]). Nous verrons par la suite pourquoi et comment nous avons été amenés à définir des modules plus originaux.

Présentation de notre approche

Principales techniques de génération de grilles modulaires

Il existe deux grandes approches, duales l'une de l'autre, pour construire des grilles modulaires tridimensionnelles :

1. Considérer l'ensemble des centres des volumes de contrôle de la grille d'arrière-plan, marquer comme *inactifs* ceux situés à l'intérieur des modules (c'est-à-dire à l'intérieur d'un de leurs volumes de contrôle), construire une tétraédrisation de cet ensemble de points auquel ont été ajoutés les centres des volumes de contrôle des modules, et générer la grille finale d'écoulement par un dual, comme énoncé dans [Verma 96] et [Gunasekera 97]. Cette approche a été introduite auparavant en dimension 2 dans [Palagi 91]. C'est celle que nous avons suivie pour générer les grilles hybrides par extrusion décrites dans la partie précédente, à l'instar de [Verma 96], [Gunasekera 97] et [Souche 00] (voir partie 7.2).
2. Raisonner sur les mailles primales de la grille d'arrière-plan, marquer comme *inactives* celles qui sont intersectées par les mailles primales des modules, construire

une tétraédrisation *contrainte* par le bord du primal des modules et celui du primal de la grille d'arrière-plan (de Delaunay ou Contraint-Delaunay), dite de *transition*, et générer la grille finale d'écoulement par un dual. Cette approche peut soit être utilisée en dimension 2 pour construire des grilles hybrides par extrusion ([Deimbacher 93], [Heinemann 94], [Balaven 00-(1)], [Balaven 00-(2)], [Balaven 02]), ou directement en dimension 3 ([Heinemann 94], [Mlacnik 01]).

Discussion

Ces deux approches sont tout à fait équivalentes du point de vue du résultat. Cependant, la première construit une tétraédrisation *non-contrainte* de tous les centres des volumes de contrôle, alors que la deuxième construit une tétraédrisation *contrainte* d'un ensemble limité de centres. Ceci est susceptible d'induire des différences de performance lors de la construction ou de la mise à jour de la grille modulaire. Nous pensons que ces différences sont minimales dans un espace bidimensionnel, c'est pourquoi nous avons employé une méthode de type numéro 1 pour générer des grilles hybrides par extrusion (voir partie 7.2). En revanche, nous pensons que ce n'est plus le cas pour des domaines tridimensionnels, et qu'une solution de type numéro 2 est plus optimale, à condition d'avoir un procédé de contrainte de la tétraédrisation qui soit rapide (différents procédés ont été proposés dans la partie 6.1).

Beaucoup de grilles modulaires construites par un procédé de type numéro 2 sont générées par extrusion (par exemple [Deimbacher 93], [Heinemann 94], [Balaven 00-(1)], [Balaven 00-(2)], [Balaven 02]). Dans notre travail, nous proposons de considérer des modules véritablement tridimensionnels. Ceci a déjà été réalisé dans [Heinemann 94] et [Mlacnik 01], mais avec comme contrainte que le rapport de taille entre les volumes de contrôle des bords des modules et ceux du bord de la grille d'arrière-plan soit proche de 1, sans mention du traitement des interfaces du domaine d'étude, et sous l'hypothèse que les modules ne s'intersectent pas initialement. L'approche originale que nous allons décrire par la suite, présentée dans [Lepage 03], autorise l'utilisation de volumes de contrôle de taille arbitraire, intègre parfaitement les interfaces dans la grille d'écoulement, et gère d'une manière souple les intersections entre modules.

Bénéfices de l'utilisation de grilles modulaires

L'intérêt de l'utilisation de modules est triple :

- La définition des modules est très souple, et la nature topologique et géométrique de leurs volumes de contrôle peut être choisie de manière à améliorer *localement* la performance de la simulation d'écoulement.
- Les flux aux niveau des faces des volumes de contrôle d'un module peuvent être calculés indépendamment du reste de la grille d'écoulement, d'une manière simple et rapide grâce à l'usage d'un système de coordonnées local. Les flux au niveau des bords du module servent alors de conditions aux limites pour les volumes de contrôle adjacents de la grille d'arrière-plan ([Deimbacher 93], [Heinemann 94]).

- Des modules peuvent être facilement retirés ou ajoutés au cours du temps, sans avoir à reconstruire toute la grille d'écoulement, ce qui est un gage de flexibilité. En effet, lorsqu'un module est retiré (respectivement ajouté), des éléments jusque-là marqués comme *inactifs* (respectivement *actifs*) deviennent *actifs* (respectivement *inactifs*), et la grille peut être mise à jour localement.

7.3.2 Génération d'un maillage primal de transition

Calcul de la géométrie des mailles primales des modules

Comme nous l'avons déjà précisé auparavant, nous avons choisi de construire la grille modulaire en marquant comme *inactives* les mailles primales de la grille d'arrière-plan qui sont intersectées par les mailles primales des modules. En préambule au calcul de ces intersections, il est donc nécessaire de déterminer la géométrie de toutes ces mailles. Ceci peut se faire module par module, sans considérer leurs éventuels recouvrements, que nous considérons comme envisageables dans notre approche. Une fois ces mailles primales définies, la géométrie des centres associés (correspondant aux sommets des volumes de contrôle) est déterminée en adéquation avec le schéma d'approximation du flux utilisé (TPFA ou MPFA).

Géométrie des mailles primales des modules non-structurés

Cette géométrie est donnée par la définition du module elle-même, et n'a donc pas besoin d'être calculée.

Géométrie des mailles primales des modules cartésiens

La détermination de la géométrie des mailles primales des modules *cartésiens* ne pose pas de réelles difficultés, car elle est entièrement déterminée par une base orthonormale. Elle ne nécessite donc pas d'être stockée explicitement. Cependant, les paramètres donnés (une base orthonormale $(\mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, des nombres (n_u, n_v, n_w) et des épaisseurs (d_u, d_v, d_w) de cellules) concernent les volumes de contrôle. Il est donc nécessaire de décaler l'origine \mathbf{o} de la base orthonormale les définissant d'une demi-épaisseur dans chacune des trois directions, et d'y rajouter une maille primale supplémentaire. Ainsi, le dual des mailles primales obtenues génère des volumes de contrôle qui satisfont les paramètres initiaux. L'origine \mathbf{o}' de la base orthonormale définissant la géométrie des mailles primales est donc définie par (équation 7.19) :

$$\mathbf{o}' = \mathbf{o} - \frac{d_u}{2} \cdot \mathbf{u} - \frac{d_v}{2} \cdot \mathbf{v} - \frac{d_w}{2} \cdot \mathbf{w} \quad (7.19)$$

Ensuite, la géométrie d'une maille primale d'indices (u, v, w) (avec $0 \leq u \leq n_u$, $0 \leq v \leq n_v$ et $0 \leq w \leq n_w$) est donnée par huit points dont les coordonnées n'ont pas besoin d'être stockées car elles suivent une définition implicite. Elles peuvent ainsi se calculer *à la volée*, de la manière suivante (équations 7.20) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \mathbf{o}' + u.d_u.\mathbf{u} + v.d_v.\mathbf{v} + w.d_w.\mathbf{w} \\
\mathbf{x}_2 &= \mathbf{o}' + (u + 1).d_u.\mathbf{u} + v.d_v.\mathbf{v} + w.d_w.\mathbf{w} \\
\mathbf{x}_3 &= \mathbf{o}' + (u + 1).d_u.\mathbf{u} + (v + 1).d_v.\mathbf{v} + w.d_w.\mathbf{w} \\
\mathbf{x}_4 &= \mathbf{o}' + u.d_u.\mathbf{u} + (v + 1).d_v.\mathbf{v} + w.d_w.\mathbf{w} \\
\mathbf{x}_5 &= \mathbf{o}' + u.d_u.\mathbf{u} + v.d_v.\mathbf{v} + (w + 1).d_w.\mathbf{w} \\
\mathbf{x}_6 &= \mathbf{o}' + (u + 1).d_u.\mathbf{u} + v.d_v.\mathbf{v} + (w + 1).d_w.\mathbf{w} \\
\mathbf{x}_7 &= \mathbf{o}' + (u + 1).d_u.\mathbf{u} + (v + 1).d_v.\mathbf{v} + (w + 1).d_w.\mathbf{w} \\
\mathbf{x}_8 &= \mathbf{o}' + u.d_u.\mathbf{u} + (v + 1).d_v.\mathbf{v} + (w + 1).d_w.\mathbf{w}
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Géométrie des mailles primales des modules de puits

Nous nous plaçons volontairement dans le cas d'une trajectoire de puits quelconque, représentée par une ligne polygonale. Outre cette trajectoire, les paramètres donnés sont le nombre de volumes de contrôle (n_r, n_θ, n_w) dans les directions radiale, cylindrique et longitudinale, et l'espacement d_r de leurs sommets dans la direction radiale. En règle générale, d_r n'est pas constant, c'est pourquoi nous allons poser $d_r = f(r + 1) - f(r)$, avec r un des indices (r, θ, w) d'un volume de contrôle ($0 \leq r < n_r$, $0 \leq \theta < n_\theta$ et $0 \leq w < n_w$), et f une fonction croissante donnée ($f(0) = 0$). En pratique, le module se confine à une portion plus ou moins grande de la trajectoire du puits.

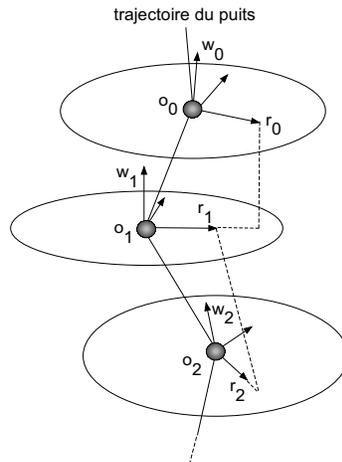


Figure 7.21 Principe de construction de la géométrie des mailles primales d'un module de puits.

Afin que la grille d'écoulement finale honore ces paramètres, il est nécessaire, comme pour les modules cartésiens, de rajouter une maille primaire supplémentaire dans la direction longitudinale. La géométrie de ces mailles ne peut pas être calculée à l'aide d'une seule base, du fait de la trajectoire quelconque du puits. Pour cette raison, un module de puits n'est que *semi-régulier*. Nous devons donc définir $(n_w + 2)$ bases $(\mathbf{o}_i, \mathbf{r}_i, \theta_i, \mathbf{w}_i)$, centrées sur cette trajectoire, où les sommets des mailles primales seront distribués d'une manière régulière ($0 \leq i \leq (n_w + 1)$). Pour éviter ensuite une *distorsion* trop importante

des mailles primales le long de la trajectoire, il faut limiter la rotation de ces bases. Nous proposons donc les solutions suivantes (voir figure 7.21) :

- Les origines \mathbf{o}_i ($1 \leq i \leq n_w$) sont situées sur la trajectoire du puits et espacées de manière constante. Ceci se fait facilement étant donnés la longueur de la trajectoire et le nombre de volumes de contrôle souhaités n_w . Toutefois, un traitement spécial doit être adopté pour les points \mathbf{o}_0 et \mathbf{o}_{n_w+1} , qui ne sont pas situés sur la trajectoire dans l'hypothèse où le module la couvre entièrement.
- Un vecteur \mathbf{w}_i est attaché à chacun des points \mathbf{o}_i ($0 \leq i \leq (n_w + 1)$), de manière à être globalement tangent localement à la trajectoire du puits.
- À partir d'un vecteur \mathbf{r}_i donné, le vecteur \mathbf{r}_{i+1} est obtenu par une *projection* de \mathbf{r}_i sur le plan $(\mathbf{o}_{i+1}, \mathbf{w}_{i+1})$, et une *renormalisation* du vecteur obtenu. Le troisième vecteur θ_{i+1} se calcule ensuite facilement à partir de \mathbf{r}_{i+1} et \mathbf{w}_{i+1} (ce vecteur nous est par ailleurs inutile).

Les $(n_w + 2)$ bases obtenues sont toutes orthonormales, centrées sur la trajectoire du puits, et présentent une rotation minimale de proche en proche. La géométrie d'une maille primaire d'indices (r, θ, w) (avec $1 \leq r < n_r$, $0 \leq \theta < n_\theta$ et $0 \leq w \leq n_w$) est alors donnée par huit points dont les coordonnées sont les suivantes (équations 7.21) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \mathbf{o}_w + f(r) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{o}_w, \mathbf{w}_w, \mathbf{r}_w, 2\theta\pi/n_\theta) \\
\mathbf{x}_2 &= \mathbf{o}_w + f(r) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{o}_w, \mathbf{w}_w, \mathbf{r}_w, 2 \cdot (\theta + 1) \cdot \pi/n_\theta) \\
\mathbf{x}_3 &= \mathbf{o}_w + f(r + 1) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{o}_w, \mathbf{w}_w, \mathbf{r}_w, 2 \cdot (\theta + 1) \cdot \pi/n_\theta) \\
\mathbf{x}_4 &= \mathbf{o}_w + f(r + 1) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{o}_w, \mathbf{w}_w, \mathbf{r}_w, 2\theta\pi/n_\theta) \\
\mathbf{x}_5 &= \mathbf{o}_{w+1} + f(r) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{o}_{w+1}, \mathbf{w}_{w+1}, \mathbf{r}_{w+1}, 2\theta\pi/n_\theta) \\
\mathbf{x}_6 &= \mathbf{o}_{w+1} + f(r) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{o}_{w+1}, \mathbf{w}_{w+1}, \mathbf{r}_{w+1}, 2 \cdot (\theta + 1) \cdot \pi/n_\theta) \\
\mathbf{x}_7 &= \mathbf{o}_{w+1} + f(r + 1) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{o}_{w+1}, \mathbf{w}_{w+1}, \mathbf{r}_{w+1}, 2 \cdot (\theta + 1) \cdot \pi/n_\theta) \\
\mathbf{x}_8 &= \mathbf{o}_{w+1} + f(r + 1) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{o}_{w+1}, \mathbf{w}_{w+1}, \mathbf{r}_{w+1}, 2\theta\pi/n_\theta)
\end{aligned} \tag{7.21}$$

où $\mathbf{rot}(\mathbf{o}, \mathbf{w}, \mathbf{r}, \theta)$ représente le vecteur normé obtenu par rotation de centre \mathbf{o} et d'angle θ (en radians) du vecteur \mathbf{r} , dans le plan (\mathbf{o}, \mathbf{w}) . Les équations 7.21 ne sont pas valables pour $r = 0$, car au centre du module de puits, les mailles primales sont des prismes à base triangulaire (appelés *wedges* en anglais). La géométrie d'une maille primaire d'indices $(0, \theta, w)$ (avec $0 \leq \theta < n_\theta$ et $0 \leq w \leq n_w$) est donc plutôt donnée par six points dont les coordonnées sont les suivantes (équations 7.22) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \mathbf{o}_w \\
\mathbf{x}_2 &= \mathbf{o}_w + f(1) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{o}_w, \mathbf{w}_w, \mathbf{r}_w, 2\theta\pi/n_\theta) \\
\mathbf{x}_3 &= \mathbf{o}_w + f(1) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{o}_w, \mathbf{w}_w, \mathbf{r}_w, 2 \cdot (\theta + 1) \cdot \pi/n_\theta) \\
\mathbf{x}_4 &= \mathbf{o}_{w+1} \\
\mathbf{x}_5 &= \mathbf{o}_{w+1} + f(1) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{o}_{w+1}, \mathbf{w}_{w+1}, \mathbf{r}_{w+1}, 2\theta\pi/n_\theta) \\
\mathbf{x}_6 &= \mathbf{o}_{w+1} + f(1) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{o}_{w+1}, \mathbf{w}_{w+1}, \mathbf{r}_{w+1}, 2 \cdot (\theta + 1) \cdot \pi/n_\theta)
\end{aligned} \tag{7.22}$$

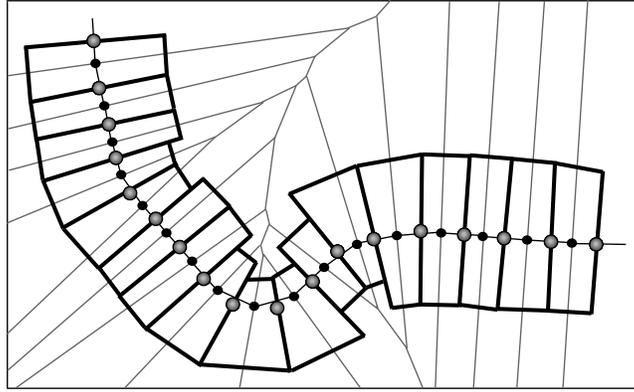


Figure 7.22 Sur cette figure, les nœuds gris représentent les sommets des mailles primales du module de puits situés sur la trajectoire du puits. Le diagramme de Voronoï de la ligne polygonale joignant les milieux de deux nœuds gris consécutifs est également dessiné. Les lignes noires plus épaisses représentent les plan dans lesquels sont distribués les sommets des mailles primales du module. Si tous ces nœuds demeurent dans la bonne région de Voronoï, alors il ne peut pas y avoir d'auto-intersection.

Les équations 7.21 et 7.22 ne suffisent pas toujours à décrire de manière satisfaisante la géométrie des mailles primales. En effet, si la courbure de la trajectoire des puits est localement assez prononcée, ces mailles peuvent s'intersecter, ce qui n'est pas concevable. Comme solution à ce problème, nous proposons un procédé original (présenté dans [Lepage 03]) qui consiste à ne conserver, parmi les sommets distribués dans le plan $(\mathbf{o}_i, \mathbf{w}_i)$ ($0 \leq i \leq (n_w + 1)$), que ceux qui appartiennent à la *région de Voronoï* associée au segment s_i d'une ligne polygonale obtenue en joignant les milieux des segments $(\mathbf{o}_{i-1}, \mathbf{o}_i)$ et $(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_{i+1})$ ($1 \leq i \leq n_w$). Les segments s_0 et s_{n_w+1} sont fixés arbitrairement. Si un sommet n'appartient pas à la bonne région de Voronoï, alors toutes les mailles primales basées sur ce sommet sont retirées du module de puits (voir figure 7.22, pour un analogue bidimensionnel). Nous avons pu vérifier en pratique que cette méthode fonctionne parfaitement, et évite les intersections entre les mailles quelles que soient les trajectoires des puits ou les paramètres des modules, pour un coût calcul tout à fait acceptable.

Gestion des interfaces du domaine d'étude

Avec notre approche, la grille modulaire n'est pas construite par extrusion. Afin que les faces des volumes de contrôle soient contraintes par les interfaces du domaine d'étude, nous avons choisi d'adopter une méthode similaire à celle employée dans la partie précédente (partie 7.2) pour les grilles d'écoulement non-simpliciales et non-structurées. Autrement dit, certaines mailles de la grille primale doivent être contraintes par les interfaces. Or, ces mailles primales appartiennent toutes à des modules divers (dont la géométrie n'est pas en rapport avec celle des interfaces), sauf celles générées par la tétraédrisation matérialisant la transition entre les modules et la grille d'arrière plan, qui est contrainte par le bord de mailles primales.

Ainsi, nous proposons la création d'un module *structural*, formé d'un ou plusieurs ensembles connexes de *triangles* matérialisant la géométrie des interfaces du domaine

d'étude [Lepage 03]. Ce module s'intègre dans la grille modulaire comme tous les autres : les mailles primales de la grille d'arrière-plan intersectées par ses *triangles* sont marquées comme *inactives*, et la tétraédrisation de transition est au final naturellement contrainte par les interfaces. Un *Soft Frame Model* (voir partie 3.2) est idéal pour représenter la géométrie des mailles primales de ce module. En effet, les maillages sont constitués de triangles de forme satisfaisante pouvant être facilement raffinés en taille (voir partie 5.2), et les contacts entre les horizons et les failles sont valides d'un point de vue à la fois géométrique et topologique. De plus, un *Soft Frame Model* peut être reconstruit à la demande, en prenant en compte n'importe quel nombre de surfaces (par exemple, des failles peuvent être ignorées), ce qui apporte encore plus de flexibilité au module structural.

Gestion des intersections entre modules

Position du problème

Nous considérons désormais que la géométrie de toutes les mailles primales des modules a été calculée. Elle est régulière pour les modules cartésiens, semi-régulière pour les modules de puits, et irrégulière pour les modules non-structurés et structuraux. Sauf pour ces derniers, en combinaison avec les données de perméabilité, un centre peut donc être associé à ces mailles, de manière à assurer une k -orthogonalité (approximation TPFA) ou non (approximation MPFA). Tous les modules *recouvrent* ainsi au moins partiellement les mailles primales de la grille d'arrière-plan. Dans notre approche, nous faisons de plus l'hypothèse que les mailles primales des modules peuvent également s'intersecter entre elles. Par exemple, un ou plusieurs modules de puits peuvent intersecter un ou plusieurs modules cartésiens, et un module structural peut intersecter un ou plusieurs modules de puits. Afin de garder une certaine cohérence, nous proposons donc de voir la grille d'arrière-plan comme un *module*, cartésien ou non-structuré. Nous avons donc finalement à disposition un ensemble de mailles primales susceptibles de se recouvrir mutuellement.

A priori, le calcul de ces intersections est à la fois délicat et coûteux en temps calcul. En effet, les mailles primales sont de nature variable (hexaèdres, tétraèdres, triangles), et leur position dans l'espace est quelconque. En particulier, nous devons pour cela avoir à disposition :

1. Un moyen de déterminer quelle est, parmi deux mailles primales de deux modules différents qui s'intersectent, celle qui doit être marquée comme *inactive*. Nous proposons de définir à cet effet une *hiérarchie* entre tous les modules de la grille d'écoulement. En d'autres termes, chaque module connaît une liste de modules qui lui sont *prioritaires*, et seules les mailles primales de ces modules peuvent rendre *inactive* une maille primaire de ce module. Ces priorités peuvent être modifiées à tout moment, toutefois, par définition, le module associé à la grille d'arrière-plan est toujours celui de priorité la plus faible.
2. Un moyen de marquer comme *inactives* une maille primaire d'un module m intersectée par au moins une maille primaire d'un module prioritaire à m . Pour les modules cartésiens et de puits, qui sont structurés, un *tableau de bits* convient tout à

fait. Pour les autres, qui sont non-structurés, des structures de données spécifiques doivent être mises en place (par exemple, une liste de pointeurs vers les mailles intersectées).

Afin d'accélérer le calcul des intersections entre les mailles primales, nous introduisons d'une part la notion de *frontière*, qui correspond à la surface constituée par l'union des faces de mailles primales *actives* situées sur le bord d'un module (les mailles primales des modules structuraux sont bidimensionnelles, la frontière de ces modules est donc exceptionnellement définie comme l'union de leurs mailles), et d'autre part la notion de *zone de protection*, qui est une région de l'espace tridimensionnel, d'extension variable, englobant la frontière d'un module [Lepage 03].

Algorithme de calcul des intersections

La frontière et la zone de protection de chaque module m sont dans un premier temps *discrétisées* dans une grille structurée et régulière G_m , de résolution que nous estimons suffisamment fine, et d'extension suffisamment grande, puis des régions correspondant respectivement à la *frontière*, à l'*extérieur* et à l'*intérieur* du module y sont définies. Notons qu'un module structural ne possède jamais d'intérieur, même s'il correspond à une surface fermée. Nous proposons finalement l'algorithme suivant pour calculer les intersections (présenté dans [Lepage 03]), illustré par la figure 7.23 :

1. Pour chaque module m de la grille d'écoulement, définir l'ensemble P_m de modules qui lui sont prioritaires.
2. Parcourir toutes les mailles primales de m . Si l'une d'elles *intersecte* au moins une *zone de protection* associée aux modules de P_m , alors celle-ci est marquée comme *inactive*, et sa frontière est mise à jour en conséquence (mais pas sa discrétisation dans G_m). Les calculs d'intersections sont précédés par les deux tests suivants :
 - Soit m' un module de P_m . Si pour tous les modules m' , le plus petit parallépipède rectangle aligné selon les axes de $G_{m'}$ englobant la maille primaire considérée n'intersecte pas $G_{m'}$, alors la maille primaire ne doit pas être marquée comme *inactive*.
 - Soit m' un module de P_m . Si pour tous les modules m' , aucune des cellules de $G_{m'}$ contenues dans le plus petit parallépipède rectangle aligné selon les axes de $G_{m'}$ englobant la maille primaire considérée n'est située à l'intérieur de la zone de protection de $G_{m'}$, alors la maille considérée ne doit pas être marquée comme *inactive*.

Les deux tests ci-dessus peuvent cependant suffire à eux seuls à déterminer les mailles primales de m devant être marquées comme *inactives* (s'ils sont tous les deux positifs), et c'est en pratique ce que nous supposons.

3. La frontière du module m a été entièrement mise à jour. L'algorithme repart alors à l'étape numéro 1. Notons que l'ordre avec lequel sont parcourus les modules n'a pas d'importance, quelles que soient les priorités définies entre eux, que ce soit au niveau du résultat ou de la rapidité de l'algorithme.

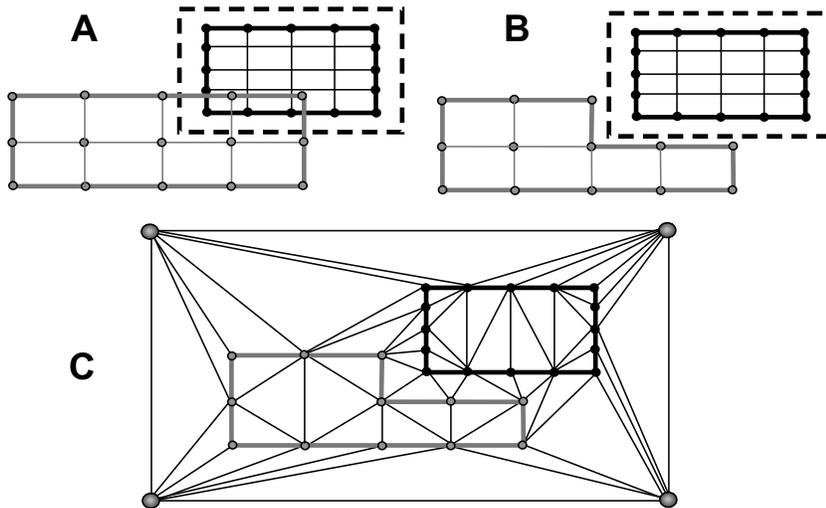


Figure 7.23 Illustration des intersections entre modules, sur l'exemple de deux modules cartésiens (cas bidimensionnel). Les frontières des modules sont matérialisées par les lignes plus épaisses. (A) Le module noir est prioritaire sur le gris, et sa zone de protection est représentée par la ligne en pointillés. (B) Deux cellules du module gris ont été marquées comme *inactives* car elles intersectent la zone de protection. (C) La frontière du module gris a été mise à jour. Les deux frontières ne se recoupent plus, et leurs sommets peuvent être ajoutés à une triangulation.

À la fin de cet algorithme, toutes les frontières des modules ont été mises à jour. Ce sont des ensembles de surfaces ouvertes ou fermées *qui ne s'intersectent pas*. Comme nous pouvons le voir, l'extension des zones de protection est le seul paramètre (avec la résolution des grilles G_m , dont nous ne discuterons pas) pouvant influencer sur le résultat final. Nous allons voir par la suite comment le définir d'une manière cohérente.

Génération et mise sous contrainte du maillage de transition

Comme énoncé auparavant, le maillage de transition entre les modules est une tétraédrisation des sommets des frontières des différents modules, *contrainte* par les faces constituant ces frontières (voir partie 6.1), comme le montre la figure 7.23. Toutefois, celles des modules cartésiens et des modules de puits sont faites d'union de quadrilatères, ce qui pose a priori un problème, une tétraédrisation ne pouvant être contrainte que par un ensemble de triangles. Une solution consiste à utiliser des *pyramides* pour assurer localement la transition entre les tétraèdres et les hexaèdres ([Owen 97], [Owen 99-(1)]), mais nous préférons simplement interpréter ces quadrilatères comme deux triangles de contrainte adjacents. Un point très important est que le processus de respect des contraintes dans la tétraédrisation ne doit en aucun cas insérer des points de Steiner au niveau des triangles de contrainte. En effet, ceci briserait la structure des modules de puits ou des modules cartésiens. En revanche, les ajouts de points de Steiner sont autorisés à l'intérieur du maillage de transition, mais dans une proportion raisonnable, afin de garder un nombre relativement faible de volumes de contrôle dans cette portion du domaine.

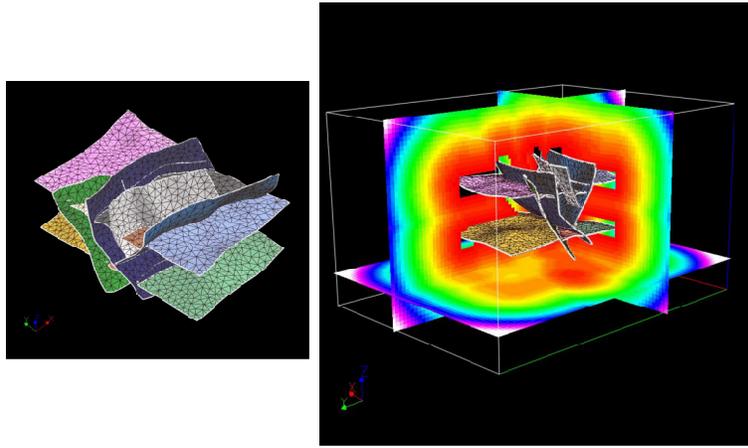


Figure 7.24 Visualisation d'un module structural (à gauche) et de sa zone de protection (à droite), sous la forme d'une propriété scalaire représentant la *distance* à la frontière du module. Seules les valeurs positives sont représentées. Comme on peut le voir, les distances nulles ne sont pas situées sur la frontière du module, car la distance a été décalée en fonction de la valeur des rayons des sphères circonscrites équatoriales aux triangles.

Proposition d'une première approche classique

Pour générer le maillage primal de transition, une solution simple consiste à construire une tétraédrisation Contraint-Delaunay (éventuellement Contraint-Delaunay Paresseux) honorant les triangles de contrainte, comme décrit dans la partie 6.1. Toutefois, ceci nécessite éventuellement l'ajout de points de Steiner internes, ce qui crée autant de nouveaux contrôles de volumes dans la grille d'écoulement finale.

Proposition d'une approche plus originale

Pour éviter à coup sûr l'ajout de points de Steiner internes, et donc la création de volumes de contrôle surnuméraires, il suffit d'assurer que tous les triangles de contrainte d'un module m sont de Delaunay (voir partie 4.1), par exemple en faisant en sorte que leur sphère circonscrite *équatoriale* (la plus petite) ne contienne d'autres sommets de la frontière d'un module m' (nous pourrions dire : que ces triangles soient *accrochés* par un sommet de la frontière d'un module m'). Or, dans notre contexte, le cas où $m \neq m'$ peut être très facilement évité. En effet, si la *zone de protection* du module m est construite de manière à contenir entièrement toutes les sphères circonscrites équatoriales aux faces de sa frontière, alors, au regard des algorithmes d'intersection décrits précédemment, il n'est plus possible qu'un sommet de la frontière d'un module m' différent de m soit situé à l'intérieur d'une sphère circonscrite équatoriale à un triangle de la frontière de m . Une telle zone de protection est facile à construire si elle est vue comme une *distance* à la frontière de m , décalée localement par la valeur des rayons des sphères circonscrites équatoriales à ses triangles (voir figure 7.24). Pour cela, nous avons utilisé dans notre travail les outils développés par D. Ledez, présentés dans [Ledez 03], visant à construire des cartes de distance dans des grilles structurées et régulières. L'algorithme que nous avons mis au point pour définir les zones de protection est le suivant [Lepage 03] :

1. Dans la grille structurée et régulière G_m attachée au module m , une propriété *distance* est tout d'abord créée. Elle est initialisée à $-\infty$ au niveau des éléments de G_m appartenant à la région intérieure du module m , et à $-r^2$ au niveau des éléments de G_m appartenant à la région frontière de m intersectés par un triangle de la frontière de m dont le rayon de la sphère circonscrite équatoriale vaut r . Si jamais plusieurs valeurs sont assignées à un même élément de G_m , une moyenne de ces valeurs est finalement assignée à l'élément.
2. La carte de distance est ensuite calculée par un algorithme de balayage, très robuste et très rapide, même si G_m est de résolution très fine. Les détails de ce calcul sont donnés dans [Ledez 03].
3. Au final, la propriété *distance* vaut 0 sur le bord de la zone de protection, est strictement positive à l'extérieur, et strictement négative à l'intérieur (là où est contenue la frontière du module m), comme le montre la figure 7.24. La zone de protection est donc définie comme une région où les valeurs de la propriété *distance* sont négatives ou nulles.

Cette technique, à la fois simple et rapide, garantit qu'aucun des sommets d'un module m' ($m' \neq m$) ne soit contenu dans une sphère circonscrite équatoriale à une face de la frontière de m . Nous avons pu vérifier son bon fonctionnement en pratique. En revanche, le cas où ces faces sont *accrochées* par un sommet de la frontière de m ($m' = m$) est plus complexe à traiter. Ces configurations, certes beaucoup plus rares que les précédentes, sont susceptibles d'arriver par exemple au niveau des angles faibles entre des faces adjacentes de la frontière d'un module structural, ou encore à proximité des zones de courbure de la trajectoire d'un puits. Nous proposons d'enlever les accrochages de la manière décrite ci-dessous, présentée dans [Lepage 03], et illustrée par la figure 7.25. À première vue, elle peut sembler *simpliste* ; nous en discuterons juste après.

1. Construire la tétraédrisation de l'ensemble des sommets des frontières des modules définis dans la grille.
2. Lorsqu'un triangle de contrainte appartenant à la frontière d'un module m est accroché par un sommet de cette même frontière (et donc lorsqu'il n'est pas présent dans la tétraédrisation), alors la maille primale incidente à ce triangle est marquée comme *inactive*, et la frontière de m est mise à jour en conséquence (mais pas sa discrétisation dans G_m). Sauf si m est un module structural, cette mise à jour peut faire apparaître de nouveaux sommets sur la frontière, et ceux-ci sont alors ajoutés à la tétraédrisation.
3. L'étape numéro 2 est répétée jusqu'à ce que toutes les faces de la frontière de m soient de Delaunay, et donc présentes naturellement dans la tétraédrisation.

Ce procédé, très rapide, ajoute certes des points au maillage de transition, ce qui induira *in fine* la création de volumes de contrôle supplémentaires. Toutefois, notons tout

²En pratique, ce sont les équivalents en *distance-pixel au carré* de ces rayons qui sont pris en compte dans le calcul de la carte de distance [Ledez 03].

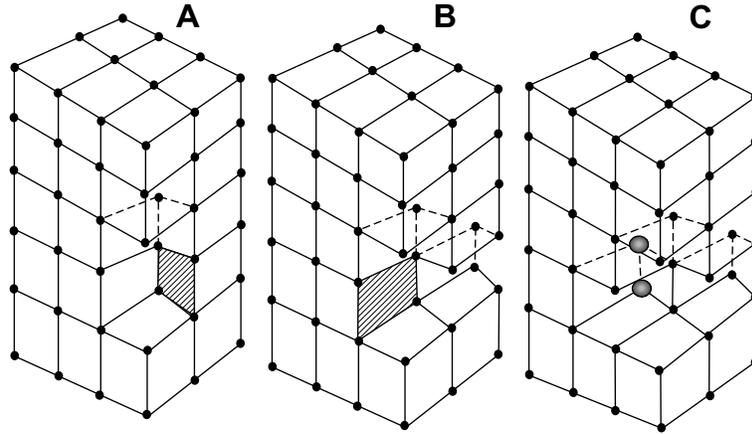


Figure 7.25 Une approche possible du respect des contraintes, sur l'exemple d'un module cartésien. Imaginons que les sommets de sa frontière (points noirs) fassent partie d'une tétraédration. (A) La face hachurée n'est pas présente dans la tétraédration sous la forme d'une union de deux faces de tétraèdres. (B) La maille primaire du module à laquelle appartient la face est marquée comme *inactive*, et la frontière du module est mise à jour. Une autre face est détectée comme absente de la tétraédration. (C) La maille correspondante a été marquée comme *inactive*. La frontière est mise à jour, mais cela implique cette fois-ci l'insertion de deux nouveaux points dans la tétraédration (points gris).

d'abord que ces points correspondent géométriquement à des sommets des mailles primales des modules (des points de Steiner internes possèdent au contraire une géométrie quelconque). Leur position est donc cohérente avec les directions préférentielles de l'écoulement, ce qui garantit de réduire les effets d'orientation dans les futures zones de transition entre modules. De plus, nous avons pu vérifier qu'en pratique, le nombre de mailles primales marquées comme *inactives* lors de ce processus reste en général très faible [Lepage 03]. Utilisée avec des modules structuraux, cette méthode produit des volumes de contrôle qui localement intersectent les interfaces du domaine d'étude (au niveau des triangles marqués comme *inactifs*). Or, du point de vue strictement de la performance de la simulation, ceci est peut être préférable à une grille dont les volumes de contrôle honorerait les interfaces, mais seraient beaucoup plus nombreux, surtout si ces interfaces conditionnent peu les écoulements.

Cette méthode de contrainte peut toutefois être jugée comme inefficace. Dans ce cas, un classique procédé de satisfaction des contraintes, produisant une tétraédration de transition Contraint-Delaunay ou Contraint-Delaunay Paresseux, peut alors être adopté. Avec une construction adéquate des zones de protection (décrite précédemment), les modifications topologiques locales et les insertions de points de Steiner internes utilisées pour satisfaire les contraintes seront très limitées.

Prise en compte de forts contrastes de taille entre volumes de contrôle

La tétraédration de transition obtenue au final est contrainte par les faces des frontières des différents modules, mais ses mailles ne sont pas nécessairement satisfaisantes du point de vue de leur forme ou de leur résolution, surtout si de forts contrastes de taille existent

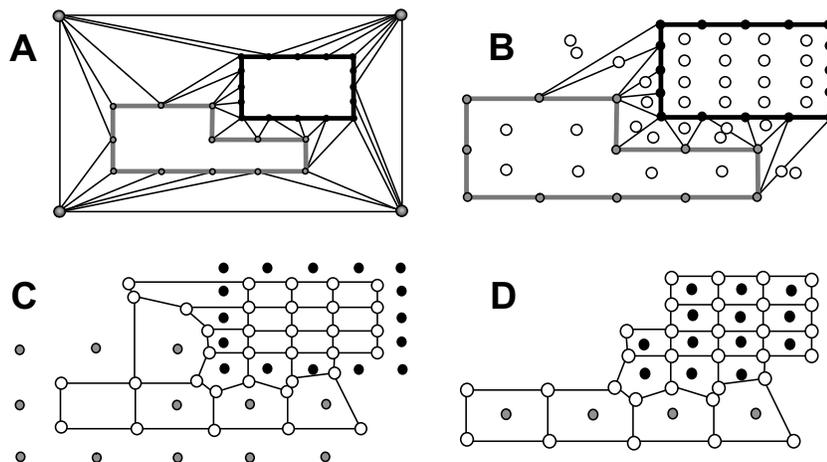


Figure 7.26 Analogie bidimensionnelle du principe de génération des volumes de contrôle. Imaginons deux modules cartésiens dont les sommets des frontières font parties d'une triangulation. (A) Les triangles situés à l'intérieur des modules sont retirés. (B) Calcul des centres des mailles primales (points blancs). Ceux attachés aux triangles *artificiels* ou localisés à l'extérieur d'un domaine d'intérêt sont écartés. (C) Création des volumes de contrôle. (D) Maillage modulaire hybride final. Il est encore possible de retirer quelques volumes de contrôle pour améliorer l'aspect de la grille.

initialement au sein des volumes de contrôle des modules. Ceci est susceptible de produire dans les zones de transition des volumes de contrôle de forme indésirable, allongés. Que le schéma adopté soit *distribué par éléments* ou *par points* (voir partie 7.1), les valeurs de perméabilité associées risquent alors d'être peu représentatives. Comme solution à ce problème, nous proposons de *raffiner* la tétraédrisation de transition en insérant de nouveaux points tout en préservant les contraintes (voir partie 6.2), mais en gardant à l'esprit que cela augmente d'autant le nombre de volumes de contrôle, et diminue ainsi proportionnellement la rapidité de la simulation.

7.3.3 Construction de la grille finale d'écoulement

Calcul du maillage dual

Pré-traitements de la tétraédrisation de transition

La génération des volumes de contrôle ne pose pas de véritables difficultés (voir figure 7.26). En préambule à cette dernière étape, des centres sont associés aux mailles primales *actives* des modules (qui ne sont pas de modules structuraux) et aux tétraèdres des zones de transition. Ensuite, les tétraèdres situés à l'intérieur des modules sont retirés, tout comme les éventuels *cerfs-volants* situés au contact des faces quadrilatérales de la frontière des modules de puits et cartésiens. Ceux-ci sont situés sur le bord de la tétraédrisation, leur élimination ne pose donc aucun problème. D'une manière générale, nous définissons un *volume d'intérêt* (le module correspondant à la grille d'arrière-plan par exemple) et retirons également du maillage de transition tous les tétraèdres dont les centres n'y sont pas contenus.

Construction des volumes de contrôle

Tout d'abord, les volumes de contrôle dont tous les sommets sont des centres de mailles primales *actives* sont générés. Les volumes de contrôle restant à construire sont tous situés dans les zones de transition. Nous allons nous focaliser sur la construction des faces de ces-derniers, duales d'une arête de la tétraédrisation de transition :

- Si cette arête n'est pas située sur le bord de la tétraédrisation, le calcul de la face correspondante reste simple, car elle lie tous les centres associés aux tétraèdres incidents à l'arête.
- Dans le cas contraire, la face est constituée d'une part des centres associés aux tétraèdres incidents, mais aussi des centres associés aux mailles primales partageant cette arête. D'un point de vue géométrique, quelques-unes des faces obtenues peuvent être dégénérées, du fait de la présence, à proximité des modules structurés, d'ensembles de points sub-cosphériques dans la tétraédrisation. Ainsi, un post-traitement est nécessaire pour éliminer ces faces dans les volumes de contrôle.

Enfin, les mailles primales *actives* des modules structuraux sont discrétisés dans les volumes de contrôle, selon la technique que nous avons présenté précédemment (voir partie 7.2), ce qui permet d'approximer parfaitement les interfaces du domaine d'étude dans la grille d'écoulement finale.

Prise en compte des données stratigraphiques

Afin que les volumes de contrôle de la grille modulaire capturent de manière plus efficace les directions préférentielles de l'écoulement, il est souhaitable qu'ils soient *orientés* de manière à reproduire les motifs de dépôt des couches sédimentaires du domaine d'étude (dans l'hypothèse toutefois où cette *stratigraphie* influence de manière prépondérante les écoulements). Ceci est relativement facile à réaliser au sein des grilles construites par extrusion présentées dans la partie précédente (voir partie 7.2), mais ce n'est plus le cas dans une approche totalement tridimensionnelle comme la nôtre. Cependant, dans l'hypothèse où une *paramétrisation tridimensionnelle* du domaine d'étude (similaire aux paramétrisations que nous avons présentées pour les surfaces dans la partie 4.1) existe, par exemple sur les sommets d'une tétraédrisation de résolution suffisante, nous pouvons imaginer le procédé de construction suivant :

1. Placer les *objets géologiques* du domaine d'étude, comme les surfaces d'un *Soft Frame Model* et les puits, dans le domaine paramétrique. Les puits qui recoupent les failles dans l'espace tridimensionnel *physique* se retrouvent divisés en plusieurs segments.
2. Générer les mailles primales des modules dans l'espace paramétrique, puis la tétraédrisation de transition, selon les techniques présentées auparavant. Il est pour cela impératif que les modules structuraux soient de plus forte priorité. Construire ensuite les volumes de contrôle en respectant les interfaces.
3. Assigner finalement une géométrie tridimensionnelle *physique* aux volumes de contrôle. La grille d'écoulement obtenue reproduit alors la stratigraphie.

Dans notre travail, nous n'avons malheureusement pas pu réaliser cet algorithme, qui nous semble pourtant prometteur. Les détails de calcul d'une paramétrisation tridimensionnelle correcte sont donnés dans [Souche 03]. Notons que cette méthode est en tout point similaire à celle employée dans le chapitre 5 pour remailler des surfaces : ici, nous remaillons un volume en le plongeant dans un domaine paramétrique.

Quelques résultats

La figure 7.27 suivante montre un exemple de grille modulaire hybride tridimensionnelle générée avec notre approche.

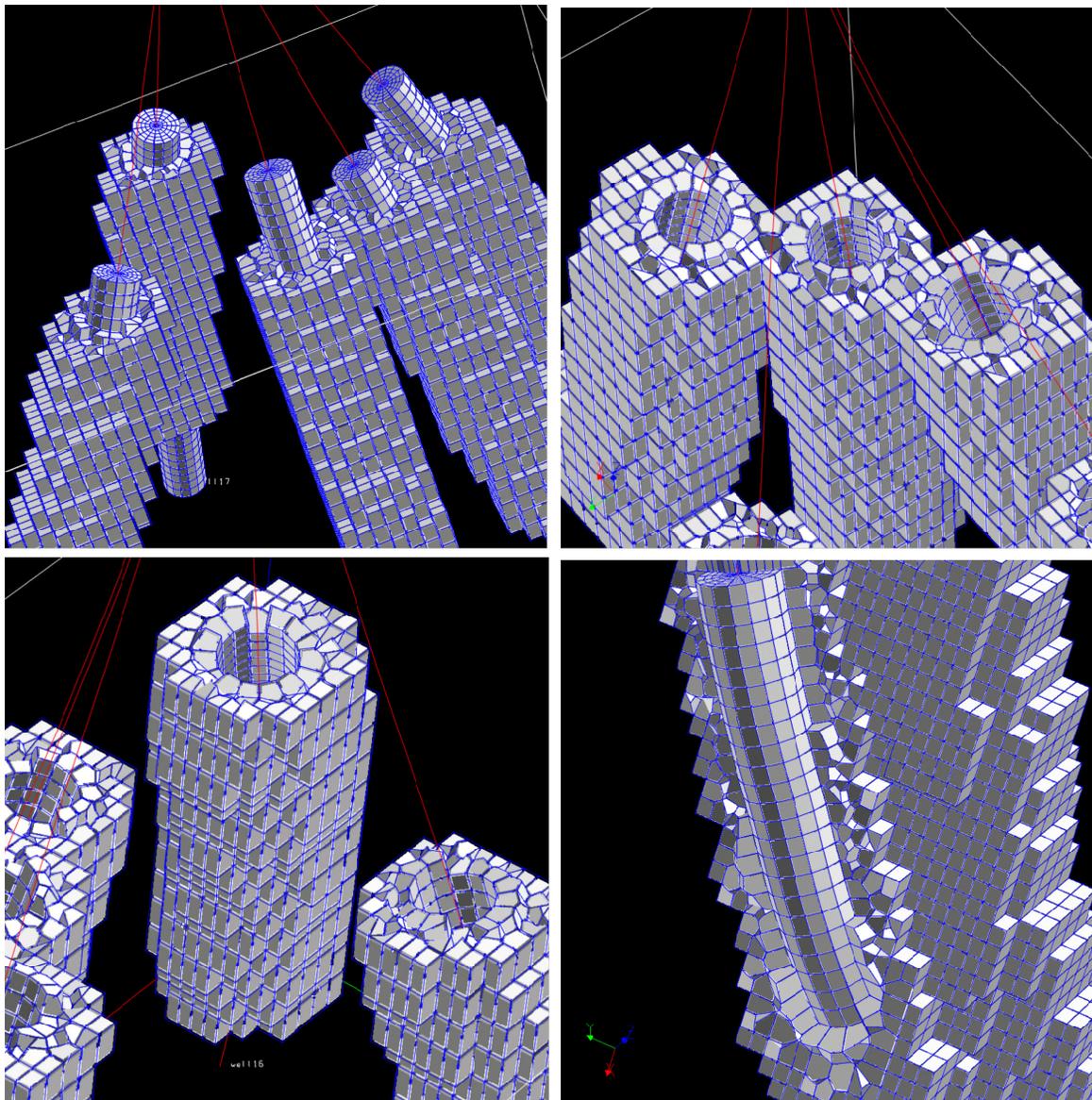


Figure 7.27 Exemple de maillage modulaire hybride PEBI, avec cinq modules de puits et un module cartésien d'arrière-plan. Les volumes de contrôle du maillage cartésien ne sont pas affichés pour une meilleure visualisation du maillage de transition.

Synthèse

Dans cette troisième et dernière partie, nous avons détaillé la manière avec laquelle nous procédons pour générer des maillages volumiques variés et compatibles avec les méthodes numériques classiquement utilisées pour simuler les processus physiques en géosciences.

Tout d'abord, nous avons mis au point des algorithmes permettant de construire des *tétraédrisations contraintes* qui soient les plus grossières possibles (autrement dit avec un minimum de points internes), mais où une qualité de forme des tétraèdres est cependant garantie dans une grande portion du domaine d'étude. Nous avons également pu vérifier en pratique que l'application de post-traitements spécifiques, comme les séquences de *bascullements d'arêtes*, permettent d'améliorer sensiblement la forme des mailles, notamment à proximité des interfaces. Grâce à une approche similaire à celle suivie pour les triangulations (voir partie II), nous avons de plus proposé un mécanisme de *contrôle précis de la taille des tétraèdres* dans le maillage. Enfin, les tétraédrisations obtenues ont montré leur validité au travers de plusieurs applications, comme des études de déformation des couches du sous-sol, ou des simulations du comportement thermique de domaines tridimensionnels.

D'autre part, dans le contexte particulier des simulations d'écoulement de fluides dans les milieux tridimensionnels poreux, perméables, hétérogènes et anisotropes du sous-sol, nous avons réalisé plusieurs procédés de génération de maillages non-simpliciaux. En premier, nous avons vu comment il est possible de construire des *grilles d'écoulement polyédriques* à partir de tétraédrisations, et proposé à cet effet un moyen de contraindre ses mailles par les interfaces du domaine d'étude, ou encore de les adapter aux exigences des simulations d'écoulement. Ensuite, nous avons abordé le problème de la construction par extrusion de *grilles d'écoulement semi-structurées*, et cerné leurs limites. Finalement, nous avons mis en place une approche originale, car véritablement tridimensionnelle, de génération de *grilles d'écoulement modulaires hybrides*, particulièrement flexibles, et tout à fait compatibles avec les prérequis inhérents aux simulations d'écoulement.

Conclusion

La motivation principale de ce travail était la génération de maillages volumiques de qualité pour constituer des modèles valides du sous-sol, du point de vue géométrique, topologique et applicatif.

À cet effet, nous avons tout d'abord défini un macro-modèle, baptisé *Soft Frame Model*, dont le but est d'assurer une cohérence géométrique et topologique aux contacts définis de manière souple entre les points, lignes et surfaces tridimensionnels représentant le *modèle structural* de départ. Ce macro-modèle nous a par la suite permis d'unifier les différents processus de remaillage de ces objets.

En ce qui concerne les surfaces, nous avons procédé par mise en place d'une bijection avec un domaine bidimensionnel (une *paramétrisation*), et par génération d'un maillage non-structuré à base de triangles, par raffinement de Delaunay, technique qui produit des mailles dont la qualité de forme est garantie. Toutefois, du fait de l'éventuelle distorsion des angles et des longueurs induite par la paramétrisation, nous avons dû mettre en place différentes modifications de ces techniques, notamment en ce qui concerne la convergence de l'algorithme de raffinement et la préservation de la qualité des triangles dans l'espace tridimensionnel. Nous avons également réalisé différents moyens de contrôle précis de la taille des triangles, et proposé un algorithme particulièrement robuste de construction de modèles volumiques définis par frontières, qui atteste de la validité des maillages de surface générés avec notre approche.

Nous avons ensuite tiré profit de la qualité de ces triangulations pour construire des volumes tétraédrisés Contraint-Delaunay, où nous avons pu garantir une qualité minimum de forme des tétraèdres dans une grande portion du domaine d'étude, en gardant toutefois une résolution grossière. Nous avons également vu comment modifier ensuite finement la résolution de ces tétraédrisations, et comment éliminer la présence éventuelle de mailles dégénérées par différents post-traitements, dont nous avons pu mesurer l'efficacité. Différentes simulations ont prouvé la validité applicative de ces maillages. Enfin, dans le cadre particulier des simulations d'écoulement dans les domaines tridimensionnels du sous-sol, nous avons proposé différents algorithmes de génération de grilles d'écoulement non-simpliciales, et en particulier un procédé original, car véritablement tridimensionnel, de construction de maillages *modulaires hybrides*.

Sur ce dernier point, nous avons fait volontairement abstraction du problème de l'attribution de valeurs cohérentes de propriétés (comme la perméabilité ou la porosité

du milieu) aux mailles des grilles d'écoulement. Celles-ci sont en général déduites d'un champ de valeurs scalaires produit par une méthode *géostatistique*, ayant comme support une grille structurée et régulière de résolution très fine. Pour pouvoir *changer d'échelle* et assigner aux mailles de la grille d'écoulement des valeurs de propriété, il est nécessaire de mettre ces mailles en correspondance avec l'espace de la grille haute résolution. Pour cela, il est envisageable de calculer une *paramétrisation tridimensionnelle* du domaine d'étude, par exemple sur une tétraédrisation, telle que l'espace paramétrique représente l'espace de dépôt des couches sédimentaires [Mallet 03-(2)]. Comme nous avons eu l'occasion de le souligner, cette paramétrisation permettrait par exemple de prendre en compte les données stratigraphiques dans des algorithmes de remaillages tridimensionnels (ce que, dans ce travail, nous avons réalisé pour les surfaces), mais aussi d'attribuer des valeurs de propriété reflétant l'hétérogénéité et l'anisotropie des données.

Bibliographie

- [Aavatsmark 02] Ivar Aavatsmark (2002). *An Introduction to Multipoint Flux Approximations For Quadrilateral Grids*. Computational Geosciences, Vol. 6, pages 405-432.
- [Alliez 02] Pierre Alliez, Mark Meyer, Mathieu Desbrun (2002). *Interactive Geometry Remeshing*. Proceedings of the SIGGRAPH' 2002 Conference.
- [Alliez 03] Pierre Alliez, Éric Colin de Verdière, Olivier Devillers, Martin Isenburg (2003). *Isotropic Surface Remeshing*. Proceedings of the International Conference on Shape Modelling and Applications, Non-publié.
- [Allo 03] Fabien Allo (2003). *Robust Construction of Boundary Representation Models*. Mémoire de DEA, Institut National Polytechnique de Lorraine (Nancy, France).
- [Andenmatten 03] Nathalie Andenmatten, Thomas Kohl (June 2003). *Numerical Simulation of 3D Thermal Fields from Gocad Geological Models*. Proceedings of the 23rd Gocad Meeting (Nancy, France).
- [Amenta 99] Nina Amenta, Marshall Wayne Bern, David Eppstein (February 1999). *Optimal Point Placement for Mesh Smoothing*. Journal of Algorithms, Vol. 30, pages 302-322.
- [Baker 98] Timothy J. Baker, John C. Vassberg (July 1998). *Tetrahedral Mesh Generation and Optimization*. Proceedings of the 6th International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations (held at the University of Greenwich), pages 337-349.
- [Balaven 00-(1)] Sophie Balaven, Chakib Bennis, Éric Pain, Sylvain Sarda (June 2000). *Reservoir Hybrid Mesh Generation and Visualisation for Fluid Flow Simulation*. EAGE 62nd Conference and Technical Exhibition.
- [Balaven 00-(2)] Sophie Balaven, Chakib Bennis, Jean-Daniel Boissonnat, Éric Pain (September 2000). *Modular Hybrid Mesh Generation for Reservoir Flow Simulation*. Proceedings of the 7th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery (ECMOR' 2000).

- [Balaven 02] Sophie Balaven, Chakib Bennis, Jean-Daniel Boissonnat, Mariette Yvinec (September 2002). *Conforming Orthogonal Meshes*. Proceedings of the 11th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 219-230.
- [Bank 97] Randolph E. Bank, R. Kent Smith (1997). *Mesh Smoothing Using A Posteriori Error Estimates*. SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 34, pages 979-997.
- [Batycky 96] R. P. Batycky, M. J. Blunt, M. R. Thiele (October 1996). *A 3D Field-Scale Streamline-Based Reservoir Simulator*. SPE Annual Technical Conference and Exhibition.
- [Baumgart 75] B. Baumgart (June 1975). *Winged-Edge Polyhedron Representation for Computer Vision*. AFIPS Nat. Conf. Proc., Vol. 44, pages 589-596.
- [Bern 99] Marshall Bern, Paul Plassmann (1999). *Mesh Generation*. Chapter 6 in Handbook of Computational Geometry, Elsevier Science.
- [Blunt 02] Martin J. Blunt (January 2002). *Streamline-Based Reservoir Simulation*. Course Notes, Department of Earth Science and Engineering, Imperial College, London.
- [Boissonnat 95] Jean-Daniel Boissonnat, Mariette Yvinec (1995). *Géométrie Algorithmique*. Ediscience international, Paris, 540 pages, 19 chapitres.
- [Boivin 02] Charles Boivin, Carl Ollivier-Gooch (2002) *Guaranteed-Quality Triangular Mesh Generation For Domains with Curved Boundaries*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 55, pages 1185-1213.
- [Borouchaki 95] H. Borouchaki, F. Hecht, E. Saltel, P.L. George (October 1995). *Reasonably Efficient Delaunay Based Mesh Generator in 3 Dimensions*. Proceedings of the 4th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 3-14.
- [Borouchaki 96] Houman Borouchaki, Pascal J. Frey, Paul-Louis George (October 1996). *Unstructured Triangular-Quadrilateral Mesh Generation. Application to Surface Meshing*. Proceedings of the 5th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 229-242.
- [Borouchaki 97-(1)] Houman Borouchaki, Paul-Louis George, Frédéric Hecht, Patrick Laug, Éric Saltel (1997). *Delaunay Mesh Generation Governed by Metric Specifications. Part I. Algorithms*. Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 25, pages 61-83.

- [Borouchaki 97-(2)] Houman Borouchaki, Frédéric Hecht (October 1997). *Mesh Gradation Control*. Proceedings of the 6th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 131-141.
- [Borouchaki 00] Houman Borouchaki, Patrick Laug, Paul-Louis George (September 2000). *Parametric Surface Meshing Using a Combined Advancing-Front Generalized Delaunay Approach*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 49, pages 233-259.
- [Bossen 96] Frank J. Bossen, Paul S. Heckbert (October 1996). *A Pliant Method for Anisotropic Mesh Generation*. Proceedings of the 5th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 63-76.
- [Botsch 01] Mario Botsch, Leif P. Kobbelt (2001). *Resampling Feature and Blend Regions in Polygonal Meshes for Surface Anti-Aliasing*. Proceedings of the EUROGRAPHICS' 2001 Conference (Computer Graphics Forum).
- [Bowyer 81] A. Bowyer (1981). *Computing Dirichlet Tessellations*. Computer Journal, Vol. 24, pages 162-166.
- [Brisson 89] E. Brisson (June 1989). *Representing Geometric Structures in D Dimensions: Topology and Order*. Proceedings of the 5th Annual ACM Symposium on Computational Geometry, pages 218-227.
- [Castellini 00-(1)] Alexandre Castellini (2000). *Flow-Based Grids for Reservoir Simulation*. MS Report, Stanford University (Stanford, California, U.S.A.).
- [Castellini 00-(2)] Alexandre Castellini, Michael G. Edwards, Louis J. Durlofsky (2000). *Flow-Based Modules for Grid Generation in Two and Three Dimensions*. Proceedings of the 7th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery (ECMOR' 2000).
- [Caumon 03-(1)] Guillaume Caumon (2003). *Représentation, Visualisation et Modification de Modèles Volumiques pour les Géosciences*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine (Nancy, France).
- [Caumon 03-(2)] Guillaume Caumon, François Lepage, Charles Sword, Jean-Laurent Mallet (2003). *Building and Editing a Sealed Geological Model*. Article soumis à Mathematical Geology.
- [Cavalcanti 99] Paulo Roma Cavalcanti, Ulisses T. Mello (October 1999). *Three-dimensional Constrained Delaunay Triangulation: a Minimalist Approach*. Proceedings of the 8th International Meshing Roundtable, pages 119-129.
- [Chew 89] L. P. Chew (1989). *Constrained Delaunay Triangulations*. Algorithmica, Vol. 4.

- [Chew 93] L. P. Chew (1993). *Guaranteed Quality Mesh Generation for Curved Surfaces*. Proceedings of the 9th Annual ACM-SIAM Symposium on Computational Geometry, pages 274-280.
- [Cheng 00] Siu-Wing Cheng, Tamal K. Dey, Herbert Edelsbrunner, Michael A. Facello, Shang-Hua Teng (September 2000). *Sliver Exudation*. Journal of ACM, Vol. 47, pages 883-904.
- [Cheng 02] Siu-Wing Cheng, Tamal K. Dey (January 2002). *Quality Meshing with Weighted Delaunay Refinement*. Proceedings of the 13th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pages 137-146.
- [Cohen-Steiner 02] David Cohen-Steiner, Éric Colin de Verdière, Mariette Yvinec (2002). *Conforming Delaunay Triangulations in 3D*. Proceedings of the 18th Annual ACM Symposium on Computational Geometry.
- [Conraud 95] Joël Conraud (October 1995). *Lazy Constrained Tetrahedralization*. Proceedings of the 4th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 15-26.
- [Conraud 97] Joël Conraud (1997). *Génération de Maillages de Simplexes pour la Modélisation d'Objets Naturels*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine (Nancy, France).
- [Consonni 93] P. Consonni, M. R. Thiele, C. L. Palagi, K. Aziz (April 1993). *Flexible Gridding Techniques for Coning Studies in Vertical and Horizontal Wells*. SPE Middle East Oil Technical Conference and Exhibition.
- [Deimbacher 93] F. X. Deimbacher, Z. E. Heinemann (1993). *Time-Dependant Incorporation of Locally Irregular Grids in Large Reservoir Simulation Models*. Twelvth SPE Symposium on Reservoir Simulation (New-Orleans, LA, U.S.A.).
- [Delaunay 34] B. N. Delaunay (1934). *Sur la Sphère Vide*. Bul. Acad. Sci. URSS, Class. Sci. Nat., 793-800.
- [Devillers 03] Olivier Devillers, Sylvain Pion (2003). *Efficient Exact Geometric Predicates for Delaunay Triangulations*. Proceedings of the 5th Workshop on Algorithm Engineering and Experimentation, pages 37-44.
- [Djidjev 00] Hristo N. Djidjev (October 2000). *Force-Directed Methods for Smoothing Unstructured Triangular and Tetrahedral Meshes*. Proceedings of the 9th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 395-406.
- [Durlinsky 93] Louis J. Durlinsky (1993). *A Triangle Based Mixed Finite Volume Technique for Modelling Two Phase Flow Through Porous Media*. Journal of Computational Physics, Vol. 105, pages 252-266.

- [Duvinage 00] Isabelle Duvinage (2000). *Création et Mise en Cohérence de Modèles Structuraux à partir d'Horizons Extraits de Données Sismiques Tridimensionnelles*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine (Nancy, France).
- [Dwyer 91] Rex A. Dwyer (1991). *Higher-Dimensional Voronoi Diagrams in Linear Expected Time*. *Discrete and Computational Geometry*, Vol. 6, pages 343-367.
- [Edelsbrunner 00] Herbert Edelsbrunner, Xiang-Yang Li, Gary Miller, Andreas Stathopoulos, Dafna Talmor, Shang-Hua Teng, Alper Ungor, Noel Walkington (2000). *Smoothing and Cleaning up Slivers*. Proceedings of the 32nd Annual ACM Symposium on Theory of Computing (Portland, Oregon, U.S.A.), pages 273-277.
- [Edelsbrunner 01] Herbert Edelsbrunner, Damrong Guoy (October 2001). *An Experimental Study of Sliver Exudation*. Proceedings of the 10th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 307-316.
- [Edmonds 60] J. Edmonds (1960). *A Combinatorial Representation for Polyhedral Surfaces*. *Notices Amer. Math. Soc.*, Vol. 7.
- [Edwards 98] Michael G. Edwards, Regis Agut, Khalid Aziz (September 1998). *Quasi K-Orthogonal Streamline Grids: Gridding and Discretization*. SPE Annual Technical Conference and Exhibition.
- [Edwards 99] Michael G. Edwards (February 1999). *Split Tensor Operators Coupled with Quasi K-Orthogonal Grids*. SPE Reservoir Simulation Symposium.
- [Euler 99] Nicolas Euler (1999). *Modélisation Volumique, Contraintes et Libertés*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine (Nancy, France).
- [Fleischmann 97] Peter Fleischmann, Siegfried Selberherr (October 1997). *Three-Dimensional Delaunay Mesh Generation Using a Modified Advancing Front Approach*. Proceedings of the 6th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 267-278.
- [Fleischmann 99] Peter Fleischmann (December 1999). *Mesh Generation for Technology CAD in Three Dimensions*. PhD thesis, Technischen Universität Wien - Fakultät für Elektrotechnik (Austria).
- [Forsyth 89] P. A. Forsyth (1989). *A Control Volume Finite Element Method for Local Mesh Refinement*. Tenth SPE Symposium on Reservoir Simulation (Houston, TX, U.S.A.).

- [Fortune 87] Steven Fortune (1987). *A Sweepline Algorithm for Voronoi Diagrams*. *Algorithmica*, Vol. 2, pages 153-174.
- [Freitag 96] Lori A. Freitag, Carl Ollivier-Gooch (1996). *A Comparison of Tetrahedral Mesh Improvement Techniques*. Proceedings of the 5th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 87-106.
- [Freitag 97] Lori A. Freitag, Carl Ollivier-Gooch (1997). *Tetrahedral Mesh Improvement Using Swapping and Smoothing*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pages 3979-4002.
- [Freitag 02] Lori A. Freitag (2002). *A Comparison of Optimization Software for Mesh Shape-Quality Improvement Problems*. Proceedings of the 11th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 29-40.
- [Frey 96] Pascal J. Frey, Houman Borouchaki, Paul-Louis George (October 1996). *Delaunay Tetrahedralization using an Advancing-Front Approach*. Proceedings of the 5th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 31-46.
- [Frey 98] Pascal J. Frey, Loïc Maréchal (October 1998). *Fast Adaptive Quadtree Mesh Generation*. Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 211-298.
- [Frey 99] Pascal J. Frey, Paul-Louis George (1999). *Maillages - Applications aux Éléments Finis*. Hermes Science Publ., Paris, 842 pages, 23 chapitres.
- [Garland 01] Michael Garland, Andrew Willmott, Paul S. Heckbert (March 2001). *Hierarchical Face Clustering on Polygonal Surfaces*. Proceedings of the 2001 ACM Symposium on Interactive 3D Graphics.
- [George 91] P.-L. George, F. Hecht, E. Saltel (1991). *Automatic Mesh Generator with Specified Boundary*. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 92, pages 269-288.
- [George 97] Paul-Louis George, Houman Borouchaki (1997). *Triangulation de Delaunay et Maillage: Applications aux Éléments Finis*. Éditions Hermes, Paris, 430 pages.
- [George 99] Paul-Louis George (October 1999). *Tet Meshing: Construction, Optimization, and Adaptation*. Proceedings of the 8th International Meshing Roundtable, pages 133-141.
- [Golias 97] N. A. Golias, R. W. Dutton (1997). *Delaunay triangulation and 3D Adaptive Mesh Generation*. *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 25, pages 331-341.

- [Grosse 02] Olivier Grosse, François Lepage (June 2002). *Generation of Dual Grids Constrained by Geological Boundaries*. Proceedings of the 22nd Gocad Meeting (Nancy, France).
- [Grosse 03] Olivier Grosse, Laurent Deny, François Lepage (June 2003). *2.5D Unstructured Gridding*. Proceedings of the 23rd Gocad Meeting (Nancy, France).
- [Guibas 92] L. J. Guibas, D. E. Knuth, M. Sharir (1992). *Randomized Incremental Construction of Delaunay and Voronoi Diagrams*. Algorithmica, Vol. 7, pages 381-413.
- [Gumhold 01] Stefan Gumhold, Xinlong Wang, Rob McLeod (October 2001). *Feature Extraction From Point Clouds*. Proceedings of the 10th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 293-305.
- [Gunasekera 97] D. Gunasekera, J. Cox, P. Lindsey (1997). *The Generation and Application of K-Orthogonal Grid Systems*. SPE Annual Technical Conference and Exhibition.
- [Hale 01] Dave Hale (October 2001). *Atomic Meshes - A Method for Meshing Digital Images*. Proceedings of the 10th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 185-196.
- [Hale 02] Dave Hale (2002). *Atomic Meshes - From Seismic Imaging to Reservoir Simulation*. Proceedings of the 8th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery (ECMOR' 2002).
- [Hazlewood 93] Carol Hazlewood (1993). *Approximating Constrained Tetrahedralizations*. Computer-Aided Geometric Design, Vol. 10, pages 67-93.
- [Heinemann 88] Z. E. Heinemann, C. W. Brand (September 1988). *Gridding Construction for Reservoir Simulation*. Proceedings of the First International Forum on Reservoir Simulation (Alpach, Austria).
- [Heinemann 89] Z. E. Heinemann, C. W. Brand, M. Munka, Y. M. Chen (February 1989). *Modelling Reservoir Geometry With Irregular Grids*. Tenth SPE Symposium on Reservoir Simulation (Houston, TX, U.S.A.).
- [Heinemann 94] Z. E. Heinemann (August 1994). *Interactive Generation of Irregular Simulation Grids and Its Practical Applications*. Centennial Petroleum Engineering Symposium (Tulsa, OK, U.S.A.).
- [Held 01] Martin Held (2001). *VRONI: An engineering Approach to the Reliable and Efficient Computation of Voronoi Diagrams of Points and Line Segments*. Computational Geometry, Vol. 18, pages 95-123.

- [Hormann 01] K. Hormann, U. Labsik, G. Greiner (2001). *Remeshing Triangulated Surfaces with Optimal Parameterizations*. Computer-Aided Design, Vol. 33, pages 779-788.
- [Inoue 01] Keisuke Inoue, Takayuki Itoh, Atsushi Yamada, Tomotake Furuhashi, Kenji Shimada (2001). *Face Clustering of a Large-Scale CAD Model for Surface Mesh Generation*. Computer-Aided Design, Vol. 33, pages 251-261.
- [Jenny 02] Patrick Jenny, Christian Wolfsteiner, Seong H. Lee, Louis J. Durlofsky (June 2002). *Modeling Flow in Geometrically Complex Reservoirs Using Hexahedral Multi-Block Grids*. SPE Journal, Vol. 7, pages 149-157.
- [Joe 91] Barry Joe (1991). *Construction of Three-Dimensional Delaunay Triangulations Using Local Transformations*. Computer Aided Geometric Design, Vol. 8, pages 123-142.
- [Joe 92] Barry Joe (1992). *Three-Dimensional Boundary-Constrained Triangulations*. Artificial Intelligence, Expert Systems, and Symbolic Computing, Proceedings of the 13th IMACS World Congress, pages 215-222.
- [Joe 95] Barry Joe (1995). *Construction of Three-Dimensional Improved-Quality Triangulations Using Local Transformations*. SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 16, pages 1292-1307.
- [Jones 97] Mark T. Jones, Paul E. Plassmann (1997). *Adaptive Refinement of Unstructured Finite-Element Meshes*. Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 25, pages 41-60.
- [Khawaja 98] Aly Khawaja, Yannis Kallinderis, Harlan McMorris (October 1998). *Adaptive Hybrid Grids for Diverse Industrial Applications*. Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 167-184.
- [Khodakovsky 03] Andrei Khodakovsky, Nathan Litke, Peter Schröder (2003). *Globally Smooth Parameterizations with Low Distortion*. Proceedings of the SIGGRAPH' 2003 Conference.
- [Kobbelt 01] Leif P. Kobbelt, Mario Botsch, Ulrich Schwanecke, Hans-Peter Seidel (2001). *Feature Sensitive Surface Extraction from Volume Data*. Proceedings of the SIGGRAPH' 2001 Conference.
- [Kohl 95] T. Kohl, R. J. Hopkirk (1995). *"FRACTure": a Simulation Code for Forced Fluid Flow and Transport in Fractured Porous Rock*. Geothermics, Vol. 24, pages 345-359.

- [Labbé 99] P. Labbé, J. Dompierre, F. Guibault, R. Camarero (August 1999). *On Element Shape Measures for Mesh Optimization*. Proceedings of the 2nd Symposium on Trends in Unstructured Mesh Generation, during the Fifth US National Congress on Computational Mechanics.
- [Lambaré 02] Gilles Lambaré (December 2002). *Computation of Multi-Arrival Travel Time Maps in Seismic Imaging by Wavefront Construction*. Proceedings of the 2002 GO++ Winter School on Numerical Methods for HL/HJB Problems, INRIA Rocquencourt.
- [Ledez 03] David Ledez (2003). *Modélisation d'Objets Naturels par Formulation Implicite*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine (Nancy, France).
- [Lepage 01-(1)] François Lepage (June 2001). *Generating Three-Dimensional Semi-Unstructured Grids*. Proceedings of the 21st Gocad Meeting (Nancy, France).
- [Lepage 01-(2)] François Lepage, Jean-Laurent Mallet (June 2002). *Filling Three-Dimensional Geological Models With Nice Tetrahedra Honoring Boundaries*. Proceedings of the 21st Gocad Meeting (Nancy, France).
- [Lepage 02-(1)] François Lepage (June 2002). *Triangular and Tetrahedral Meshes for Geological Models*. Proceedings of the 22nd Gocad Meeting (Nancy, France).
- [Lepage 02-(2)] François Lepage (September 2002). *Triangular and Tetrahedral Meshes for Geological Models*. Proceedings of the International Association of Mathematical Geology' 2002 Annual Conference, Berlin.
- [Lepage 03] François Lepage (June 2003). *Generating 3-Dimensional Hybrid Modular Grids for Flow Simulations*. Proceedings of the 23rd Gocad Meeting (Nancy, France).
- [Lévy 98] Bruno Lévy, Jean-Laurent Mallet (1998). *Non-Distorted Texture Mapping for Sheared Triangulated Meshes*. Proceedings of the SIGGRAPH' 1998 Conference.
- [Lévy 99] Bruno Lévy (1999). *Topologie Algorithmique: Combinatoire et Plongement*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine (Nancy, France).
- [Lévy 01] Bruno Lévy, Guillaume Caumon, Stéphane Conreux, Xavier Cavin (2001). *Circular Incident Edge Lists: a Data Structure for Rendering Complex Unstructured Grids*. Proceedings of the IEEE Visualization' 2001 Conference, pages 191-198.

- [Lévy 02] Bruno Lévy, Sylvain Petitjean, Nicolas Ray, Jérôme Maillot (2002). *Least-Squares Conformal Maps for Automatic Texture Atlas Generation*. Proceedings of the SIGGRAPH' 2002 Conference.
- [Lévy 03] Bruno Lévy (2003). *Dual Domain Extrapolation*. Proceedings of the SIGGRAPH' 2003 Conference.
- [Li 00-(1)] Xiang-Yang Li (2000). *Sliver-free Three Dimensional Delaunay Mesh Generation*. PhD thesis, University of Illinois (Urbana Champaign, Illinois, U.S.A.).
- [Li 00-(2)] Xiang-Yang Li (September 2000). *Functional Delaunay Refinement*. Proceedings of the 7th International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations, Whistler, British Columbia, Canada.
- [Li 00-(3)] Xiang-Yang Li (October 2000). *Spacing Control and Sliver-free Delaunay Mesh*. Proceedings of the 9th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 295-306.
- [Li 01] Xiang-Yang Li , Shang-Hua Teng (January 2001). *Generating Well-Shaped Delaunay Meshes in 3D*. Proceedings of the 12th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms.
- [Lienhardt 89] P. Lienhardt (1989). *Subdivision of n-Dimensional Spaces and n-Dimensional Generalized Maps*. Proceedings of the 5th Annual ACM Symposium on Computational Geometry, pages 228-236.
- [Lienhardt 91] P. Lienhardt (1991). *Topological Models for Boundary Representation: a Comparison with n-Dimensional Generalized Maps*. Computer-Aided Design, Vol. 23, pages 59-82.
- [Lienhardt 94] P. Lienhardt (1994). *N-Dimensional Generalized Combinatorial Maps and Cellular Quasi-Manifolds*. Journal on Computational Geometry and Applications, Vol. 4, pages 275-324.
- [Liu 94] Anwei Liu, Barry Joe (1994) *On the Shape of Tetrahedra From Bisection*. Mathematics of Computation, Vol. 63, pages 141-154.
- [Liu 00] Anwei Liu, Mazen Baida (October 2000). *How Far Flipping Can Go Towards 3D Conforming/Constrained Triangulation*. Proceedings of the 9th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 307-315.
- [Lo 01] S. H. Lo (2001). *3D Anisotropic Mesh Refinement in Compliance With a General Metric Specification*. Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 38, pages 3-19.

- [Mallet 92] Jean-Laurent Mallet (1992). *Discrete Smooth Interpolation in Geometric Modeling*. Computer-Aided Design Journal, Vol. 24.
- [Mallet 02] Jean-Laurent Mallet (2002). *Geomodeling*. Oxford University Press, 608 pages.
- [Mallet 03-(1)] Jean-Laurent Mallet (2003). *Geomodeling: Shared-Earth Models and SGrids*. Proceedings of the Seventh International Forum on Reservoir Simulation (Baden-Baden, Germany).
- [Mallet 03-(2)] Jean-Laurent Mallet (2003). *Space-Time Mathematical Framework For Sedimentary Geology*. À paraître dans Mathematical Geology.
- [Martha 01] Luiz Fernando Martha, Joao Luiz Campos, Joaquim Calvacante Neto (June 2001). *On the Use of Finite Elements in gOcad*. Proceedings of the 21st Gocad Meeting (Nancy, France).
- [Massot 02] Jérôme Massot (2002). *Implémentation de Méthodes de Restauration Équilibrée 3D*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine (Nancy, France).
- [Miller 02] Gary L. Miller, Steven E. Pav, Noel J. Walkington (September 2002). *Fully Incremental 3D Delaunay Refinement Mesh Generation*. Proceedings of the 11th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 75-86.
- [Mlacnik 01] Martin J. Mlacnik, Zoltan E. Heinemann (2001). *Using Well Windows in Full Field Reservoir Simulation*. Article soumis pour une présentation au SPE Reservoir Simulation Symposium (Houston, TX, U.S.A).
- [Mlacnik 03] Martin J. Mlacnik, Andreas W. Harrer, Zoltan E. Heinemann (February 2003). *Locally Streamline-Pressure-Potential-Based PEBI Grids*. Article soumis pour une présentation au SPE Reservoir Simulation Symposium (Houston, TX, U.S.A).
- [Mücke 98] Ernst P. Mücke (1998). *A Robust Implementation for Three-dimensional Delaunay Triangulations*. International Journal of Computational Geometry and Applications, Vol. 8, pages 255-276.
- [Muron 03] Pierre Muron, Jean-Laurent Mallet (Juin 2003). *3D Balanced Unfolding: the Tetrahedral Approach*. Proceedings of the 23rd Gocad Meeting (Nancy, France).
- [Murphy 01] Michael Murphy, David M. Mount, Carl W. Gable (2001). *A Point-Placement Strategy for Conforming Delaunay Tetrahedralization*. International Journal of Computational Geometry and Applications, Vol. 11, pages 669-682.

- [Nullans 98] Pascal Nullans (1998). *Reconstruction Tridimensionnelle de Structures Géologiques à partir de Données Hétérogènes*. Thèse de doctorat, Université de Nice - Sophia Antipolis (France).
- [Ollivier-Gooch 01] Carl Ollivier-Gooch, Charles Boivin (2001). *Guaranteed-Quality Simplicial Mesh Generation with Cell Size and Grading Control*. Engineering with Computers, Vol. 17, pages 269-286.
- [Owen 97] Steven J. Owen, Scott A. Cannan, Sunlin Saigal (July 1997). *Pyramid Elements for Maintaining Tetrahedra to Hexahedra Conformability*. AMD, Vol. 220, Trends in Unstructured Mesh Generation, ASME, pages 123-129.
- [Owen 98] Steven J. Owen (October 1998). *A Survey of Unstructured Mesh Generation Technology*. Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 239-267.
- [Owen 99-(1)] Steven J. Owen (April 1999). *Non-Simplicial Unstructured Mesh Generation*. PhD thesis, Carnegie Mellon University (Pittsburgh, PA, U.S.A.).
- [Owen 99-(2)] Steven J. Owen (October 1999). *Constrained Triangulation: Application to Hex-Dominant Mesh Generation*. Proceedings of the 8th International Meshing Roundtable, pages 31-41.
- [Palagi 91] C. L. Palagi, K. Aziz (October 1991). *Use of Voronoi Grid in Reservoir Simulation*. SPE Annual Technical Conference and Exhibition.
- [Palagi 92] C. L. Palagi (1992). *Generation and Application of Voronoi Grids to Model Flow in Heterogeneous Reservoirs*. PhD thesis, Stanford University (Stanford, California, U.S.A.).
- [Paoletti 02] Stefano Paoletti (September 2002). *Polyhedral Mesh Optimization Using the Interpolation Tensor*. Proceedings of the 11th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 19-28.
- [Pauly 02] Mark Pauly, Markus Gross, Leif P. Kobbelt (2002). *Efficient Simplification of Point-Sampled Surfaces*. Proceedings of the IEEE Visualization' 2002 Conference.
- [Pébay 98] Philippe P. Pébay, Pascal J. Frey (October 1998). *A-priori Delaunay Conformity*. Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 321-333.
- [Pedrosa 85] O. A. Pedrosa, K. Aziz (March 1985). *Use of a Hybrid Grid in Reservoir Simulation*. SPE Annual Technical Conference and Exhibition.

- [Plaza 96] Angel Plaza, Graham F. Carey (October 1996). *About Local Refinement of Tetrahedral Grids based on Bisection*. Proceedings of the 5th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 123-136.
- [Plaza 98] Angel Plaza, Jose P. Suarez, Miguel A. Padron (October 1998). *Mesh Graph Structure for Longest-Edge Refinement Algorithms*. Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 335-344.
- [Prévost 02] M. Prévost, M. G. Edwards, M. J. Blunt (June 2002). *Streamline Tracing on Curvilinear Structured and Unstructured Grids*. SPE Journal, Vol. 7, pages 139-148.
- [Prévost 03] Mathieu Prévost (August 2003). *Accurate Coarse Reservoir Modeling Using Unstructured Grids, Flow-Based Upscaling and Streamline Simulation*. PhD thesis, Stanford University (Stanford, California, U.S.A.).
- [Rajan 91] V. T. Rajan (1991). *Optimality of the Delaunay Triangulation in R^d* . Proceedings of the 7th Annual ACM Symposium on Computational Geometry, pages 357-363.
- [Rassineux 98] A. Rassineux (1998) *Generation and Optimization of Tetrahedral Meshes by Advancing Front Technique*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 41, pages 651-674.
- [Remacle 02] Jean-Francois Remacle, Xiangrong Li, Nicolas Chevaugéon, Mark S. Shepard (September 2002). *Transient Mesh Adaptation Using Conforming and Non Conforming Mesh Modifications*. Proceedings of the 11th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 261-274.
- [Requicha 80] A. A. G. Requicha (1980). *Representations for Rigid Solids: Theory, Methods and Systems*. Computing Surveys, Vol. 12, pages 437-464.
- [Rivara 97] Maria-Cecilia Rivara (1997). *New Longest-Edge Algorithms For the Refinement and/or Improvement of Unstructured Triangulations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 40, pages 3313-3324.
- [Ruppert 92] J. Ruppert (1992). *A New and Simple Algorithm for Quality Two-Dimensional Mesh Generation*. Proceedings of the 3rd Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pages 83-92.
- [Ruppert 95] J. Ruppert (May 1995). *A Delaunay Refinement Algorithm for Quality Two-Dimensional Mesh Generation*. Journal of Algorithms, Vol. 18, pages 548-585.

- [Sampl 00] Peter Sampl (October 2000). *Semi-Structured Mesh Generation Based on Medial Axis*. Proceedings of the 9th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 21-32.
- [Sander 01] Pedro V. Sander, John Snyder, Steven J. Gortler, Hugues Hoppe (2001). *Texture Mapping Progressive Meshes*. Proceedings of the SIGGRAPH' 2001 Conference.
- [Seveno 97] Éric Seveno (October 1997). *Towards an Adaptive Advancing Front Method*. Proceedings of the 6th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 349-360.
- [Sheffer 01] A. Sheffer (2001). *Model Simplification for Meshing Using Face Clustering*. Computer-Aided Design, Vol. 33, pages 925-934.
- [Shephard 91] Mark S. Shephard, Marcel K. Georges (1991). *Automatic Three-Dimensional Mesh Generation by the Finite Octree Technique*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 32, pages 709-749.
- [Shewchuk 97] Jonathan Richard Shewchuk (1997). *Delaunay Refinement Mesh Generation*. PhD thesis, Carnegie Mellon University (Pittsburgh, PA, U.S.A.).
- [Shewchuk 98-(1)] Jonathan Richard Shewchuk (June 1998). *A Condition Guaranteeing the Existence of Higher-Dimensional Constrained Delaunay Triangulations*. Proceedings of the 14th Annual Symposium on Computational Geometry (Minneapolis, Minnesota), pages 76-85.
- [Shewchuk 98-(2)] Jonathan Richard Shewchuk (June 1998). *Tetrahedral Mesh Generation by Delaunay Refinement*. Proceedings of the 14th Annual Symposium on Computational Geometry (Minneapolis, Minnesota), pages 86-95.
- [Shewchuk 00-(1)] Jonathan Richard Shewchuk (June 2000). *Mesh Generation for Domains with Small Angles*. Proceedings of the 16th Annual Symposium on Computational Geometry (Hong Kong), pages 1-10.
- [Shewchuk 00-(2)] Jonathan Richard Shewchuk (June 2000). *Sweep Algorithms for Constructing Higher-Dimensional Constrained Delaunay Triangulations*. Proceedings of the 16th Annual Symposium on Computational Geometry (Hong Kong), pages 350-359.
- [Shewchuk 02] Jonathan Richard Shewchuk (September 2002). *Constrained Delaunay Tetrahedralizations and Provably Good Boundary Recovery*. Proceedings of the 11th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 193-204.

- [Shimada 97] Kenji Shimada (October 1997). *Anisotropic Triangular Meshing of Parametric Surfaces via Close Packing of Ellipsoidal Bubbles*. Proceedings of the 6th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 375-390.
- [Souche 00] Laurent Souche (2000). *Local Grid Refinement in 2D and 3D for Flexible Grids*. Mémoire de DEA, Université Henri Poincaré (Faculté de Sciences) - Institut National Polytechnique de Lorraine (Nancy, France).
- [Souche 01] Laurent Souche, Jean-Laurent Mallet (June 2001). *W-Fibers: a New Tool for Fault, Horizon and Reservoir Modeling*. Proceedings of the 21st Gocad Meeting (Nancy, France).
- [Souche 03] Laurent Souche (2003). *Caractérisation et Intégration de Systèmes de Failles au Sein de Modèles de Réservoir (titre provisoire)*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine (Nancy, France).
- [Su 97] Peter Su, Emo Welzl, Robert L. Scot Drysdale (1997). *A Comparison of Sequential Delaunay Triangulation Algorithms*. Computational Geometry, Vol. 7, pages 361-385.
- [Thiele 96] M. R. Thiele, R. P. Batycky, M. J. Blunt, F. M. Orr (1996). *Simulating Flow in Heterogeneous Systems Using Streamtubes and Streamlines*. SPE Reservoir Emgineering.
- [Velten 98] Wolfgang Velten (1998). *Effective Seismic Modeling in 3D Earth Models*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine (Nancy, France).
- [Verma 96] Santosh Verma (1996). *Flexible Grids for Reservoir Simulation*. PhD thesis, Stanford University (Stanford, California, U.S.A.).
- [Verma 97] Santosh Verma, Khalid Aziz (June 1997). *A Control Volume Scheme for Flexible Grids in Reservoir Simulation*. SPE Annual Technical Conference and Exhibition.
- [Voillemont 03] Jean-Charles Voillemont (2003). *Caractérisation par Micro-Sismicité Induite des Milieux Poreux Fracturés. Modélisations par la Méthode des Lignes de Courant d'un Site Géothermique HDR (Soultz-sous-Forêts, France)*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine (Nancy, France).
- [Voronoi 08] G. Voronoi (1908). *Nouvelles Applications des Paramètres Continus à la Théorie des Formes Quadratiques. Recherches sur les Paralléloèdres Primitifs*. Journal Reine angew., Vol. 134.

- [Watson 81] D. F. Watson (1981). *Computing the n-Dimensional Delaunay Tessellation with Application to Voronoi Polytopes*. Computer Journal, Vol. 24, pages 167-172.
- [Weatherhill 94] Nigel P. Weatherhill, O. Hassan (1994). *Efficient Three-Dimensional Delaunay Triangulation with Automatic Point Creation and Imposed Boundary Constraints*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, pages 2005-2039.
- [Weiler 85] K. J. Weiler (1985). *Edge-Based Data Structures for Solid Modeling in Curved-Surface Environments*. IEEE Computer Graphics and Applications, Vol. 5, pages 21-40.
- [Weiler 87] K. J. Weiler (1987). *The Radial Edge Structure: a Topological Representation for Non-Manifold Geometric Modeling*. Geometric Modeling for CAD Applications.
- [Wolfsteiner 02] Christian Wolfsteiner, Louis J. Durlofsky (May 2002). *Near-Well Radial Upscaling for the Accurate Modeling of Non-Conventional Wells*. SPE Western Regional/AAPG Pacific Section Meeting.
- [Zhu 02] Jin Zhu, Ted Blacker, Rich Smith (September 2002). *Background Overlay Grid Size Functions*. Proceedings of the 11th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pages 65-74.